UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

DPTO. DE MATEMÁTICAS
(ÁREA DE ÁLGEBRA)

RELACIÓN DE PROBLEMAS Nº 3
RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

1. Demostrar que si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo, entonces:
$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a, \ \forall a, b \in L$$
es un orden en L. Además se tiene:
    a) $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b, \ \forall a, b \in L$.
    b) Respecto al orden anterior $\sup\{a, b\} = a \vee b$ e $\inf\{a, b\} = a \wedge b, \ \forall a, b \in L$.

2. Sean A y B dos conjuntos totalmente ordenados. Consideremos en $A \times B$ la relación binaria:
$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \text{ en } A \text{ y } b_1 \leq b_2 \text{ en } B.$$
Demostrar que $A \times B$ es un retículo.

3. Sea $f: L \longrightarrow L'$ un morfismo de retículos, entonces f conserva el orden, es decir, si $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. En general el reciproco no es cierto. Sin embargo se tiene que si f es biyectiva y f y f^{-1} conservan el orden, entonces f y f^{-1} son morfismos de retículos.

4. Demostrar que en un retículo $(L, \wedge, \vee)$ equivalen:
    a) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \ \forall a, b, c \in L$.
    b) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \ \forall a, b, c \in L$.

5. Sea L un retículo distributivo con 0 y 1. Demostrar que los elementos que tienen complemento forman un subretículo.

6. En $I = [0, 1]$ conjunto de los números reales $0 \leq x \leq 1$ y para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ y $\overline{a} = 1 - a$. ¿Es I respecto de estas operaciones un álgebra de Boole?. Razonar la respuesta.

7. En un álgebra de Boole se define la siguiente operación
$$a\,\theta\, b = (a \wedge \overline{b}) \vee (b \wedge \overline{a})$$
Demostrar que $(a \vee c)\,\theta\,(b \vee c) = (a\,\theta\, b) \wedge \overline{c}$.

8. Se considera el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y en él, la relación binaria
$$R = \{(d, d), (d, c), (d, b), (d, a), (c, c), (c, b), (c, a), (b, b), (b, a), (a, a)\}$$
¿Es A un retículo? En caso afirmativo, ¿cuáles son sus operaciones $\vee$ e $\wedge$?¿Es A con las operaciones anteriores un álgebra de Boole?

9. Sea D el conjunto de los números que son divisores positivos de 70. En D se considera la relación de orden dada por:
$$a \leq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b$$

¿Tiene (D, ≤) estructura de retículo? ¿Es distributivo? ¿Es complementado? ¿Es un álgebra de Boole? En caso afirmativo, ¿quiénes son sus átomos?

10. Utilizar el teorema de estructura de las álgebras de Boole finitas y sus consecuencias para deducir la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:
    a) Existen 16 álgebras de Boole distintas con 30 elementos.
    b) El conjunto de los divisores positivos de 110 con la relación binaria siguiente a R b ⇔ a | b es una álgebra de Boole.
    c) El álgebra de Boole de los divisores positivos de 50 es isomorfa al álgebra de Boole $(\mathbb{B}_2)^2$.
    d) El conjunto de las partes del conjunto de los divisores primos positivos de 50 es un álgebra de Boole.
    e) El Álgebra de Boole de los divisores positivos de 20 y el Álgebra de Boole de los divisores positivos de 18 son isomorfas (ambas con la relación de orden: a≤b ⇔ a|b).
    f) El álgebra de Boole (P({a,b}),∩,∪) es un subretículo del álgebra de Boole (P({a,b,c}),∩,∪).
    g) El conjunto ordenado $\mathbb{Z}$ con la relación de orden habitual es un retículo.
    h) El conjunto ordenado $\mathbb{Z}$ con la relación de orden habitual es un Álgebra de Boole infinita.

11. Comprobar que la función booleana elemental de dos entradas XOR (⊕ u "o exclusivo") es asociativa. Sean $x_1, x_2,\dots, x_n$ variables booleanas, determinar el valor de $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ para las diferentes combinaciones de valores de $x_1, x_2,\dots, x_n$.

12. Calcular la tabla de verdad, la forma canónica en mintérminos y maxtérminos de las funciones booleanas:
    a) $f(x, y, z) = (x \vee (y \wedge \overline{z})) \wedge z$
    b) $g(x, y, z) = (x \wedge (\overline{y} \vee z)) \vee (((x \wedge y) \vee \overline{z}) \wedge x)$
    c) $h(x, y, z, t) = (x + t) \oplus (z \cdot y)$

13. Consideremos la funciones booleanas:

$$f(x, y, z) = (x \oplus y) \to (x \wedge y)$$
$$g(x, y, z) = \overline{x} + y.z$$

Calcular:
    a) Su expresión en mintérminos y en maxtérminos.
    b) Encontrar expresiones equivalentes en las que solo se usen los siguientes conjuntos de operaciones
        b.1) {∧, −}, b.2) {∨, −}, b.3) {0, →},
        b.4) { | }, b.5){↓}.
    c) El polinomio de Gegalkine.
    d) Dibujar el circuito que las representan.

14. Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede votar "SI" pulsando un boton. Diseñar una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y solo cuando haya una mayoría de votos "SI".

15. En una asamblea hay 3 miembros, realizar un circuito que tenga como entrada la votación realizada y por salida el número de votos afirmativos expresados en binario.

16.Mostrar una red lógica para la puerta XOR usando:

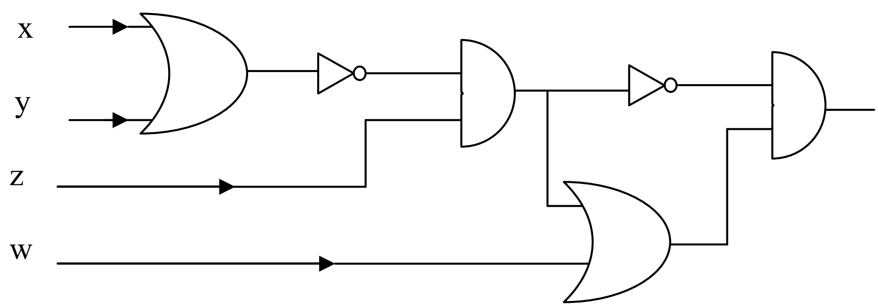
a) Dos puertas AND y una puerta OR.
b) Dos puertas OR y una puerta AND.

17.Consideremos el circuito f: $B_2^3 \longrightarrow B_2^2$ definido por:

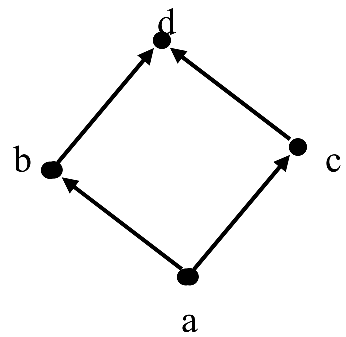
$$f(x, y, z) = ((x + \overline{y}).z, z + (x + \overline{y}))$$

Calcular su tabla de verdad y una síntesis usando el conjunto {NOT, AND, OR}.

18.Dar la expresión booleana que corresponda al circuito de la figura:



19.Sea L = {a, b, c, d} el retículo dado por el diagrama de orden:



Consideramos S el subconjunto del conjunto de partes de L cuyos elementos no son subretículos de L, es decir:

$$S = \{A \in P(L): A \text{ no es subretículo de } L\}.$$

En S definimos la relación de orden dada por la inclusión. Se pide:

a) Dibujar el diagrama de orden de S.
b) Calcular cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de S.
c) Si existen, calcular máximo y mínimo de S.
d) Si existen, calcular elementos maximales y minimales de S.

20. Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 1\}$, donde definimos la relación binaria:

$$a\ R\ b \Leftrightarrow b \equiv 0 \bmod a$$

¿Es A un retículo? En caso afirmativo, ¿cuáles son sus operaciones $\wedge$ y $\vee$? ¿Es A con las operaciones anteriores un álgebra de Boole?

21. Sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{x, z\}$.

a. Calcular $A \times B$ y comprobar que $X_1 = \mathcal{P}(A \times B)$, con la relación de orden dada por la inclusión, es un retículo y un álgebra de Boole.

b. Calcular $X_2 = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ y comprobar que, con la relación de orden dada por la inclusión, es un retículo y un álgebra de Boole.

c. ¿Son X_1 y X_2 retículos isomorfos?

22. Dados los retículos $(\mathbb{B}_2)^2$ y $\mathcal{P}(\{0\})$. Define una aplicación f: $(\mathbb{B}_2)^2 \longrightarrow \mathcal{P}(\{0\})$ que sea un morfismo de retículos, comprobándolo explícitamente. ¿Es f un isomorfismo?