



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Departamento de Ingeniería Electrónica,
de Telecomunicación y Automática

INGENIERIA DE TELECOMUNICACION
TRATAMIENTO DIGITAL DE LA SEÑAL I
CURSO 2005/2006

TEMA 2: TRANSFORMADA Z

CUESTIONES TEÓRICAS

- 1) ¿Cuándo un sistema lineal es estable observando su transformada Z?. Si la transformada Z de un sistema es racional y se trata de un sistema causal, ¿de qué otra forma se puede comprobar su estabilidad?
- 2) Un sistema con transformada Z racional tiene un cero en $c_1=1$ y dos polos en $p_1=0.9$, $p_2=1.1$. Si el sistema es causal, ¿será estable?. Si el sistema es estable, ¿cuál será su respuesta al impulso? Dibujar en cada caso el diagrama de polos y ceros con la región de convergencia correspondiente.
- 3) Determinar la respuesta al impulso y la ecuación en diferencias en el tiempo de un sistema causal cuya transformada Z tiene dos ceros en $c_1=2$, $c_2=0.125$ y dos polos en $p_1=0.5 \cdot e^{j\pi/4}$, $p_2=0.5 \cdot e^{-j\pi/4}$.
- 4) Calcular y dibujar la transformada de Fourier de un sistema cuya transformada Z es racional y tiene un cero en $c_1=1$. Repetir lo mismo cuando el cero está en $c_1=-1$.
- 5) Dibujar la respuesta al impulso de un sistema causal con dos polos en $p_1=r \cdot e^{j3\pi/4}$, $p_2=r \cdot e^{-j3\pi/4}$, cuando r vale 0.75, 1 y 1.25. ¿Cuándo es estable el sistema?.
- 6) Determinar la respuesta al impulso y si es estable el sistema determinado por la ecuación en diferencias: $y[n] = x[n] - 0.8 \cdot x[n-1] - 0.2 \cdot x[n-2] + 0.9 \cdot y[n] + 0.1 \cdot y[n]$. Suponer que el sistema es causal.
- 7) A partir de otras propiedades de la transformada Z, determinar cómo calcular la autocorrelación de una señal mediante esta transformada. Calcular la autocorrelación de la señal $x[n] = a^n u[n]$.
- 8) Calcular la transformada Z, dibujando el diagrama de polos y ceros, de la señal $x[n]=r^n \cdot \cos(\omega_0 n) \cdot u[n]$.

PROBLEMAS

- 1) Un sistema causal viene caracterizado por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = 0.5 y[n-1] + x[n]$$

- a) Determinar la respuesta al impulso.
- b) Determinar las respuestas transitoria y en régimen permanente del sistema cuando la señal de entrada es $x[n] = 10 \cos(2\pi n/8) u[n]$.
- c) Especificar la transformada Z de $x[n]$ en función de Z y $\cos(2\pi/8)$.
- d) ¿Qué relación hay entre la transformada Z de $x[n]$ y su transformada de Fourier?

- 2) Una sistema tiene una respuesta al impulso definida por la expresión

$$h[n] = r^n \cdot e^{j\omega_0 n} \cdot u[n].$$

- a) Determinar la transformada Z de $h[n]$ y su región de convergencia. Indicar cuándo es estable el sistema.
- b) Dibujar el diagrama de polos y ceros de la autocorrelación de $h[n]$. ¿Qué sistemas pueden tener la autocorrelación de $h[n]$ observando la transformada Z?. Indicar qué sistemas serán estables.
- c) Calcular la autocorrelación de la respuesta al impulso $h[n]$ a partir de su transformada Z.

- 3) Un sistema de ecuaciones en diferencias tiene dos ceros en $c_1 = -1.5$, $c_2 = -0.5$ y dos polos uno en $p_1 = 0.75$ y otro polo en $p_2 = 0.5$.

- a) Determinar la ecuación en diferencias que define el sistema. Suponiendo que es un sistema causal, ¿es un sistema estable?.
- b) Calcular la respuesta al impulso suponiendo que sea un sistema causal.
- c) Determinar el sistema inverso suponiendo que es causal, su ecuación en diferencias y si es un sistema estable.

- 4) La transformada Z de una señal real es,

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(3 - z^{-1})}$$

- a) Dibujar el diagrama de polos y ceros de esta señal.
- b) Qué región de convergencia y transformada inversa $x[n]$ tiene esta transformada Z, suponiendo que la señal en el tiempo es una señal causal.
- c) Qué región de convergencia y transformada inversa $x[n]$ tiene esta transformada Z, suponiendo que la señal en el tiempo es una señal anticausal.
- d) Qué región de convergencia y transformada inversa $x[n]$ tiene esta transformada Z, suponiendo que la señal en el tiempo es una señal bilateral.

SOLUCIONES

Problema 1 (página 211, Proakis)

a) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

b) $y[n] = y_i[n] + y_{rp}[n] = 6.3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 13.56 \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 0.5\right)u[n]$

c) $X(z) = 10 \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)z^{-1}}{1 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)z^{-1} + z^{-2}}$

Problema 2

a) $X(z) = \frac{1}{1 - re^{j\omega_0}z^{-1}} \quad |z| > r$

b) $p_1 = re^{j\omega_0}, p_2 = \left(\frac{1}{p_1}\right)^* = \frac{1}{r}e^{j\omega_0}, c_1 = 0 \quad ROC: r < |z| < \frac{1}{r}$

c) $x[n] = \frac{1}{1 - r^2} r^{|n|} e^{j\omega_0 n}$

Problema 3

a) $y[n] = x[n] + 2x[n-1] + \frac{3}{4}x[n-2] + \frac{5}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2]$

b) $h[n] = 2\delta[n] + 15\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 16\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$