

Práctica 2:

La Transformada Z y sus Aplicaciones

Curso 2005/2006

Resumen

En esta práctica se pretende que el alumno se familiarice con el manejo de funciones de transferencia racionales. Para ello se hace uso de las funciones de manejo de polinomios de MATLAB. Así mismo se considera la aplicación de la transformada Z como una herramienta de análisis de sistemas LTI discretos. Se experimenta con las propiedades más relevantes de la transformada de modo que el alumno pueda corroborar los resultados teóricos.

En el desarrollo de la práctica puede ser de gran utilidad conocer algunas de las funciones de MATLAB que a continuación se citan: `conv()`, `deconv()`, `roots()`, `poly()`, `residue()`, `polyval()`, `linspace()`, `unwrap()`, `grpdelay()`, `filter()`, `freqz()`, `zplane()`, `impz()`. Ejecute “help” de cada uno de los comandos anteriores para ver qué realizan y qué tipo y número de argumentos requieren como entrada así como qué tipo y número proporcionan a la salida.

1. Introducción

El objetivo de la presente práctica es recordar los conceptos relativos a la transformada Z y su utilidad para describir señales y caracterizar sistemas LTI mediante su función de transferencia. Haremos uso de MATLAB para experimentar con las funciones de transferencia. MATLAB dispone de funciones para el manejo de polinomios, así como algunas para el manejo de funciones de transferencia. Se comprobarán en la práctica las principales propiedades de los sistemas LTI discretos, y su relación con los diagramas de ceros y polos.

2. Manejo de Funciones de Transferencia con MATLAB

MATLAB tiene funciones que permiten manejar polinomios. La forma de representar un polinomio es como un vector de coeficientes, donde el primer elemento del vector representa el coeficiente de mayor grado.

Algunas de las funciones para el manejo de polinomios que conviene conocer son: `conv()`, `deconv()`, `roots()`, `poly()`, `polyder()`, `residue()`, `residuez()` y `polyval()`. Consulte detenidamente el manual y averigüe qué es lo que hace cada una de estas funciones si no lo ha hecho ya. Pegue el contenido de la ayuda de estos comandos en el documento de la memoria para su más fácil revisión.

MATLAB también incorpora en el *Toolbox Signal Processing* funciones que permiten trabajar directamente con las funciones de transferencia racionales de sistemas discretos, entre estas las más relevantes para la realización de la práctica son: `zplane()`, `freqz()`, `impz()`, `filter()`, `grpdelay()`, `unwrap()`. Al igual que con las funciones de manejo de polinomios consulte el manual y averigüe cómo se usan: parámetros de entrada, resultados de salida, opciones.

Un tipo de sistemas discretos particularmente interesante porque su implementación es directa, es el de los sistemas definidos con ecuaciones en diferencias de coeficientes constantes:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] + \sum_{j=1}^N a_j y[n-j]$$

Dichos sistemas admiten una función de transferencia racional de la siguiente forma:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} \quad (1)$$

Como se ve dicha expresión no es más que un cociente de polinomios. Podemos pues, para trabajar en MATLAB con funciones de este tipo, considerar $H(z)$ como dos vectores B y A correspondientes a los coeficientes del numerador y denominador de la siguiente forma:

$$B = [b_0, b_1, \dots, b_M]$$

$$A = [1, -a_1, -a_2, \dots, -a_N]$$

Recuerde que una representación alternativa para una expresión racional como la de la ecuación 1 es mediante los ceros (raíces del numerador) y los polos (raíces del denominador).

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

2.1. Operaciones básicas con diversas funciones de transferencia

En esta sección, se pretende comenzar a manejar las funciones que permiten determinar y representar diagramas de ceros y polos, respuestas impulsivas y respuestas en frecuencia. El dominio de estas funciones resulta básico en el resto de la asignatura.

Considere las funciones de transferencia $H(z)$ que siguen a continuación:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0,85\sqrt{2}z^{-1} + 0,7225z^{-2}}$$

$$H_2(z) = 1 - 0,85\sqrt{2}z^{-1} + 0,7225z^{-2}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - 0,95\sqrt{2}z^{-1} + 0,9025z^{-2}}$$

$$H_4(z) = 1 - 0,95\sqrt{2}z^{-1} + 0,9025z^{-2}$$

Dichas funciones de transferencia pueden ser leídas del fichero `ap2.mat`.

1. Obtenga para cada una de ellas su diagrama de ceros y polos.
2. Calcule y represente su respuesta en frecuencia tanto en módulo (en dB y lineal) como en fase. Note que el eje de frecuencias debe ir de 0–0.5.
3. Es sabido, que un polo induce un máximo en el módulo de la respuesta en frecuencia, mientras que un cero induce un mínimo. Para los sistemas 1 y 3 comente la relación entre la ubicación de los polos y las propiedades del máximo (en qué frecuencia sucede, cómo es de alto y cómo de ancho). Proceda de forma análoga para los sistemas 2 y 4 analizando la relación entre la posición de los ceros y los mínimos.
4. La función MATLAB `filter()` permite realizar el filtrado de una secuencia con un LTI de función de transferencia racional como los que estamos considerando con condiciones iniciales nulas. Para obtener la respuesta impulsional del sistema bastará con introducir a la entrada $\delta[n]$.
 - Construya un vector de 31 elementos en el que el primer elemento sea 1 y los 30 restantes valgan cero. Este vector correspondería a $\delta[n]$.
 - Fíltrelo con cada uno de los 4 sistemas anteriores y obtenga las 4 respuestas impulsionales.
 - Representélas gráficamente.
5. MATLAB permite el cálculo directo de las respuestas impulsionales con la función `impz()`. Recalcule las respuestas impulsionales usando `impz()` y compruebe que los resultados coinciden con los que obtuvo filtrando $\delta[n]$.
6. Explique para las funciones de transferencia IIR qué relación existe entre la ubicación de los polos y la duración efectiva de la respuesta impulsional. Es decir indicar cuál decrece más deprisa.

3. Filtrado de señales

En esta sección se pretende explorar mediante ejemplos el efecto producido sobre una señal al ser filtrada. Estudiaremos por un lado los aspectos de la respuesta en frecuencia, y por otro los del dominio del tiempo.

3.1. Respuesta en amplitud y retardo de grupo

Considere la señal de la figura 1

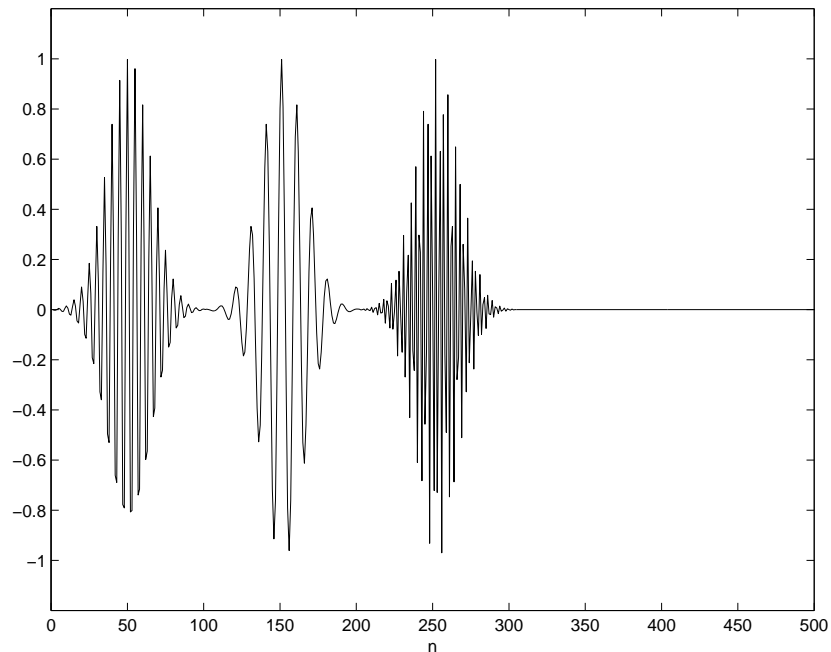


Figura 1: Señal a usar en el apartado “Respuesta en amplitud y retardo de grupo”.

Dicha señal es la concatenación de tres pulsos de frecuencias centrales diferentes. Dicha señal así como los coeficientes del filtro a utilizar los puede encontrar en el fichero `retgrupo.mat`. Filtre la señal `s` con el filtro cuyo numerador es `B` y cuyo denominador es `A` (contenidos en el fichero mencionado). Represente el resultado.

- ¿Cuántos pulsos contiene la señal filtrada? Represente el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro. Utilizando el programa `espectro.m` (ver ayuda de dicho programa) calcule el espectro de la señal de la figura 1. Explique lo sucedido.
- Preste atención ahora a la separación de los pulsos en la señal filtrada. ¿Qué observa? Represente el retardo de grupo del filtro (use `grpdelay()` para calcular el retardo de grupo). Explique lo observado en base a la gráfica que acaba de obtener.

3.2. Transitorios en filtrados

Considere la señal que se muestra en la figura 2. Dicha señal corresponde a un tono de duración finita. Dicha señal puede cargarse del archivo `transit.mat` usando `load`. Al cargar dicho archivo cargará también los coeficientes del numerador (`B`) y denominador (`A`) de un filtro.

- Calcule y represente la respuesta impulsiva del filtro en $0 \leq n \leq 500$.

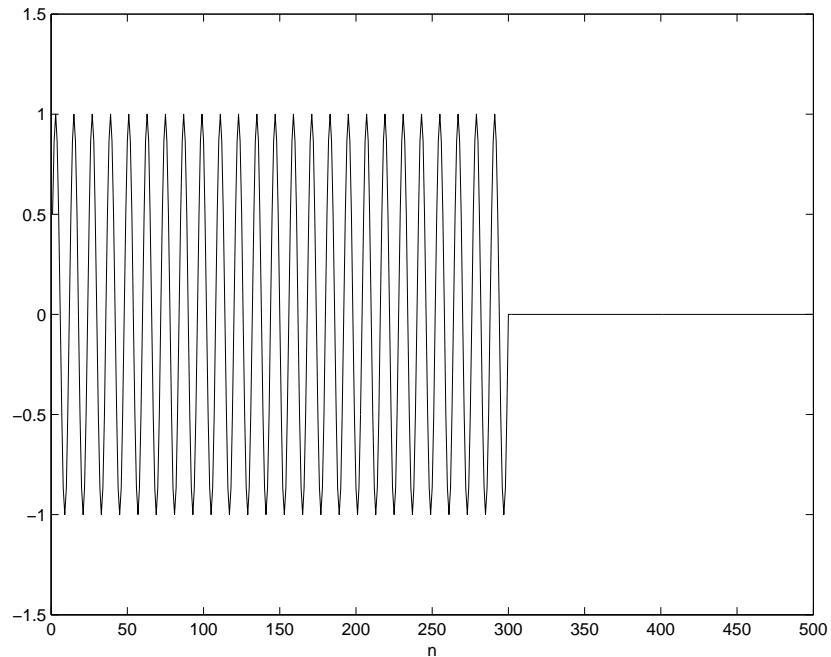


Figura 2: Señal a usar en el apartado “Transitorio en filtrados”.

- Filtre la señal x correspondiente a la figura 2 con el filtro anterior. En el resultado podrá observar 3 zonas:
 - Transitorio inicial.
 - Régimen permanente.
 - Transitorio final.

Indique aproximadamente los intervalos de muestras de cada una de las zonas. Intente encontrar una explicación de los intervalos anteriores en base a la respuesta impulsiva.

4. Propiedades en el dominio transformado z

En esta parte de la práctica revisaremos algunas de las propiedades de los sistemas LTI definidos con ecuaciones en diferencias en el dominio de la frecuencia y comprobaremos cómo se manifiestan dichas propiedades en el dominio de la transformada z .

4.1. Fase lineal

Los sistemas con fase lineal son sistemas FIR con una respuesta impulsional que presenta simetría par o impar. Recuerde que los sistemas de fase lineal presentan una gran ventaja en aplicaciones en las que la fase posee gran importancia, como sucede en Telecomunicaciones, por ejemplo, en la demultiplexación de determinadas señales de datos multiplexados por

división en frecuencia MDF (FDM en inglés) dado que es importante que no se introduzca distorsión de fase para una correcta detección de los datos.

En primer lugar verificaremos, a través de tres sencillos ejemplos la propiedad de fase lineal. Considere los tres siguientes sistemas, cuyos coeficientes puede leer de `ap4.mat` mediante la función `load` de MATLAB.

1. Sistema 1: Filtro IIR todo polos de orden 1.

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0,8z^{-1}}$$

2. Sistema 2: Filtro FIR con respuesta impulsiva no-simétrica.

$$H_2(z) = 1 + 0,5z^{-1} + 0,2z^{-2}$$

3. Sistema 3: Filtro FIR con respuesta impulsiva simétrica.

$$H_3(z) = 0,2 + 3z^{-1} + 0,2z^{-2}$$

Calcule la respuesta en frecuencia de los tres sistemas anteriores y verifique que únicamente el sistema 3 tiene fase lineal exacta.

En el sistema de fase lineal, el retardo de grupo es constante. Encuentre la relación entre el valor del retardo de grupo y el punto de simetría de $h[n]$.

4.2. Estabilidad

Un sistema es estable según el criterio BIBO (Bounded Input-Bounded Output) cuando ante cualquier entrada acotada su salida también lo es. Para los sistemas LTI definidos con ecuaciones en diferencias, la estabilidad se comprueba fácilmente viendo que la región de convergencia de $H(z)$ incluye la circunferencia unidad. Para los sistemas causales esto se traduce en que todos los polos están dentro del círculo unidad. Como los sistemas FIR son todo-ceros (salvo un polo múltiple en el origen), siempre son estables. Para los IIR dependerá de la ubicación de sus polos.

Considere los siguientes dos sistemas:

$$H_6(z) = \frac{1}{1 - 0,85\sqrt{2}z^{-1} + 0,7225z^{-2}}$$

$$H_7(z) = \frac{1}{1 - 1,25\sqrt{2}z^{-1} + 1,5625z^{-2}}$$

1. Dibuje el diagrama de ceros y polos de ambos sistemas.
2. Obtenga la respuesta impulsional de ambos sistemas entre $n = 0, 1, \dots, 30$ utilizando la función `filter()` o `impz()`.

4.3. Sistemas Paso-Todo

Un sistema se dice que es paso-todo cuando el módulo de su respuesta en frecuencia es constante. Si el sistema es LTI definido con ecuaciones en diferencias, es decir presenta una $H(z)$ racional, entonces dicha propiedad implica que si tiene un polo en z_0 entonces debe tener un cero en $(z_0^*)^{-1}$. Considere el sistema:

$$H_8(z) = \frac{1 - 0,85^{-1}\sqrt{2}z^{-1} + (0,7225)^{-1}z^{-2}}{1 - 0,85\sqrt{2}z^{-1} + 0,7225z^{-2}}$$

1. Dibuje el módulo y la fase de $H(e^{j\omega})$. Calcule y dibuje igualmente el retardo de grupo. Dibuje también el diagrama de polos y ceros. Comente los resultados. ¿Existe alguna relación de los ceros y los polos con la respuesta en fase?
2. Determine y represente la respuesta impulsional del sistema en el margen $n = 0, \dots, 30$. ¿Cree que es posible determinar que un sistema es paso-todo a la vista de su respuesta impulsional?
3. ¿Se le ocurre alguna aplicación de estos sistemas?

NOTA: Para obtener los resultados de forma correcta, considere los coeficientes con la máxima precisión de MATLAB, es decir a la hora de calcular la inversa de un número, tenga en cuenta todos los decimales que devuelve MATLAB.

5. Aplicación: Diseño de filtros *Notch*

En esta sección se pretende ilustrar cómo el uso de diagramas de ceros y polos permite diseñar filtros simples que serían de otro modo complicados de diseñar. Entenderemos por *diseñar filtros* el hecho de encontrar los coeficientes de una ecuación en diferencias que implemente un sistema LTI con las características requeridas.

Para ello se pretende diseñar un filtro *notch*. Este tipo de filtro tiene las siguientes características ideales:

- Tiene un nulo en f_0 . Es decir la respuesta en frecuencia es cero en dicha frecuencia
- La respuesta en frecuencia es constante para $f \neq f_0$.

Dichos filtros suelen emplearse para eliminar tonos de frecuencia conocida en señales (tonos piloto, señalización multifrecuencia, interferencia de 50 Hz. etc.).

Supongamos que deseamos diseñar uno de dichos filtros con las siguientes especificaciones:

- $f_0 = 1/8$.

- Número máximo de ceros/polos: 2.
- $H(e^{j0}) = 1$.

Para realizar el diseño iremos refinando un diseño inicial tratando de mejorarlo progresivamente hasta alcanzar la solución final.

Una de las ideas fundamentales de este ejemplo consiste en comprobar la utilidad de conceptos como ceros y polos. Para ello intente imaginar cómo podría diseñar un filtro con unas características similares a las pedidas, utilizando la respuesta impulsional o la respuesta en frecuencia.

1. Parece lógico intentar comenzar el diseño utilizando un filtro FIR con un par de ceros sobre la circunferencia unidad en las frecuencias pedidas.

- Obtenga la función de transferencia $H(z)$ del filtro FIR de orden 2

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

de modo que dicho filtro presente un nulo para $f = 1/8$ y que la ganancia de continua sea 1. El filtro deberá tener *coeficientes reales*.

- Represente el módulo de la función de transferencia obtenida. ¿Qué opina del diseño conseguido?
2. En un intento de mejorar el diseño anterior permitiremos que la función de transferencia sea de la forma:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

es decir, que tenga dos ceros y dos polos (pares conjugados ambos para que la respuesta impulsional sea real). Sabemos que:

- Las influencias de un cero y de un polo en la respuesta en frecuencia son contrarias.
- La respuesta en frecuencia depende de la distancia de los ceros/polos a los puntos correspondientes de la circunferencia unidad.
- Si desde un punto de la circunferencia unidad, la distancia a un cero y a un polo son similares, el efecto neto es *la cancelación del efecto del cero y del polo*, es decir respuesta en frecuencia cte.
- Los polos de un sistema causal deben estar dentro de la circunferencia unidad para que el sistema sea causal y estable.

Con estas ideas, considere un filtro que tenga los mismos ceros que el FIR anterior pero dos polos que tengan módulo 0.9 y argumento el mismo que el de los ceros¹.

- Represente el diagrama de ceros y polos de este filtro.

¹No olvide ajustar la ganancia del filtro en continua.

- Represente el módulo de la respuesta en frecuencia.
 - Compárelo con el FIR y comente los resultados.
3. Repita lo anterior pero ahora con polos de módulo 0,999.
- Represente el diagrama de ceros y polos de este filtro.
 - Represente el módulo de la respuesta en frecuencia.
 - Compárelo con el FIR y comente los resultados.
4. Compare la respuesta en frecuencia de los dos diseños IIR.
5. Aún se podría mejorar ligeramente el diseño de los filtros. Para ello lo que se debería hacer es fijar el módulo de los polos. Ahora, lo que se haría es *optimizar el argumento de los polos* de forma que se minimizase el error con respecto a la respuesta en frecuencia deseada. Para ello se podrían emplear programas de optimización numérica inicializados con los polos del diseño IIR básico. No obstante, esto queda fuera del alcance de esta práctica dedicada a la transformada Z.

Resumen

Al finalizar esta práctica, el alumno debería haber conseguido:

- Manejar y operar polinomios con MATLAB lo que permite manejar de forma elegante y cómoda funciones de transferencia racionales. haciendo uso de las funciones `conv()`, `deconv()`, `roots()`, `poly()`, `polyder()`, `residue()`, `polyval()`.
- Manejar las funciones que MATLAB incorpora para trabajar con las funciones de transferencia de sistemas discretos de forma sencilla: `unwrap()`, `grpdelay()`, `filter()`, `freqz()`, `zplane()`, `residuez()`, `impz()`, `cumsum()`.
- Repasar las principales propiedades de los sistemas LTI racionales que tienen reflejo en la función de transferencia: Fase lineal, Estabilidad, Sistemas paso-todo, Sistemas de fase mínima.