



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Material del curso “Análisis de datos procedentes de investigaciones mediante programas informáticos”

Manuel Miguel Ramos Álvarez

MATERIAL XII “EXPLICACIÓN DE PATRONES CAUSALES COMPLEJOS MEDIANTE ECUACIONES ESTRUCTURALES”

Índice

12.	INTRODUCCIÓN. OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES	2
12.1.	CONSTRUCCIÓN DE MODELOS Y ECUACIONES BÁSICAS	3
12.1.1.	EL MODELO GENERAL DE ECUACIONES ESTRUCTURALES.....	5
12.2.	ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS E IDENTIFICACIÓN MODELO.....	11
12.3.	AJUSTE DEL MODELO.....	12
12.4.	REESPECIFICACIÓN DEL MODELO.....	16
12.5.	LIMITACIONES Y SUPUESTOS	18
12.6.	LA SECUENCIA DE INVESTIGACIÓN EN CFA Y SEM.....	18
12.7.	CONCLUSIONES.....	19

Bibliografía

Bollen, K. A. (1989). *Structural equations with latent variables*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Hoyle, R. H. (1995). *Structural equation modeling: Concepts, Issues, and Applications*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Hox, J.J. y Bechger, T.M.(1998). *An introduction to structural equation modeling*. Family Sciences Review, 11, 354-373.

Kline, R.B. (1998). *Principles and practice of structural equation modeling*. NY: Guilford Press.

Loehlin, J. C. (1998) *Latent Variable Models: an introduction to factor, path, and structural analysis*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

12. INTRODUCCIÓN. OBJETIVOS DEL ANÁLISIS DE ECUACIONES ESTRUCTURALES

- Los Modelos de ecuaciones estructurales (SEM, LISREL) permiten realizar inferencias de naturaleza causal a partir de datos obtenidos en investigaciones correlacionales.
- Cuando el investigador tiene ideas claras sobre cuáles pueden ser las variables latentes (constructor) y sobre qué relaciones puede haber entre ellas y con las variables observadas.
- Estrechamente relacionado con el factorial confirmatorio (CFA).
- El objetivo se reduce a estimar un conjunto de parámetros que indiquen la relación (causal o correlacional) entre las variables, de modo que pueda estimarse una matriz de varianzas-covarianzas poblacional que sea lo más parecida posible a la matriz observada en la muestra.

Las clases de cuestiones que SEM ayuda a resolver

- En cualquier ámbito de investigación interesa saber cuáles pueden ser las relaciones entre unas variables y otras, así como las predicciones que hace la teoría sobre ellas, es decir sobre la matriz de varianzas-covarianzas.
- La predicción de la matriz poblacional sólo puede realizarse cuando se han estimado todos los parámetros del modelo.
- Los parámetros hacen referencia a las relaciones (causales o de mera correlación) entre las variables observadas y latentes, incluyendo los errores.
- Un buen modelo es aquel en el que la semejanza entre las dos matrices es elevada.
- Cuando el ajuste se considera suficiente el modelo es empleado para explicar los datos observados sino es conveniente modificarlo con el fin de mejorar su capacidad explicativa.
- Un buen modelo es capaz de explicar una gran cantidad de la variabilidad de las variables observadas.
- Pueden existir relaciones directas o indirectas de variables con factores, o con factores más profundos esto es algo que SEM nos ayuda a resolver.
- SEM también ayudan a resolver preguntas relacionadas con diferencias entre distintos grupos o entre los propios sujetos medidos en ocasiones diferentes.

12.1. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS Y ECUACIONES BÁSICAS

Supongamos el siguiente ejemplo basado en una investigación de Loan y Chapman (2002) sobre predictores longitudinales de metas preactivas y participación a la edad de los 80:

Measures

The measures for this study include questionnaire data from 1992, 1972, and 1950 from the Terman archives. The measures include items on proactive goals and activities in 1992, self-reported health and energy and vitality in 1992, purposiveness in 1950, and a retrospective self-assessment in 1972 of culture and service goals in young adulthood and their satisfaction.

Proactive goals.—An eight-item measure of proactive goals in 1992 was included in the study. This measure was

derived from a list of goals and purposes for life on the 1992 questionnaire. The participants were asked to check important goals and to check twice the three goals that were most important to them. Not checking a goal was scored as 0, and important and most important were scored as 1 and 2, respectively. On the basis of previous item and factor analyses (Holahan, 1988), a proactive goals scale was constructed, and was composed of two subscales—involvement and achievement motivation. The three-item involvement subscale contained the items to have many personal relationships, to enjoy intimacy with others, and to enjoy a hobby or other activities. The five-item achievement motivation scale contained the items to continue to grow personally, be creative and productive; to have opportunities for achievement or competition; to make a contribution to society; to continue to work; and to produce social change. Cronbach's alpha for the eight-item scale was .63.

Activities.—A six-item measure of activity participation was derived from a list of activities on the 1992 questionnaire. The participants were asked to check or double check those activities that occupied them occasionally or frequently. Items were scored as 1 (occasionally) and 2 (frequently). Items not checked were scored as 0. The items were chosen on the basis of content to reflect activities that could logically be expressions of goals for culture and service to society. For the LISREL analysis, the items were grouped into three subscales. The intellectual activity items included nonfiction or professional or avocational publications and continuing education, increasing knowledge or skills. The cultural items included going to concerts, plays, lectures, museums, and so forth and serious practice on arts (music, art, writing, dramatics, etc.). The social service activities included community service with organizations and helping others (friends, neighbors, children). The Cronbach's alpha for the six-item scale was .63.

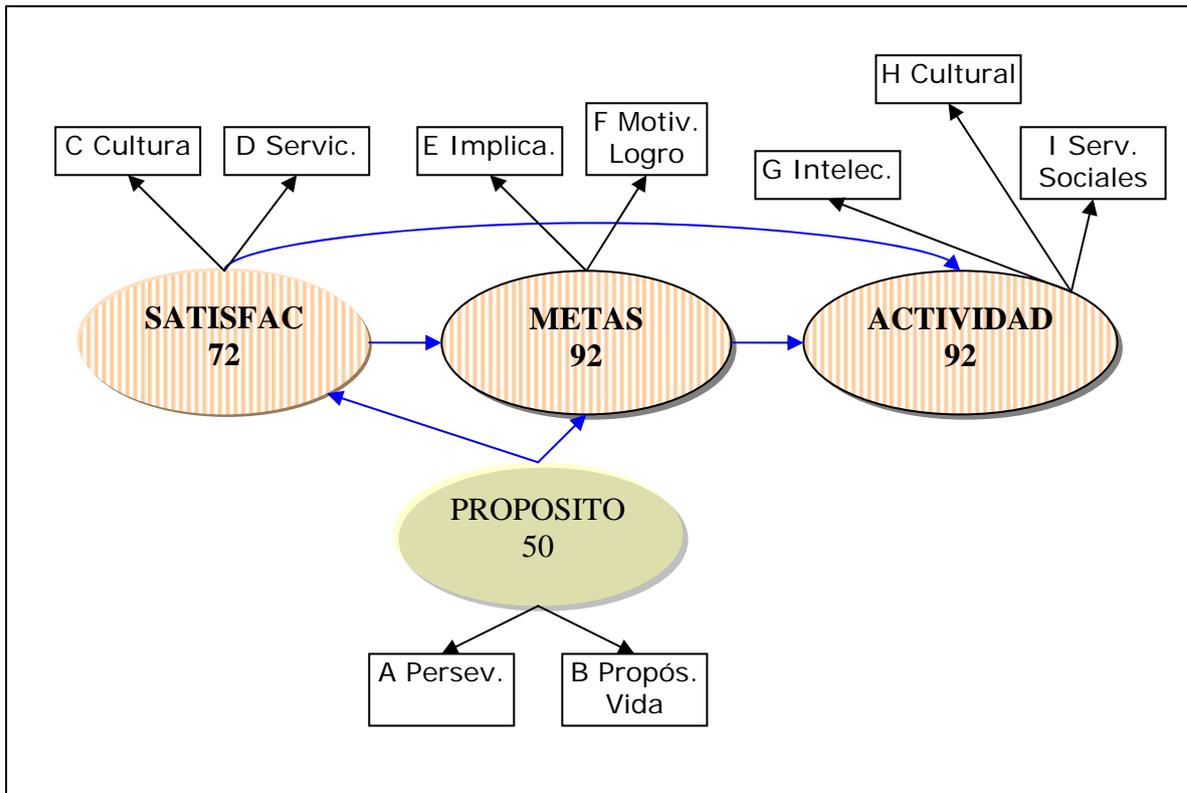
Purposiveness.—On the basis of item and factor analyses (Holahan & Sears, 1995), two 11-point items assessing perseverance and purpose in life in 1950 were combined to form a midlife assessment of purposiveness. The perseverance item was worded, "How persistent are you in the accomplishment of your ends?" The item was scaled from 1 (Very easily deterred by obstacles; give up in the face of even trivial difficulties) to 11 (I won't give up; I persevere in the face of every difficulty). The purpose in life item was worded, "Do you have a program with definite purposes in terms of which you apportion your time and energy?" The item was scaled from 1 (Drift entirely; no definite life plan; leave everything to chance) to 11 (My life is completely integrated toward a definite goal). The Cronbach's alpha for the two-item scale was .71.

Satisfaction with cultural and social service goals.—In 1972, when the participants were an average age of 60, they were asked about their goals for richness of cultural life and total service to society. Participants were asked to rate the importance of each of these goals in the plans they made for themselves in early adulthood. They were also asked how satisfied they were with their experience in each of these respects.

In the present study, satisfaction with cultural and social service was obtained by weighting the satisfaction with experience in each of these areas by their importance to the individual to provide a satisfaction score that reflected each individual's emphasis on each goal. The importance ratings were scaled from 1 (Less important to me than to most people) to 4 (Of prime importance to me; was prepared to sacrifice other things for this). The satisfaction ratings were scaled from 1 (Found little satisfaction in this area) to 5 (Had excellent fortune in this respect). In the present study, each satisfaction score was multiplied by its importance rating, and the two products were summed to form a satisfaction with cultural and service goals scale. Cronbach's alpha for the two-item scale was .38.

Perceived health.—The respondents were asked to indicate their general health since 1986 on a 5-point scale ranging from 1 (very poor) to 5 (very good). The respondents were also asked to indicate their level of energy and vitality on a 4-point scale ranging from 1 (Lack of energy very much limits my activities) to 4 (Vigorous, have considerable endurance). The energy and vitality scores were converted to a 5-point scale and averaged with the general health rating to form a composite measure of perceived health (Cronbach's $\alpha = .74$). Self-ratings of health have shown good construct validity in research with other samples (Idler & Kasl, 1991; LaRue, Bank, Jarvik, & Hetland, 1979).

El modelo causal postulado podría ser el siguiente:

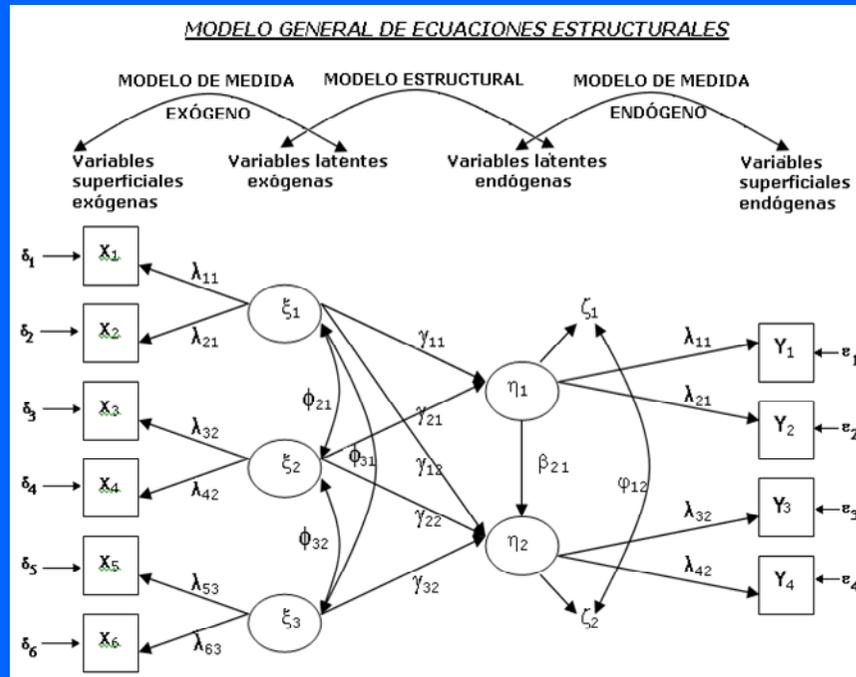


Partes destacables del modelo:

- **Elipses:** contienen las variables latentes
- **Rectángulos:** contienen las variables superficiales.
- **Flechas unidireccionales** desde las latentes a las superficiales indican una relación causal (los factores son causas posibles de las variables superficiales).
- λ_{ij} : Parámetro que cuantifica las relaciones
- ξ_1 : Factores exógenos en amarillo liso.
- η : Factores endógenos en naranja rallado.
- **Predictores** en la parte inferior. Var A-B.
- **Criterios** en la parte superior: Var C-I.

12.1.1. EL MODELO GENERAL DE ECUACIONES ESTRUCTURALES

Modelos de Análisis Causal



- Variables o factores:**
- Latentes (griego)
 - Endógenas (η)
 - Exógenas (ξ)
 - Superficiales (latino)
 - Explicadas por exógenas (X)
 - Explicadas por endógenas (Y)

Ecuaciones Estructurales
 Parámetros λ : relación latentes con sus respectivos superficiales

Modelo Medida Exógeno $X = \Lambda_X \xi + \delta$

Modelo Medida Endógeno $Y = \Lambda_Y \eta + \epsilon$

Modelo Estructural $\eta = \beta \eta + \Gamma \xi + \zeta$

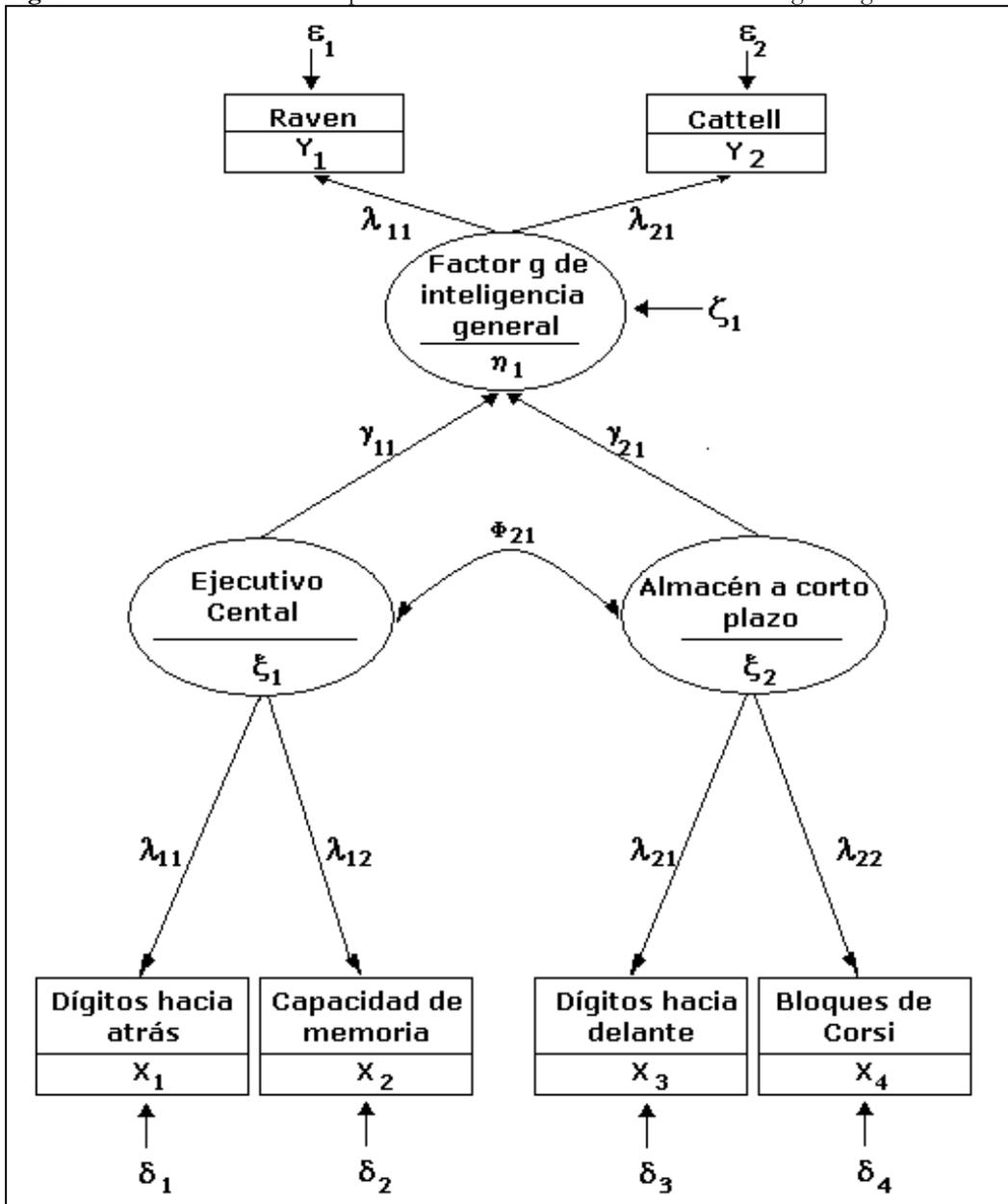
- Relaciones que definen el Modelo Estructural**
- Causales -tipo unidireccion.-
 - Exógeno \rightarrow Endógeno (γ)
 - Endógeno \rightarrow Endógeno (β)
 - Covariación -tipo bidireccion.-
 - No permitidas para endógenos entre sí.

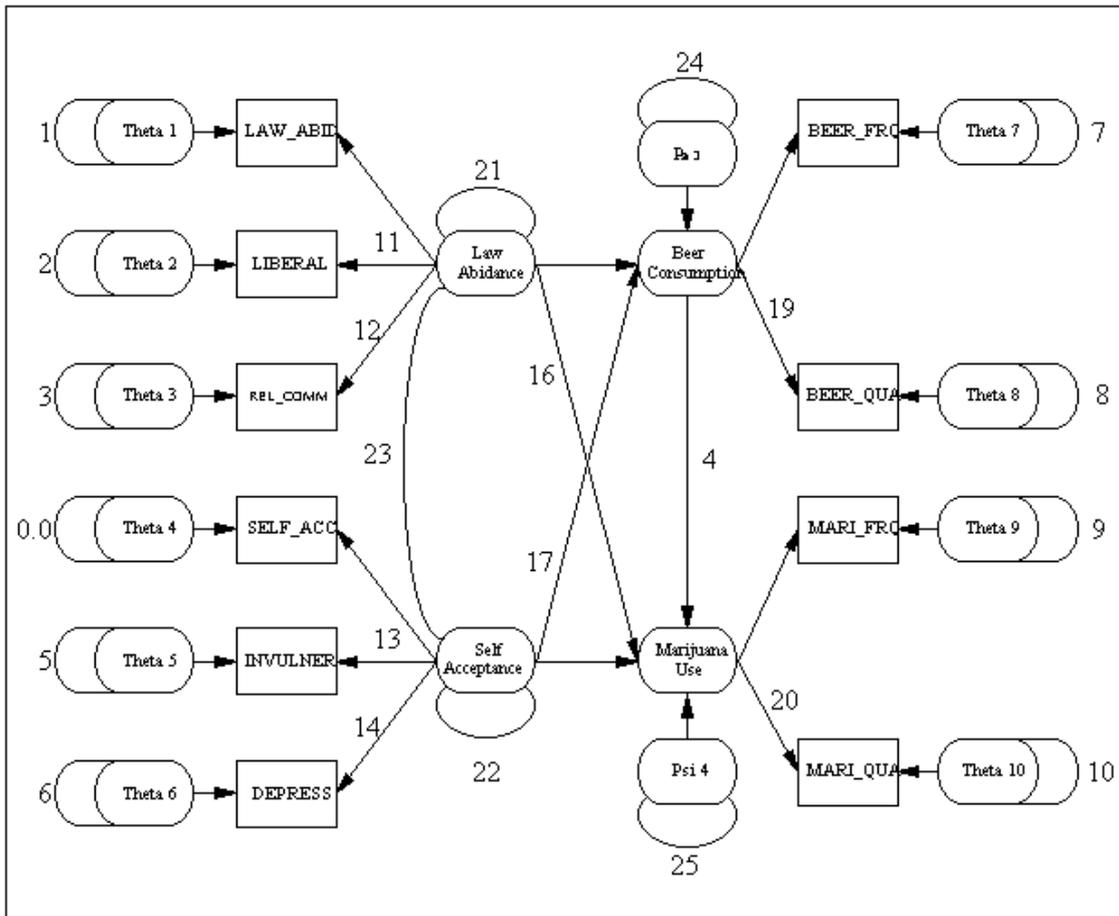
- Especificación Errores**
- Causales -tipo unidireccion.-
 - De predicción del factor endógeno (ζ)
 - Inter-endógenos (ϕ)
 - Entre Latentes y Superficiales
 - Err. Medida X (δ)
 - Err. Medida Y (ϵ)

Matrices:
 $\beta; \Gamma; \Lambda_X; \Lambda_Y$
 $\Phi; \Psi; \Theta_\delta; \Theta_\epsilon$

Otro ejemplo:

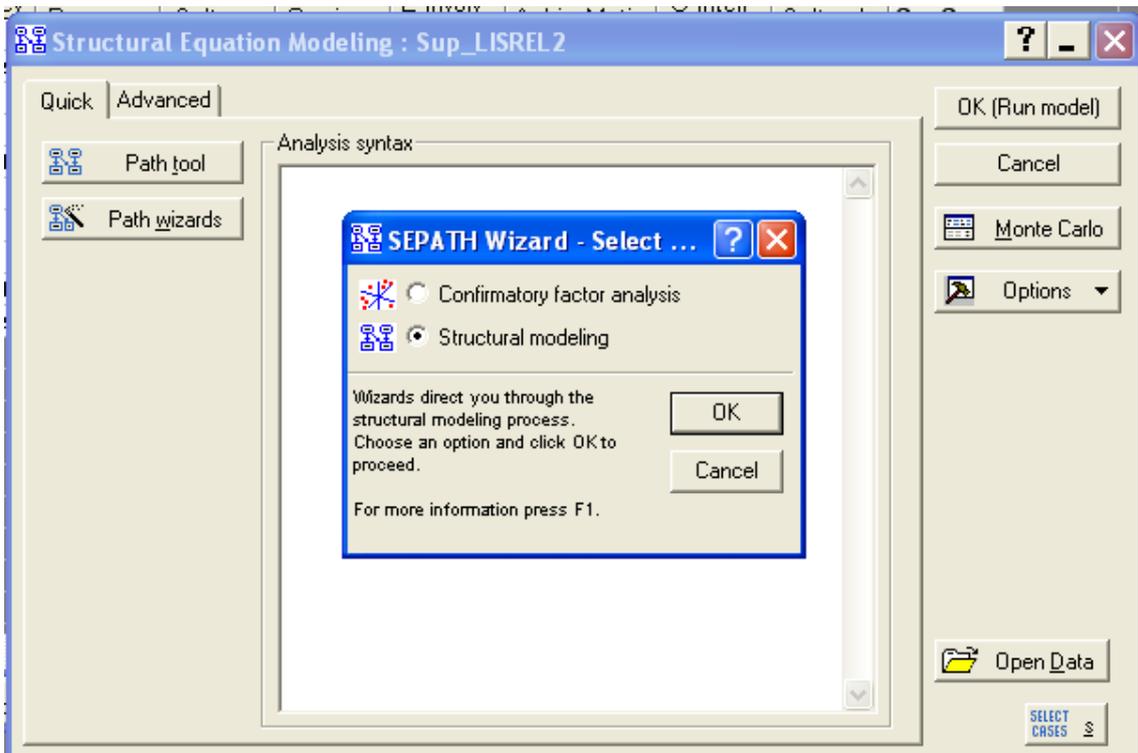
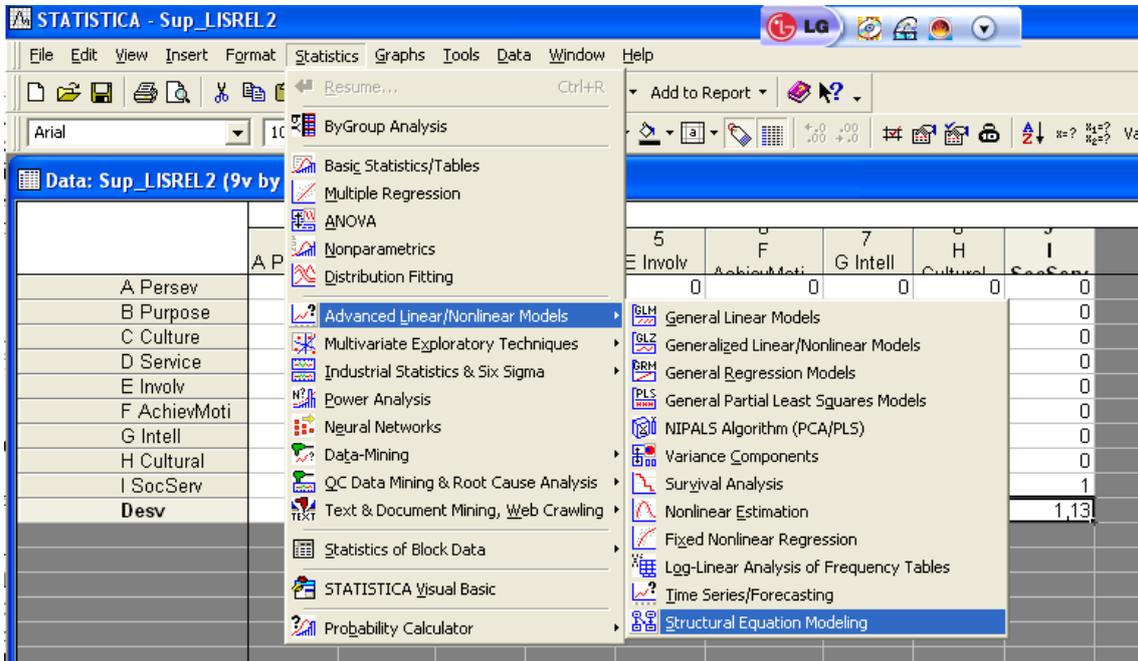
Figura 2. Modelo estructural completo de las relaciones entre memoria e inteligencia general.





Desarrollo del Ejemplo mediante STATISTICA:

Invocar al menú de análisis [Advanced Linear/Nonlinear Models → Structural Equation Modeling]



Definición de los Modelos de medida:

Structural Modeling Wizard - Exogenous Vari...

Exogenous variables: Manifest variables:

	Vars: none

Base name for residual variables:

Starting parameter number:

Factors:
 Correlated
 Uncorrelated

Residual Vars:
 Correlated
 Uncorrelated

1. Enter names of the exogenous latent variables.
2. For each latent variable, click Vars and select manifest variables.
3. Check if you wish correlated variables or residuals.

For more information press F1.

OK
Exit
Back

Structural Modeling Wizard - Endogenous Var...

Endogenous variables: Manifest variables:

	Vars: none

Base name for residual variables:

Base name for disturbances:

Residual Vars:
 Correlated
 Uncorrelated

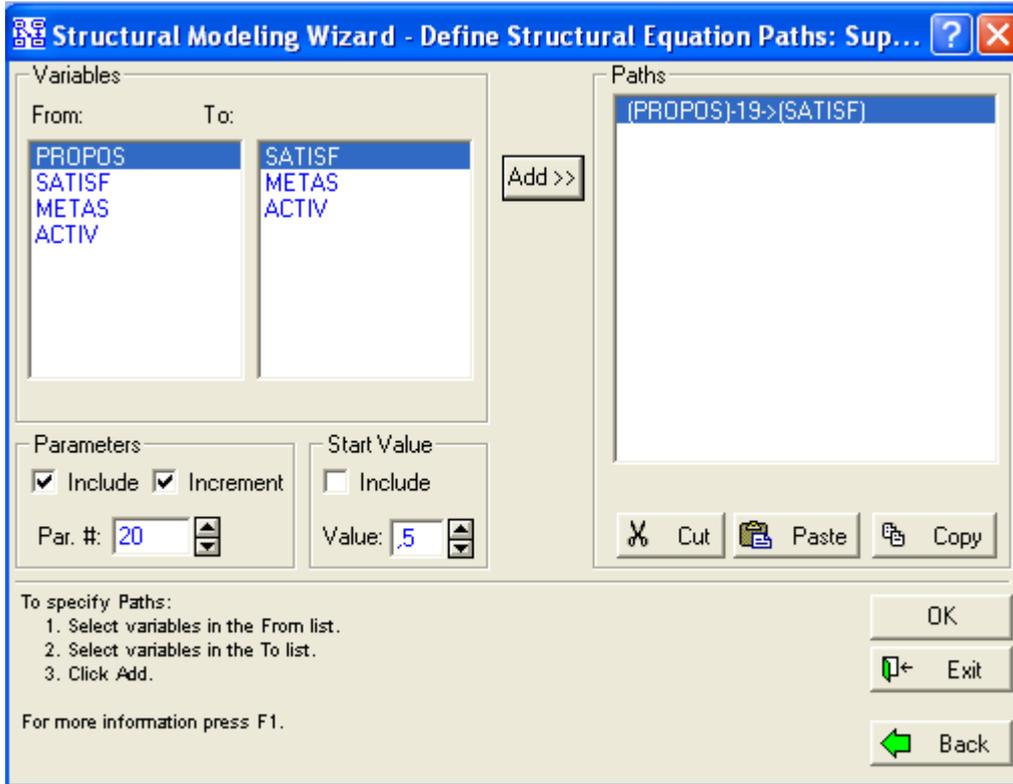
Disturbances:
 Correlated
 Uncorrelated

1. Enter names of the endogenous latent variables.
2. For each latent variable, click Vars and select manifest variables.
3. Check if you wish correlated disturbances or residuals.

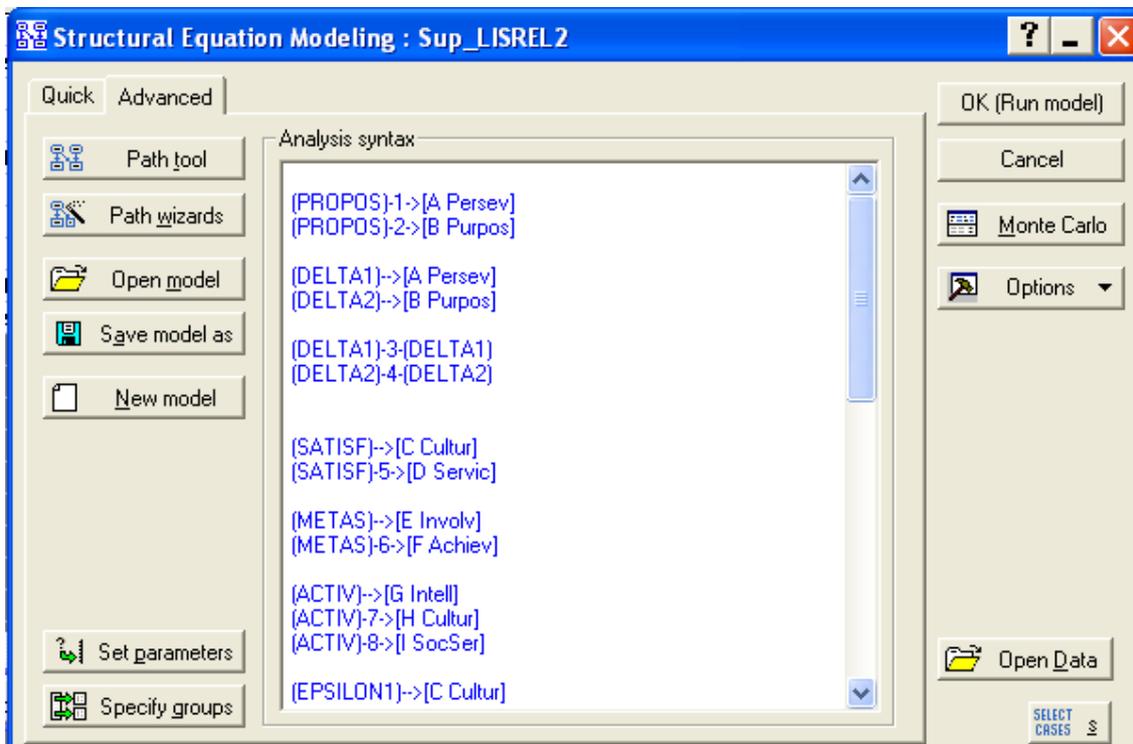
For more information press F1.

OK
Exit
Back

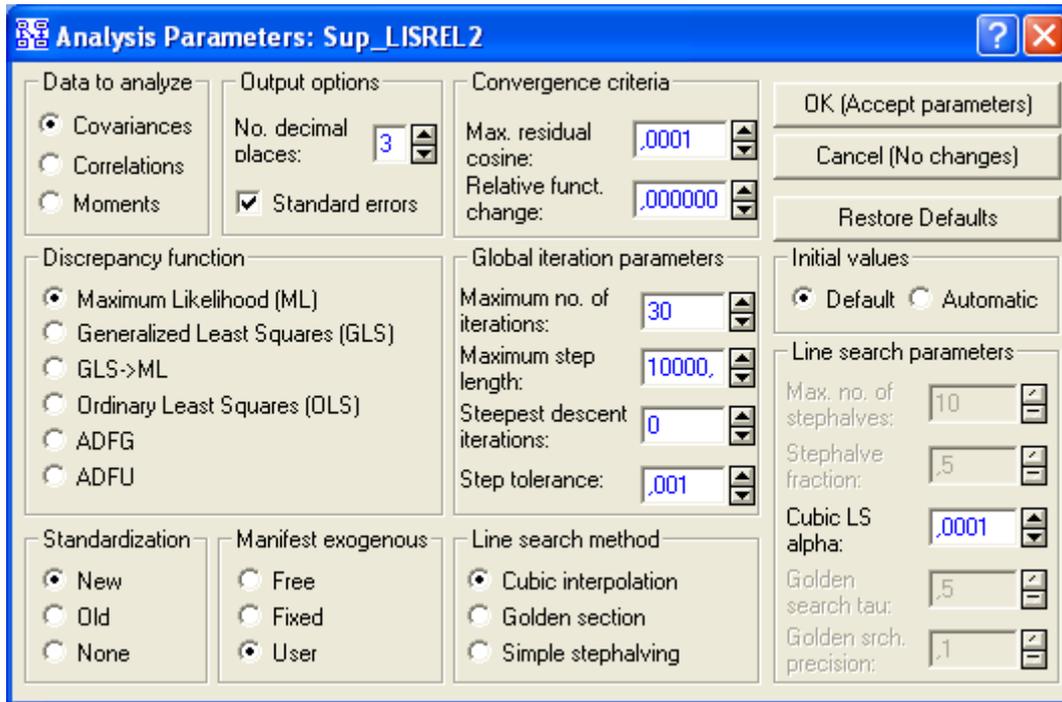
Definición del Modelo estructural:



Resultado final:



12.2. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS E IDENTIFICACIÓN MODELO



Mediante dos procedimientos que a veces son complementarios:

- Mínimos cuadrados. Minimizar S_{Ce} dada por diferencias entre la matriz de varianzas-covarianzas poblacional y la estimada por el modelo.
- Máxima verosimilitud. Método iterativo que va logrando en cada paso reducir la diferencia entre los dos tipos de matrices, hasta que la diferencia sea menor que un criterio preestablecido de convergencia.

Prerrequisitos estimación

1. La estimación sólo es posible cuando los parámetros no excedan al número de varianzas y covarianzas entre las variables superficiales (“p” exógenas más “q” endógenas).

$$gl \geq 0 \Rightarrow (\text{ecuaciones} - n^{\circ} \text{ param}) \geq 0 = \left(\frac{(p+q)(p+q+1)}{2} - n^{\circ} \text{ param} \right) \geq 0$$

2. Todos los factores (exógenos y endógenos) tienen que tener asignada una unidad de medida.
 - Que sea una variable estandarizada, $VAR = 1$.
 - Fijando uno de sus coeficientes estructurales asociados (λ o β) a uno, lo que hace que su escala sea igual a la de una de las variables superficiales (X o Y).

Tipo de parámetros.

- Mejor parámetros estandarizados respecto a las var. latentes, o mejor estandarizado completo con respecto a las var. latentes y también las superficiales, con el resultado en el intervalo $\{-1,1\}$.

12.3. AJUSTE DEL MODELO

Iteration Results: Sup_LISREL2

Itn #	Discrepancy	RCos	Lambda	MAXCON	NRP	NRC	NAIC	StepLen
* 23	2.592761	0.010244	1.000000	0.002576	0	0	0	1 0.005
* 24	2.590486	0.009756	1.000000	0.002345	0	0	0	1 0.004
* 25	2.588434	0.009254	1.000000	0.002099	0	0	0	1 0.004
* 26	2.586604	0.008736	1.000000	0.001904	0	0	0	1 0.004
* 27	2.584959	0.008222	1.000000	0.001708	0	0	0	1 0.004
* 28	2.583492	0.007949	1.000000	0.001548	0	0	0	1 0.003
* 29	2.582175	0.007701	1.000000	0.001391	0	0	0	1 0.003
* 30	2.580999	0.007427	1.000000	0.001261	0	0	0	1 0.003
*								

Iteration stopped. Number of iterations exceeds maximum.

Cancel OK

Structural Equation Modeling Results: Sup_LISREL2

Method of Estimation: ML	Chi-Square Statistic: 23,229
Discrepancy Function: 2,58	Degrees of Freedom: 25
Maximum Residual Cosine: 0,00743	Chi-Square p-level: 0,564194
Max. Abs. Gradient: 0,773	Steiger-Lind RMSEA
Max. Abs. Constraint: 0,00126	--->Point Estimate: 0
ICSF Criterion: 0,269	-->Lower 90% Bound: 0
ICS Criterion: 0,913	-->Upper 90% Bound: 0
Boundary Conditions: 1	RMS Stand. Residual: 2

Quick | Advanced | Assumptions | Residuals

Model summary | Basic summary statistics | Iteration history

Goodness-of-Fit Indices

- Noncentrality-based indices
- Other single sample indices
- Lagrange multiplier statistics

Summary | Cancel | Options

p-level for highlighting: **.05**

- Si las iteraciones tuvieron éxito.
- Method of Estimation.
 - Discrepancy Function Value. Valor al que se llega.
 - Maximum Residual Cosine. Aprox. 0.
 - Maximum Absolute Gradient. Máximo.
 - Maximum Absolute Constraint. Para evaluar las constricciones. Aprox. 0.
 - ICSF Criterion - constant scaling factor- & ICS Criterion - changes of scale-. Invarianzas bajo cambio de escalas. Aprox. 0. Difícil de conseguir.
 - Boundary Conditions. Nº constricciones de desigualdad operativas. Aprox. 0 y sino afecta al test Chi-square.

- Ajuste Modelo
- Chi-square Statistic, Degrees of Freedom and Chi-square p level.
 - Steiger-Lind RMSEA y RMS Standardized Residual - root mean square standardized **residual**-. Menor a 0,05.

	Single Sample Fit Indices
	Value
Joreskog GFI	0,770
Joreskog AGFI	0,587
Akaike Information Criterion	7,025
Schwarz's Bayesian Criterion	7,698
Browne-Cudeck Cross Validation Index	-37,419
Independence Model Chi-Square	77,789
Independence Model df	36,000
Bentler-Bonett Normed Fit Index	0,701
Bentler-Bonett Non-Normed Fit Index	0,977
Bentler Comparative Fit Index	1,000
James-Mulaik-Brett Parsimonious Fit Index	0,487
Bollen's Rho	0,570
Bollen's Delta	0,987

Bondad Ajuste Muestrales

- Population Gamma Index & Adjusted Population Gamma Index. Extension de GFI y AGFI.
- AIC. Elegir el modelo de entre una familia de modelos anidados con el valor más bajo.
- Schwarz's Bayesian Criterion. Como AIC.
- Browne-Cudeck Cross Validation Index. Estudios validación cruzada 2 submuestras. Valores bajos.
- Independence Model Chi-square. Supuesto Independencia. Interpretac. Clásica del n.s.
- Bentler-Bonett (1980). Bondad Ajuste que no penaliza parsimonia (Normed), sí penaliza (Non-Normed), y extensión. Valores altos.
- James-Mulaik-Brett. Extensión del anterior que compensa por parsimonia.
- Bollen's. Como anterior.

Tipos de Efectos

- Directos. De una variable sobre otra que está conectada de forma inmediata con ella, dados por los coeficientes \mathbf{B} , \mathbf{F} , y $\mathbf{\Lambda}_x$ y $\mathbf{\Lambda}_y$.
- Indirectos. Mediados por terceras variables. La var. η_2 tiene un efecto indirecto de ξ_1 a través de η_1 . Multiplicando los parámetros implicados.
- Totales. La suma de los efectos directos e indirectos.

$$\text{Ejemplo para } \eta_2 : \underbrace{\gamma_{11}\beta_{21}}_{I:\xi_1 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2} + \underbrace{\gamma_{21}\beta_{21}}_{I:\xi_2 \rightarrow \eta_1 \rightarrow \eta_2} + \underbrace{\gamma_{12}}_{D:\xi_1 \rightarrow \eta_2} + \underbrace{\gamma_{22}}_{D:\xi_2 \rightarrow \eta_2} + \underbrace{\gamma_{32}}_{D:\xi_3 \rightarrow \eta_2}$$

Ajustes de plausibilidad:

- Descartar modelos con valores en los parámetros superiores a uno, con varianzas negativas o con varianzas error mayores que la unidad; pues son imposibles.

Ajuste estadístico:

- Es la capacidad de predecir la matriz de varianzas-covarianzas var. superficiales.
- Combinar varias pruebas:
- **Test de bondad Chi-cuadrado. $\Sigma = \Sigma(\hat{\delta})$.** Si es significativa, entonces cabe concluir con un ajuste inadecuado. Problema con muestras pequeñas.
- Medidas heurísticas basadas en la matriz residual (la diferencia entre la matriz predicha y la observada).
 - **Índice de bondad de ajuste (GFI). Semejante a RPE.** Entre 0-1. Criterio de ajuste $GFI \geq 0,90$.
 - **Índice ajustado de bondad de ajuste (AGFI).** Semejante a RPE Ajustado. Tiene además en cuenta los ggl modelo y n° var. superficiales. Criterio de ajuste $AGFI \geq 0,80$.
 - **Raíz de la media de cuadrados residual (RMSR).** Sumando los cuadrados de las diferencias entre las varianzas-covarianzas observadas-predichas. Buen ajuste implica valores bajos del mismo. No tienen límite superior.
 - **No centralidad modificada de McDonald (MDN).** Se corrige chi-cuadrado teniendo en cuenta ggl y N. Entre 0-1. Criterio de ajuste $MDN \geq 0,90$.
 - **No centralidad modificada de Tucker-Lewis (TLI).** Como anterior pero no incluye los ggl de ninguno de los modelos en la ecuación de cálculo. Entre 0-1. Criterio de ajuste $TLI \geq 0,90$.

- A través de los parámetros del modelo.
 - Mejor estandarización completa.
 - Neta de cada parámetro mediante prueba tipo t-student.
 - Si las var. superficiales son buenos indicadores de los factores supuestos.

- Determinar el grado de comunalidad de cada variable con respecto al factor (R^2). Criterio: *COMUNALIDAD* $\geq 0,50$.

- Neto: Calcular el coeficiente de determinación total:

$$CDT = 1 - \frac{|\Theta_{\delta}|}{|S|}$$

$1 - \frac{\text{Determinante de la Matriz VAR-COVAR error de las superficiales}}{\text{Determinante de la Matriz VAR-COVAR observada}}$

Criterio: *CDT* $\geq 0,80$.

- **Mejor estrategia de ajuste condicional comparando modelos.**
Perspectiva Modelización comparando Modelos anidados (unos contenidos en otros).

12.4. REESPECIFICACIÓN DEL MODELO.

LaGrange Multiplier Statistics (Sup_LISREL2)			
	Variance	LaGrange Multiplier	Standard Error
SATISF	1,000	0,440	-0,000
METAS	1,000	-0,372	-0,000
ACTIV	1,001	-0,201	-0,001

Estrategias iterativas para mejorar el ajuste del modelo.

- **Rechazar el modelo.**
- **Comprobar un modelo alternativo.** La estrategia de tipo condicional lleva a comparar modelos alternativos, para lo cual pueden ser de utilidad los índices de informatividad como el criterio de información de **Akaike –AIC-** o el criterio de información consistente de Akaike –CAIC- (ver análisis categórico).
- **Modificar el modelo.** Partiendo de la información adquirida con el modelo contrastado, básicamente por los estadísticos de ajuste y los residuos (la diferencia entre la matriz predicha y la observada). Las modificaciones posibles son:
 - Tener presentes las consideraciones teóricas que pueden haber llevado a errores externos, como omitir var. importantes.
 - Por errores internos, inherentes al propio proceso estadístico. Reducir el número de parámetros fijos (iguales a cero) mediante el incremento de parámetros libres (estimados a partir de los datos).
 - Una primera impresión vendrá dada por χ^2 de ajuste.
 - Si es muy bajo, entonces indica que algunos se pueden liberar.
 - Si es muy alto, entonces indica que algunos se pueden fijar.
 - Para esto se usa los índices **multiplicadores de Lagrange**
 - Índice de Modificación (**MI**). El cambio que se produciría en la χ^2 de ajuste si el parámetro pasa de fijo a libre.
 - Cambio esperado del parámetro (**EPC**). Estimación del valor del parámetro que cambió de fijo a libre.
 - Criterios: que tengan alto MI y alto EPC deben ser liberados, admitiéndose entonces una nueva relación entre variables en el modelo.
 - Riesgos inherentes. Modelos ajustados sin relevancia teórica y que en general carezcan de validez. Para subsanarlo, realizar una validación cruzada de un estudio con otro diferente o de dos submuestras divididas aleatoriamente en el mismo estudio. Obtener el **índice de validación cruzada (CVI)**: entre la matriz VAR-COVAR observada en la muestra de validación, con la predicha por el modelo en la muestra de calibración.

12.5. LIMITACIONES Y SUPUESTOS

- NORMALIDAD MULTIVARIADA
 - Alternativa: índice de Bentler-Satorra basado en chi-cuadrado.
- LINEALIDAD
 - Alternativa: Realizar transformaciones exponenciales o logarítmicas.
- AUSENCIA DE MULTICOLINEALIDAD Y SINGULARIDAD
- INDICADORES MÚLTIPLES
- MODELOS INFRAIDENTIFICADOS Y JUSTAMENTE IDENTIFICADOS
 - Un modelo justamente identificado es aquel que tiene tantos parámetros libres como varianzas-covarianzas tiene la matriz observada.
 - Un modelo es infraidentificado cuando tiene más parámetros libres que varianzas- covarianzas en la matriz observada pero el ajuste no puede ser evaluado. Ver alternativas en Catena, Ramos y Trujillo (2003).
- TAMAÑO DE LA MUESTRA
 - Superior a $N=200$, 8 veces más sujetos que variables, o 15 casos por variable superficial.

12.6. LA SECUENCIA DE INVESTIGACIÓN EN CFA Y SEM

→ Ver detalles en Catena, Ramos y Trujillo (2003).

12.7. CONCLUSIONES

Introduzca todos los detalles de estimación en la herramienta gráfica path-diagram:

