UNIVERSIDAD DE JAÉN

Departamento de Ingeniería Electrónica,
de Telecomunicación y Automática

INGENIERIA DE TELECOMUNICACIÓN
TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL I
CURSO 2005/2006

TEMA 5: ANALISIS ESPECTRAL DE SEÑALES MEDIANTE LA DFT

CUESTIONES TEÓRICAS

1) Una señal en tiempo continuo se muestrea a una frecuencia de 10 KHz, y se calcula la DFT de 1.024 muestras. Determine la separación en frecuencia entre las muestras del espectro.

2) Una señal real en tiempo continuo $x_c(t)$ es de banda limitada a frecuencias por debajo de 5 KHz. Es decir, $X_c(j\Omega)=0$ para $|\Omega|\geq 2\pi(5.000)$. La señal $x_c(t)$ se muestrea a una frecuencia de 10.000 muestras por segundo (10 KHz) y se produce una secuencia $x[n]=x_c(nT)$ con $T=10^{-4}$. Sea X[k] la DFT de 1.000 puntos de x[n]. ¿A qué frecuencia en tiempo continuo corresponden los índices $k_1=150$ y $k_2=800$ en X[k]?

3) Una señal de voz se muestrea con frecuencia de muestreo de 16.000 muestras por segundo (16 KHz). Para realizar el análisis de Fourier dependiente del tiempo de la señal se utiliza una ventana de 20 ms de duración, desplazándose la ventana R=40 muestras entre cada uno de los cálculos de la DFT. Suponiendo que la longitud N de cada DFT es potencia de 2, ¿Cuántas muestras L hay en cada segmento de voz seleccionado por la ventana? ¿Cuántas DFTs se realizan por segundo? ¿Cuál es el mínimo valor de N para poder reconstruir la señal original a partir de la STFT? ¿Qué separación entre las muestras de la DFT (en Hz) se tiene en este caso?

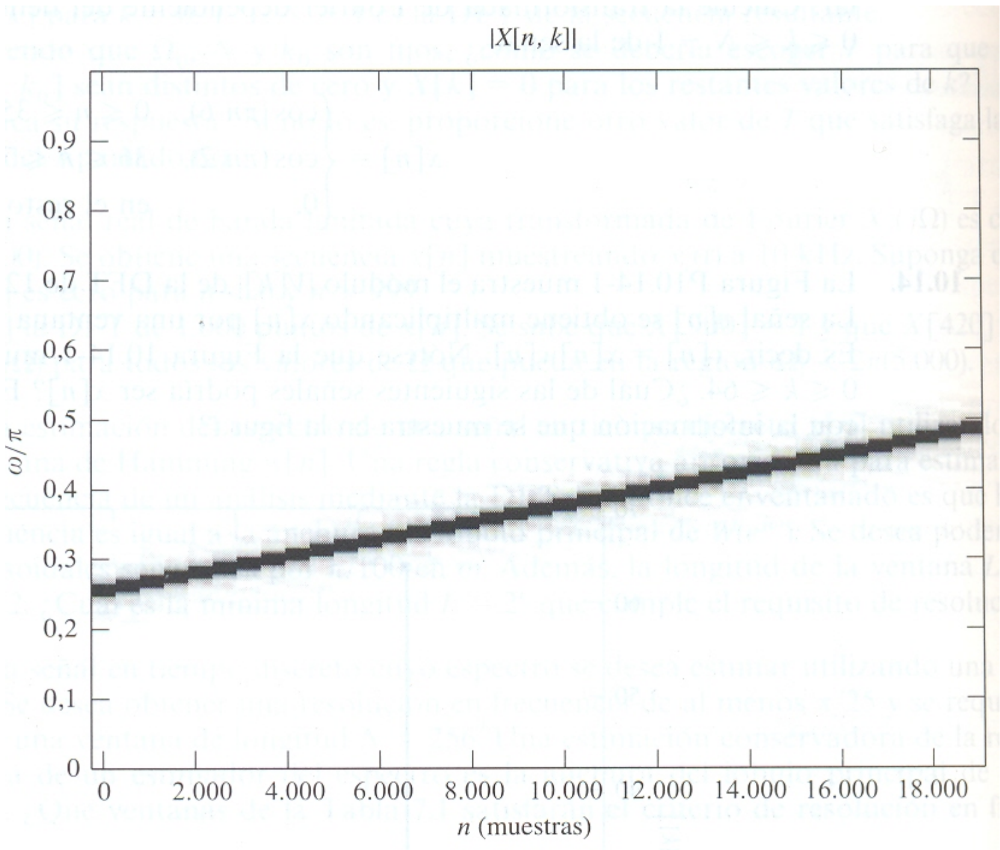
4) Se analiza una señal x[n] utilizando la transformada de Fourier dependiente del tiempo (STFT) $X_r[k]$. Inicialmente, el análisis se realiza con una DFT de N=128 puntos, utilizando una ventana de Hamming de L=128 puntos. El muestreo en el dominio del tiempo de bloques adyacentes es R=128. Es decir, los segmentos enventanados se desplazan 128 muestras. La resolución en frecuencia obtenida resulta no ser suficiente. Para mejorarla se proponen los siguientes métodos:

   a) Incrementar N hasta 256 manteniendo L y R en los mismos valores.
   b) Incrementar N y L hasta 256, dejando el mismo valor de R.
   c) Disminuir R a 64, manteniendo N y L.
   d) Disminuir L a 64, manteniendo N y R.
   e) Mantener N, L y R pero usar una ventana rectangular.

   ¿Qué método elegiría? Explique por qué no son válidas las demás opciones.

5) La figura 1 muestra el espectrograma de una señal chirp que tiene la expresión $x[n] = sen\left(\omega_0 n + \frac{1}{2}\lambda n^2\right)$. En el espectrograma se representa el módulo |X[n,k]|. Basándose en la figura 1 estime ω_0 y λ.

***Figura 1**. Espectrograma de una señal chirp.*



6) En un analizador espectral implementado mediante un periodograma modificado se puede utilizar una ventana de entre las que se especifican en la tabla 1. Si la señal de entrada es un par de tonos con una margen dinámico entre ellos de 35 dB, ¿qué ventana elegiría? Si la frecuencia de muestreo es de 8 KHz, y la separación entre los dos tonos es de 50 Hz como mínimo, ¿cuántas muestras M en el tiempo son necesarias para tener una resolución espectral suficiente?

***Tabla 1**. Parámetros de las transformadas de las ventanas más comúnmente utilizadas.*

VENTANA	RELACIÓN LÓBULO PRINCIPAL-SECUNDARIO (DB)	ANCHO DEL LÓBULO PRINCIPAL $\Delta\omega$ (RAD)
Rectangular	13	$4\pi/M$
Hanning	31	$8\pi/M$
Hamming	41	$8\pi/M$
Blackman	57	$12\pi/M$

7) Un sistema trata de detectar la presencia de un tono en un fondo de ruido mediante análisis espectral con la DFT. Si el estimador espectral es el periodograma modifica-

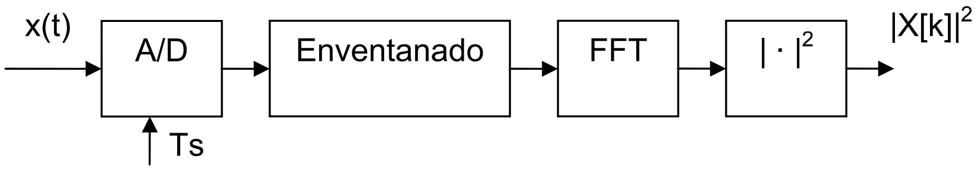
do, ¿qué ventana ofrece una mayor resolución espectral?; la relación valor del lóbulo principal – máximo de ruido ¿qué comportamiento tiene con respecto al tamaño de la ventana? Si se utiliza el promediado de 4 periodogramas, ¿para obtener la misma resolución en frecuencia cuál será ahora el número de muestras en el tiempo?; con este método, ¿mejora la relación valor del lóbulo principal – máximo de ruido? Si se utiliza un estimador de la secuencia de autocorrelación con ¼ de sus muestras, para obtener la misma resolución en frecuencia que con el periodograma ¿cuál será ahora el número de muestras en el tiempo?; ¿qué ocurre con la relación valor del lóbulo principal – máximo de ruido?

PROBLEMAS

1) Sea x[n]=cos(2πn/5) y v[n] la secuencia que se obtiene aplicando una ventana rectangular de 32 puntos a x[n] para calcular $V(e^{j\omega})$. Dibuje $|V(e^{j\omega})|$ para $-\pi \le \omega \le \pi$, indicando las frecuencias de todos los picos y de los primeros nulos a cada lado del pico. Además, indique las amplitudes de los picos y del lóbulo lateral más fuerte correspondiente a cada pico.

2) Existen analizadores de espectro cuyo funcionamiento interno está basado en la FFT. En dichos analizadores la señal (analógica) a analizar es muestreada de forma continua. Periódicamente se selecciona un bloque de N muestras enventanadas, y se calcula la FFT tomándose a continuación el módulo al cuadrado del resultado. Dicho esquema se muestra en la Figura 2.

Figura 2. *Esquema de un analizador de espectro basado en periodograma.*



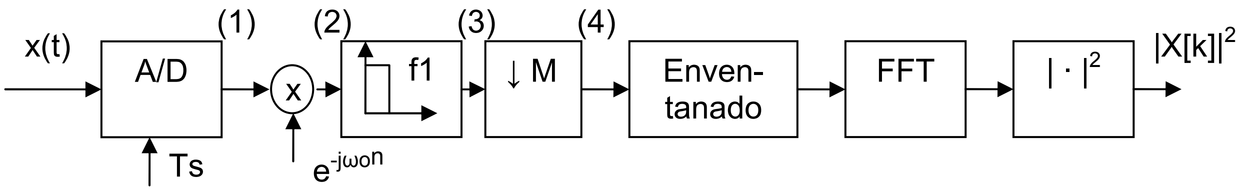
Suponiendo que el ancho de banda de la señal analógica es de 5 KHz, que la frecuencia de muestreo es de 10 KHz, que el número de puntos de la FFT coincide con la duración N del trozo de señal seleccionado, y que se desea una separación entre las muestras del espectro de 10 Hz:

a) Se desea analizar el margen de 0 a 5.000 Hz. Indique el valor de N así como la relación existente entre los índices k de la FFT y las correspondientes frecuencias analógicas.

b) Se desea realizar un "zoom" en el espectro de la señal de modo que la separación de muestras en frecuencia en el margen de 1.000 a 1.500 Hz sea de 1 Hz. Determine el nuevo valor de N así como en qué índices de la FFT obtendríamos la información buscada (es decir, indicar los índices k del rango de 1.000 a 1.500 Hz).

Con el fin de evitar tener que tomar FFTs de un número muy elevado de puntos, para que después únicamente sean de interés un porcentaje bajo de los puntos, se piensa en modificar (al igual que en los analizadores reales) el esquema anterior por el de la figura 3.

Figura 3. *Esquema de un analizador de espectro con "zoom" en frecuencia.*



En esta figura se puede distinguir el producto por un fasor, un filtro paso bajo ideal de frecuencia de corte f_1 y un diezmador por un factor de M.

c) Indicar los valores de ω_0, f_1, M y N que hacen falta para analizar la señal de entrada entre 1.000 y 1.500 Hz con una separación de 1 Hz entre las muestras de la FFT, de modo que N sea el mínimo posible. Indique la relación entre el índice k de la FFT y las frecuencias analógicas. Dibuje los espectros en los puntos 1, 2, 3 y 4 de la figura 3.

3) Se desea implementar un identificador de códigos multifrecuencia (DTMF) mediante el algoritmo FFT. La señalización multifrecuencia se basa en la presencia en la señal telefónica de 2 tonos activos a la vez, uno en una banda de baja frecuencia y otro en una banda de alta frecuencia. Los códigos asociados a cada par de frecuencias se detallan en la tabla 2.

Tabla 2. *Correspondencia entre los dígitos telefónicos y los tonos asociados en señalización multifrecuencia.*

Frecuencia	*1209*	*1336*	*1447*	*1633*
697	1	2	3	A
770	4	5	6	B
852	7	8	9	C
941	*	0	#	D

a) Si se utiliza un periodograma para realizar el análisis espectral, ¿qué tamaño de ventana en ms es necesario para evitar interferencias entre tonos?
b) Si se implementa un periodograma modificado con ventana de Hamming, ¿qué tamaño de ventana en ms es necesario para evitar interferencias entre tonos? Explicar las ventajas de utilizar el periodograma modificado.
c) Si se realiza un promediado de 4 periodogramas, ¿qué tamaño de ventana en ms es necesario para evitar interferencias entre tonos? Determinar las ventajas de utilizar el promediado de periodogramas.

La señalización multifrecuencia viene definida en una norma que permite unas tolerancias de duración, frecuencia y amplitud:

• Tolerancia de duración. En cuanto a duración mínima, para que una señal (tecla o silencio) se detecte obligatoriamente la duración mínima es de 45 ms. Para que una señal no se detecte obligatoriamente la duración máxima es de 15 ms. En el intervalo intermedio el sistema puede hacer cualquier cosa, es decir, puede decidir o no tono, pero el funcionamiento se admitirá como correcto. Por muy larga que sea la duración de una señal siempre se detecta en el sistema como única.

• Tolerancia de frecuencia. La desviación máxima de frecuencia permitida es de 1.5 % respecto del valor nominal.

• Toleracia de potencia. El receptor debe funcionar correctamente con un nivel de potencia de la señal recibida entre 0 y -20 dBW.

d) Calcular la nueva duración de la ventana para cada uno de los métodos de análisis espectral anteriores teniendo en cuenta la tolerancia permitida para las frecuencias.
e) Una manera de tener en cuenta la tolerancia de duración es utilizar una ventana de 15 ms de forma que se detecta un código cuando los tonos detectados son los mismos en dos ventanas consecutivas. ¿Qué método de análisis espectral evita interferencias entre las frecuencias?
f) Una manera alternativa de tener en cuenta la tolerancia de duración es utilizar una ventana de 30 ms con un umbral que evite detectar tonos cuando éste tiene una duración inferior a 15 ms. ¿Qué método de análisis espectral evita interferencias entre las frecuencias?
g) Si finalmente se utiliza una ventana cercana a 30 ms pero con un número de muestras que sea potencia de 2 para optimizar la complejidad de la FFT. ¿Cuántas muestras tendrá esta ventana para una frecuencia de muestreo de fs=8KHz? Determinar las muestras k de la FFT donde se producen los máximos en frecuencia para los códigos '0' y '1'.

4) Cuando un instrumento musical toca una determinada nota el espectro de la señal que produce se caracteriza por una frecuencia fundamental, que es la frecuencia de la nota, y por el timbre del instrumento, que es la amplitud del conjunto de armónicos emitidos. Como consecuencia, el espectro de las señales musicales se basa en un conjunto de tonos con relación armónica (todos los tonos son múltiplos enteros del fundamental) donde la frecuencia del tono fundamental es la frecuencia de la nota emitida y la amplitud del resto de armónicos depende del instrumento en cuestión.

   Se desea implementar un detector de notas musicales mediante análisis espectral con ayuda del algoritmo FFT. Para ello es necesario saber que las notas musicales se repiten en escalas, donde cada escala tiene 12 semitonos diferentes (algunos de los semitonos equivalen a las notas musicales). El primer semitono de cada escala es la nota 'do', estando los demás relacionados de forma que la distancia en frecuencia entre un semitono y el siguiente es de $2^{1/12}$. Con esta relación se puede demostrar que la frecuencia de la misma nota en una escala inmediatamente superior es multiplicar por 2 la frecuencia de la nota en la escala inferior.

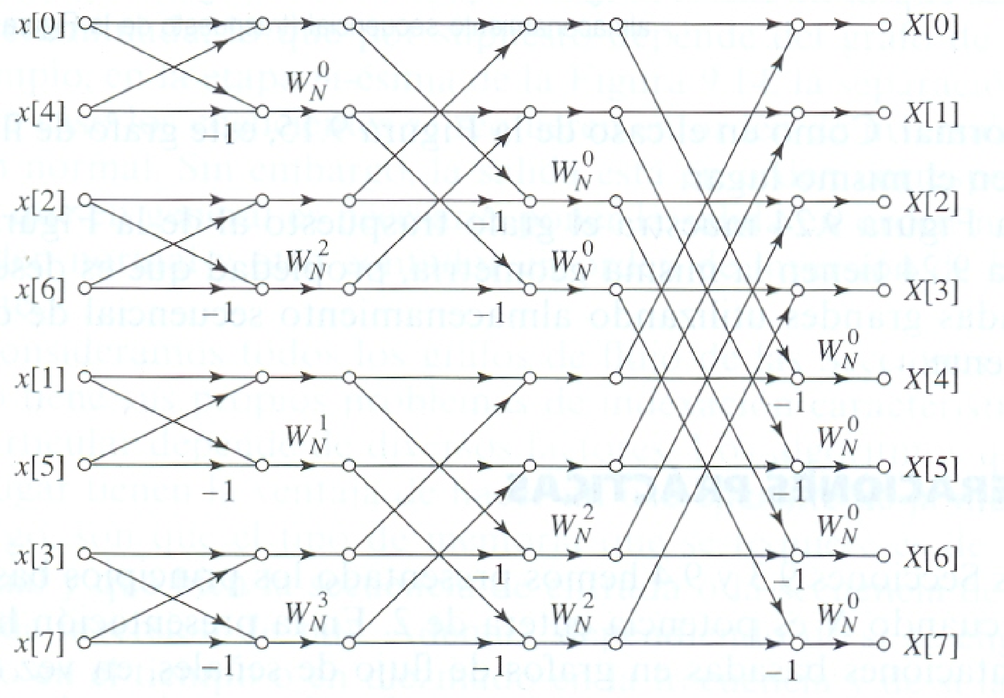
   Para realizar la detección de las notas se implementa un periodograma modificado que permita distinguir picos espectrales de hasta 35 dB de diferencia:

   a) La frecuencia de la nota 'la' de la 4ª escala musical es de 440 Hz. Si la frecuencia de muestreo de la señal musical es de 44,1 KHz, determine el número de muestras de la ventana temporal para poder detectar más de una nota en la señal musical a partir de esta nota. Calcule las muestras k de la FFT donde se producen los máximos de los 12 semitonos siguientes a esta nota (es recomendable utilizar un número de muestras que sea potencia de 2). ¿Qué complejidad en multiplicaciones por muestra requiere este cálculo?
   b) La frecuencia de la nota 'la' de la 1ª escala musical es de 55 Hz. Determine el número de muestras de la ventana temporal para poder detectar más de una nota en la señal musical. ¿Qué complejidad en multiplicaciones por muestra requiere ahora la FFT?
   c) Como se observa en los resultados, la complejidad necesaria para detectar las escalas inferiores es mayor puesto que la distancia entre frecuencias de notas es

menor. Para reducir la complejidad de la FFT es necesario realizar en frecuencia un muestreo no uniforme (en bajas frecuencias se requieren más muestras que en altas frecuencias). Con este fin se disponen de un conjunto de filtros paso banda ideales, un filtro por cada escala musical, y del mismo número de diezmadores. Dibuje un esquema de bloques de tratamiento digital de señal que minimice la complejidad dedicada al cálculo de la FFT en el detector de notas y que utilice estos elementos para detectar notas hasta la 6ª escala musical incluida.

d) Otra alternativa para realizar un muestreo no uniforme en frecuencia de la FFT es modificar el algoritmo FFT. Calcule la reducción en complejidad que se puede conseguir usando el algoritmo FFT de diezmado en frecuencia si sólo se quieren calcular las muestras X[0], X[1], X[2] y X[4] en una FFT de N=8.

Figura 4. *Algoritmo FFT mediante diezmado en frecuencia con salida ordenada.*



SOLUCIONES

Problema 1

Máximos en $\omega_{max1}=2\pi/5$ y $\omega_{max2}=-2\pi/5$, a continuación máximo local a $\Delta\omega_{maxa}=2\cdot 2\pi/32$, y después cada $\Delta\omega_{maxb}=2\pi/32$ un máximo local.
Primer nulo en frecuencias superiores a cada máximo en $\omega_{nuls}=\omega_{max}+2\pi/32$ y cada $\Delta\omega_{nuls}=2\pi/32$.
Primer nulo en frecuencias inferiores a cada máximo en $\omega_{nuli}=\omega_{max}-2\pi/32$ y cada $\Delta\omega_{nuli}=2\pi/32$.
Valor del máximo $A_{max}=1/2$, valor del lóbulo secundario $A_{sec}=A_{max}/\text{sen}(2\pi/32)$.

Problema 2

a) N=1.000 muestras, $f_k=(k-1)\cdot 10.000/N$.
b) N=10.000 muestras, $f_k=1.000$ Hz $\Rightarrow k=1.001$ y $f_k=1.500$ Hz $\Rightarrow k=1.501$.
c) $\omega_0=\pi/4$ rad, $f_1=500$ Hz, M=20, N=500 muestras; $f_k=1000+(k-1)\cdot 500/N$.

Problema 3

a) Ventana de 13,7 ms
b) Ventana de 27,4 ms. Ninguna ventaja.
c) Ventana de 54,8 ms. Mejor discriminación contra el ruido.
d) Periodograma ventana de 17 ms, periodograma modificado ventana de 34,1 ms, promediado de 4 periodogramas 68,1 ms.
e) Para 15 ms ningún método evita por completo las interferencias entre tonos aunque es mejor el periodograma.
f) Para 30 ms el periodograma evita por completo las interferencias entre tonos.
g) Para el código '0':
Frecuencia 941 Hz $\Rightarrow$ Máximo en muestra 30$\Rightarrow$ $f_{k=30}=937{,}5$ Hz.
Frecuencia 1336 Hz $\Rightarrow$ Máximo en muestra 43$\Rightarrow$ $f_{k=43}=1343{,}75$ Hz.
Para el código '1':
Frecuencia 697 Hz $\Rightarrow$ Máximo en muestra 22$\Rightarrow$ $f_{k=22}=687{,}5$ Hz.
Frecuencia 1209 Hz $\Rightarrow$ Máximo en muestra 39$\Rightarrow$ $f_{k=39}=1218{,}75$ Hz.