UNIVERSIDAD DE JAÉN

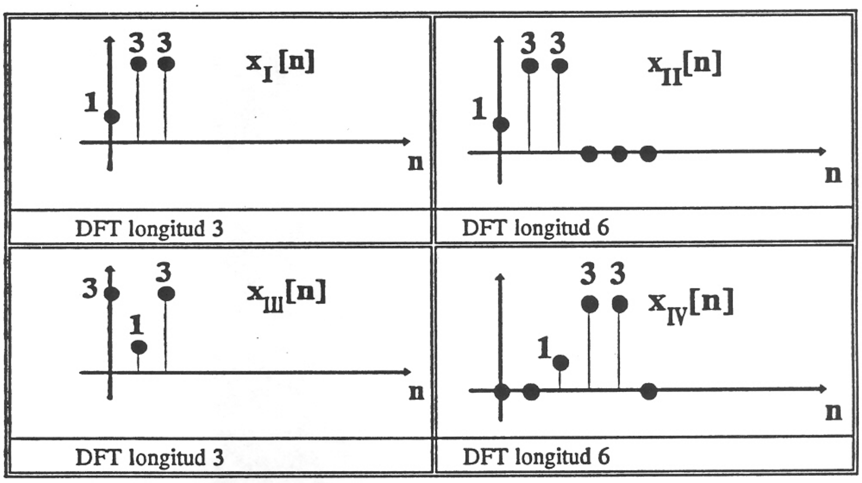
Departamento de Ingeniería Electrónica, de Telecomunicación y Automática

INGENIERO DE TELECOMUNICACIÓN
TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL I
CURSO 2005/2006

TEMA 4: TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

PROBLEMA 1

a) Determinar las DFTs de la longitud indicada de las siguientes secuencias:



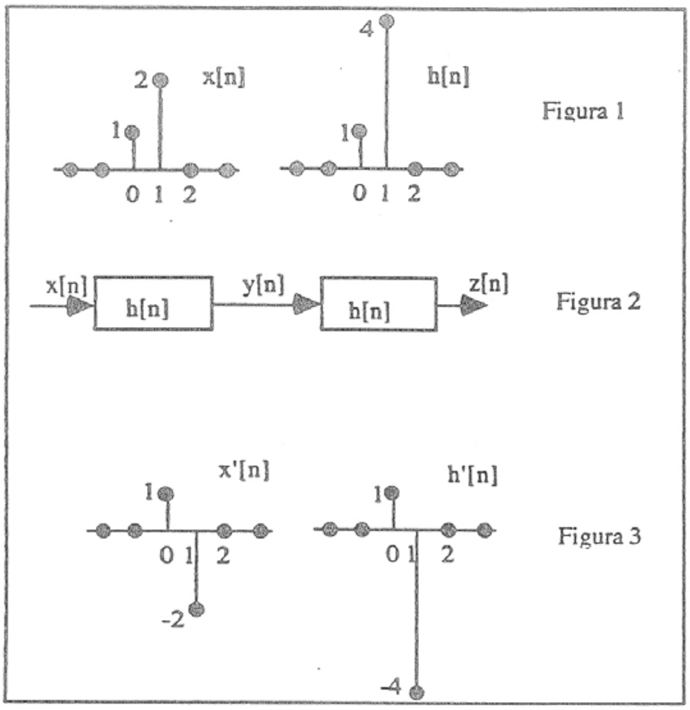
Las DFTs deberán calcularse en el orden indicado (es decir, primero $X_I[k]$, después $X_{II}[k]$, etc.), de manera que en cada cálculo de DFT se aprovechen, si es posible, DFTs calculadas con anterioridad, mediante aplicación de las propiedades que correspondan.

b) Calcular de forma directa (sin utilizar DFT) la convolución circular módulo 3 de las secuencias $x_I[n]$ y $x_{III}[n]$ para n=2.

c) Repetir el apartado anterior utilizando convenientemente las DFTs de $x_I[n]$ y $x_{III}[n]$. El valor obtenido en ambos casos deberá ser el mismo.

PROBLEMA 2

Sean x[n] e y[n] la entrada y la salida de un filtro cuya respuesta al impulso es h[n]. Siendo x[n] y h[n] las secuencias de la figura 1, se pide:



a) Calcular y[n] mediante convolución.
b) Calcular y[n] mediante el uso de la DFT con la mínima longitud posible.
c) A partir de la conexión de la figura 2, calcular z[n] mediante DFTs.
d) Considerando ahora las secuencias de la figura 3, calcular z'[n] directamente a partir de z[n].

PROBLEMA 3

Considerar las secuencias:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{Resto} \end{cases} \quad \text{y} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1 \\ 0, & \text{Resto} \end{cases}$$

a) Calcular las DFTs de longitud 4 de x[n] y h[n], con indicación de los valores numéricos de la parte real e imaginaria de cada valor de la DFT.

b) Calcular la salida de un filtro cuya respuesta al impulso sea h[n] y cuya entrada sea x[n]. En primer lugar, obtener la salida por convolución directa, y a continuación por producto de las DFTs de longitud 4 calculadas en el apartado a). Si se han realizado bien los cálculos, se observará que los resultados obtenidos mediante los dos métodos no coinciden. ¿Existe algún valor que debe coincidir?. Razonar la respuesta.

c) Calcular nuevamente la salida anterior, pero asumiendo que aplicamos el método "ovelap-add", tomando segmentos de longitud 2. Indicar los pasos a seguir y comprobar que se llega al mismo resultado obtenido por convolución directa.

PROBLEMA 4

Sea x[n] una secuencia de N muestras (0≤n≤N-1), cuya DFT de N puntos es X[k]. Calcular en función de X[k]:

a) DFT de 2N puntos de $y_1[n] = \begin{cases} x[n/2], & n\ par \\ 0, & n\ impar \end{cases}, \quad 0 \le n \le 2N-1$

b) DFT de N puntos de $y_2[n] = x[N-n-1], \quad 0 \le n \le N-1$

c) DFT de N puntos de $y_3[n] = x[n]\cos\left(\frac{2\pi k_0}{N} n\right), \quad 0 \le n \le N-1$

d) DFT de 2N puntos de $y_4[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ x[n-N], & N \le n \le 2N-1 \end{cases}$

PROBLEMA 5

Sea x[n] una secuencia de duración N. Dicha secuencia tiene una DFT que denotaremos como X[k]. A partir de dicha secuencia, se construyen las siguientes secuencias de duración 2N:

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \le 2N-1 \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ x[n-N], & N \le n \le 2N-1 \end{cases}$$

$$x_3[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ -x[n-N], & N \le n \le 2N-1 \end{cases}$$

Responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es posible obtener X_1[k], a partir de X[k], sin calcular ninguna DFT?. Razonar la respuesta.
b) ¿Es posible obtener X[k], a partir de X_1[k], sin calcular ninguna DFT?. Razonar la respuesta.
c) ¿Es posible obtener X_2[k], a partir de X[k], sin calcular ninguna DFT?. Razonar la respuesta.
d) ¿Es posible obtener X[k], a partir de X_2[k], sin calcular ninguna DFT?. Razonar la respuesta.
e) ¿Es posible obtener X_3[k], a partir de X[k], sin calcular ninguna DFT?. Razonar la respuesta.
f) ¿Es posible obtener X[k], a partir de X_3[k], sin calcular ninguna DFT?. Razonar la respuesta.

SOLUCIONES

Problema 1

Apartado a)

$$X_I[k] = \sum_{n=0}^{2} x[n] e^{-j2\pi k n/3}$$

Por lo tanto:

$$X_I[0] = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$X_I[1] = 1 + 3e^{-j2\pi/3} + 3e^{-j4\pi/3} = 1 - 6\cos\tfrac{\pi}{3} = -2$$

$$X_I[2] = X_I^*[1] = -2$$

Como x_{II} es como x_I rellenada con ceros, resulta que $X_{II}[k]$ corresponde a un muestreo más fino de la transformada de Fourier de x_I. Por lo tanto:

$$X_{II}[0] = X_I[0],\quad X_{II}[2] = X_I[1],\quad X_{II}[4] = X_I[2]$$

Por tanto los valores a calcular nuevos son:

$$X_{II}[1] = 1 + 3e^{-j2\pi/6} + 3e^{-j4\pi/6} = 1 - j3\sqrt{3}$$

$$X_{II}[3] = 1 + 3e^{-j3\cdot 2\pi/6} + 3e^{-j6\cdot 2\pi/6} = 1$$

$$X_{II}[5] = X_{II}^*[1] = 1 + j3\sqrt{3}$$

Como x_{III} es un desplazamiento cíclico de x_I, es decir:

$$x_{III}[n] = x_I[((n-1))_3]$$

resulta

$$X_{III}[k] = X_I[k]e^{\frac{-j2\pi k}{3}}$$

Como x_{IV} es un desplazamiento cíclico de x_{II}, es decir:

$$x_{IV}[n] = x_{II}[((n-2))_6]$$

resulta

$$X_{IV}[k] = X_{II}[k]e^{\frac{-j2\cdot 2\pi k}{6}}$$

Apartado b)

n	0	1	2	
$x_I[n]$	1	3	3	
$x_{III}[n]$	3	1	3	
$x_{III}[((-n))_3]$	3	3	1	
$x_{III}[((2-n))_3]$	3	1	3	3×1+1×3+3×3=15

Apartado c)

Usando DFTs tenemos:

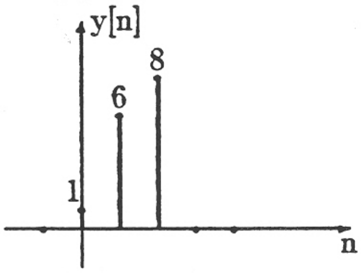
$$X_a[k] = X_I[k]\cdot X_{III}[k] = X_I^2[k]e^{-j2\pi k/3}$$

El valor pedido es:

$$y[2] = \tfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{2} X_a[k]e^{\frac{j2\cdot 2\pi k}{3}} = 15$$

Problema 2

a) Es inmediato obtener $y[n]$ por convolución. El resultado es:



b) El tamaño mínimo de DFT es de $N = 3$. Las DFT's de 3 puntos de $x[n]$ e $h[n]$ valen:

$$X[k] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}k}, \qquad H[k] = 1 + 4e^{-j\frac{2\pi}{3}k}$$

por tanto:

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k] = 1 + 6e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{3}2k}$$

obteniéndose el mismo resultado que en el apartado a) al tomar DFT inversa.

c) Puesto que $y[n]$ tiene duración 3 y $h[n]$ duración 2, la convolución tendrá duración 4. Por tanto las DFT's a calcular serán de tamaño mínimo 4. Operando:

$$Y[k] = 1 + 6e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}$$

$$H[k] = 1 + 4e^{-j\frac{2\pi}{4}k}$$

$$Z[k] = Y[k] \cdot H[k] = 1 + 10e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 32e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 32e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

Obteniéndose

$$z[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 10, & n = 1 \\ 32, & n = 2 \\ 32, & n = 3 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Sin usar $y[n]$ lo que hay que hacer es DFT's de 4 puntos de $x[n]$ y de $h[n]$ y calcular:

$$Z[k] = X[k] \cdot H[k] \cdot H[k]$$

obteniéndose el mismo resultado.

d) En este apartado hay que darse cuenta de:

$$x'[n] = x[n] \cdot e^{j\pi n} = x[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}2n}$$

$$h'[n] = h[n] \cdot e^{j\pi n} = h[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}2n}$$

Por la misma razón que antes las DFT's a realizar son de tamaño 4. Por las relaciones anteriores se cumple que:

$$X_4'[k] = X_4[((k-2))_4]$$

$$H_4'[k] = H_4[((k-2))_4]$$

por lo que:

$$Z_4'[k] = X_4'[k] \cdot H_4'[k] \cdot H_4'[k] = Z_4[((k-2))_4]$$

por lo que:

$$z'[n] = z[n] \cdot e^{j\frac{2\pi}{4}2n} = z[n] \cdot e^{j\pi n}$$

$$z[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ -10, & n=1 \\ 32, & n=2 \\ -32, & n=3 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

Problema 3

a) Calculando la expresión siguiente rellenamos la siguiente tabla

$$X[k]=\sum_{n=0}^{3} x[n]\exp\left(\frac{-j2\pi}{4}kn\right)=\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{kn} \qquad k=0,\ldots,3$$

K	$X[k]$	$H[k]$
0	4	2
1	0	1−j
2	0	0
3	0	1+j

b) Realizando la convolución directa obtenemos:

m	−1	0	1	2	3	4	5
y[m]	0	1	2	2	2	1	0

Siendo nulos los valores no mostrados.

Calculando $DFT^{-1}\{X[k]H[k]\}$ se obtiene que $y'[n]=2$ n=0,...,3. Dicho resultado no coincide con la convolución directa debido a que el producto de DFT's implementa la convolución circular, y dado que la duración de la convolución directa (5) es mayor que el tamaño de las DFT's (4), no coincide el resultado. Los valores que deben coincidir son los corres-pondientes a $n = 1, 2, 3$.

c) Si cogemos ventanas de duración 2, y la respuesta impulsional es de tamaño 2, el tamaño mínimo de DFT es 3. Dividiremos la señal de entrada en dos ventanas sin solape:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	1	1	1	1	0	0	0	0
$x_1[n]$	**1**	**1**	**0**	0	0	0	0	0
$x_2[n]$	0	0	**1**	**1**	**0**	0	0	0
$x_3[n]$	0	0	0	0	**0**	**0**	0	0

Los valores en negrita son de los que se calculan las DFT's de 3 puntos. También se calcula la DFT de 3 puntos de $h[n]$. Dichas DFT's de 3 puntos, son todas las mismas y valen:

k	0	1	2
$X[k]$, $H[k]$	2	$1+\exp(-j\,2\pi/3)$	$1+\exp(j\,2\pi/3)$

Calculando la $DFT^{-1}\{H[k]X_i[k]\}$ se obtiene

n	0	1	2
$y[n]$	1	2	1

Realizando la suma de los distintos segmentos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$y_1[n]$	**1**	**2**	**1**	0	0	0	0	0
$y_2[n]$	0	0	**1**	**2**	**1**	0	0	0
$y_3[n]$	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	0
SUM	1	2	2	2	1	0	0	0

Problema 4

a)
$$Y_1[k]=\sum_{n=par} x[n/2]e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk}=$$

$$=Y_1[k]=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}=X[((k))_N] \qquad 0\le k\le 2N-1$$

b)
$$Y_2[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[N-n-1]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=$$

haciendo el cambio m=N-n-1:

$$=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-m-1)k}=$$

$$=e^{j\frac{2\pi}{N}k}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\right]=e^{j\frac{2\pi}{N}k}X[((-k))N] \qquad 0\le k\le N-1$$

c)
$$Y_3[n]=\frac{1}{2}\left[X[((k-k_0))_N]+X[((k+k_0))_N]\right]$$

d)
$$Y_4[n]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}+\sum_{n=N}^{2N-1} x[n-N]e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}$$

haciendo el cambio $m=n-N$ en el segundo sumando

$$Y_4[n]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}+\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j\frac{2\pi}{2N}k(m+N)}$$

$$Y_4[n]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{2}n}\left[1+e^{-j\pi k}\right]=\begin{cases}2X[k/2] & k \text{ par}\\ 0 & k \text{ impar}\end{cases} \qquad 0\le k\le 2N-1$$

Problema 5

La expresión de $X[k]$ es:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{N}\right) \qquad (1)$$

a) Para $X_1[k]$ tenemos

$$X_1[k]=\sum_{n=0}^{2N-1} x_1[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right) \qquad (2)$$

De las expresiones (1) y (2) puede verse que para k par

$$X_1[k]=X[k/2]$$

Sin embargo para k impar no existe ninguna relación entre los valores de $X_1[k]$ y los de $X[k]$. Por lo tanto NO se puede obtener $X_1[k]$ a partir de $X[k]$.

b) Del apartado anterior

$$X[k]=X_1[2k], \qquad 0\le k<N$$

luego SI que se puede obtener $X[k]$ a partir de $X[k]$.

c) Con respecto a $X_2[k]$ tenemos

$$X_2[k]=\sum_{n=0}^{2N-1} x_2[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)+\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jk(n+N)}{2N}\right)$$

$$X_2[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)(1+e^{-j\pi k})=\begin{cases}2X[k/2] & k \ \ par\\ 0 & k \ \ impar\end{cases} \quad (3)$$

Por lo tanto SI es posible obtener $X_2[k]$ a partir de $X[k]$.

d) También es posible obtener $X[k]$ a partir de $X_2[k]$

$$X[k]=X_2[2k]/2$$

e) Con respecto a $X_3[k]$:

$$X_3[k]=\sum_{n=0}^{2N-1} x_3[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)-\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jk(n+N)}{2N}\right)$$

$$X_2[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\exp\left(-\frac{2\pi jkn}{2N}\right)(1-e^{-j\pi k})=\begin{cases}0 & k \ \ par\\ 2X_1[k] & k \ \ impar\end{cases} \quad (4)$$

Por lo tanto NO puede obtenerse $X_3[k]$ a partir de $X[k]$.

f) Tampoco puede obtenerse $X[k]$ a partir de $X_3[k]$.