RELACIÓN DE PROBLEMAS Nº 2
CONJUNTOS Y APLICACIONES

1. Sean X e Y conjuntos. Demostrar:
   a) $X = X \cup Y \Leftrightarrow Y \subseteq X$.
   b) $X = X \cap Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$.

2. Llamaré cardinalidad de un conjunto finito X al número de elementos de X. Para A, B subconjuntos de X, calcular la cardinalidad de $A \cup B$.

3. Se llama diferencia lógica de dos conjuntos $A, B \in P(X)$, al conjunto
$$A - B = \{x \in X : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$
   Demostrar:
   a) $A - B = A \cap B'$
   b) $(A - B)' = A' \cup B$
   c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
   d) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

4. Dados los conjuntos A, B, C, D, demostrar que se verifica:
   a) $A \times C = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ o $C = \emptyset$.
   b) $B \times D \subseteq A \times C \Leftrightarrow B \subseteq A$ y $D \subseteq C$.
   c) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
   d) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
   e) $card(A \times B) = card(A)\, card(B)$.

5. Sea $\emptyset$ el conjunto vacío y $\mathcal{P}(\emptyset)$ el conjunto de las partes del conjunto vacío. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a) $\text{card}(\{\emptyset\}) = \text{card}(\emptyset)$.
   b) $\mathcal{P}(\emptyset) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
   c) $\{\mathcal{P}(\emptyset)\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
   d) $\mathcal{P}(\emptyset) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

6. Se considera la correspondencia de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ definida por
$$G = \{(x, y) : 2x + y = 16\}$$
   Se pide:
   a) Calcular el grafo de forma explícita.
   b) Restringir dominio o codominio, si es necesario, para que G determine una aplicación.

7. Estudiar si las correspondencias de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dadas por los siguientes grafos, son aplicaciones. Reducir su dominio o codominio para que lo sean, y estudiar también estos para deducir la inyectividad y sobreyectividad de las mismas.

$$G = \{(x,y) : y = \cos(x)\}.$$
$$G = \{(x,y) : y = 1/(x-1)\}.$$

8. Dado el conjunto $G = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 16\}$. Se pide:

   (a) Estudiar si G es un grafo o una correspondencia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En caso contrario reducir G para que lo sea.
   (b) Estudiar si la correspondencia del apartado (a) es una aplicación. En otro caso, reducir dominio y/o codominio para que lo sea.
   (c) ¿Es la aplicación obtenida en el apartado (b) inyectiva? En caso contrario, reducir dominio y/o codominio para que lo sea.
   (d) ¿Es sobreyectiva?. Reducir dominio y/o codominio para que lo sea.

9. Sea $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, G)$ la correspondencia cuyo grafo es $G = \{(x, \ln x) / x > 0\}$. Razonar:
   a) ¿Es aplicación? En caso negativo, reducir dominio y codominio para que lo sea.
   b) ¿Es inyectiva? En caso negativo, reducir dominio y codominio para que lo sea.
   c) ¿Es sobreyectiva? En caso negativo, reducir dominio y codominio para que lo sea.

10. Consideremos las aplicaciones f,g,h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x + 2,\ g(x) = x/2,\ h(x) = x^2$$

    Comprobar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ y $h \circ g \neq g \circ h$.

11. Determinar una partición de $\mathbb{Z}$ con al menos 3 conjuntos y de manera que uno de ellos sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}$.

12. Definir partes de un conjunto X. ¿Cómo debe ser una familia de elementos de P(X) para ser una partición de X? Para $X = \mathbb{Z}_p$ encuentra una partición con al menos 5 elementos, sabiendo que $p \geq 7$.

13. Dadas dos aplicaciones f: A $\to$ B y g: B $\to$ C, si $h = g \circ f$ probar:
    a) Si h es inyectiva, entonces f es inyectiva.
    b) Si h es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.
    c) Si f y g son inyectivas, entonces h es inyectiva.
    d) Si f y g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva.

14. Sea f: X $\to$ Y una aplicación. Entonces
    a. f es inyectiva si y sólo si $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ para todo $A, B \subseteq X$.
    b. f es sobreyectiva si y sólo si $f_*(f^*(C)) = C$ para todo $C \subseteq Y$.

15. Dada una aplicación f: X $\to$ Y demostrar que f es inyectiva si y sólo si $f g = f h \Rightarrow g = h$ para cualesquiera aplicaciones g y h.

16. Dada la correspondencia f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = \frac{x+3}{1+2x}$. Estudiar dominio y codominio para que f sea aplicación y calcular la aplicación inversa de f donde sea posible.

17. Sea f: $\mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R}\text{: } x > 7\}$ definida por $f(x) = e^x + 7$. Estudiar la biyectividad de la aplicación y calcular f^{-1} para el dominio y codominio apropiados.

18. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $A_1 = \{a, b\}$ y $B_1 = \{2, 3\}$. Definir, si existe, una aplicación biyectiva f: $A \times \mathcal{P}(B_1) \to \mathcal{P}(A_1) \times B$ y hacer todas las comprobaciones explícitamente.

19. En el conjunto A = {1, 2, 3, 4} se establece la relación binaria

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Justificar que es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente.

20. Sea $\mathbb{R}^*$ el conjunto de los números reales no nulos sobre el que definimos la siguiente relación binaria

$$a \text{ R } b \quad \text{sii} \quad a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$$

Comprobar que R es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente.

21. En el cuerpo de los números racionales se define la siguiente relación binaria

$$x \text{ R } y \Leftrightarrow \text{Existe un número } h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = \frac{3y+h}{3}$$

   a. Probar que R es una relación de equivalencia.
   b. Determina el conjunto cociente.
   c. Razonar si los elementos 2/3 y 4/5 pertenecen a la misma clase.

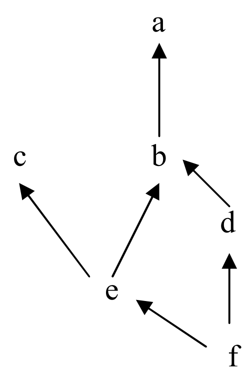
22. Dado el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, consideremos la relación binaria R:

$$x \text{ R } y \Leftrightarrow \frac{x-y}{5} \in \mathbb{Z}$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente $\mathbb{Z}$/R.

23. Sea X un conjunto ordenado. Estudiar la relación existente entre los maximales y los máximos de los subconjuntos de X.

24. Sea X = {a, b, c, d, e, f } junto con la ordenación dada por el siguiente diagrama:



Sea $Y = \{b, f, e\}$ y $Z = \{c, a, e, d\}$ subconjuntos de X. Se pide:

d. Cotas superiores e inferiores de Y y de Z. ¿Existen supremo e ínfimo?.
e. Máximos y mínimos de Y y Z.
f. Elementos maximales y minimales de X, Y y Z.

25. Se considera el conjunto de las partes de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$A = \mathrm{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$$

a) Dibujar el diagrama de orden del conjunto ordenado *B*, formado por todos los elementos de A con cardinal impar y con la relación de orden que se obtiene con la inclusión.
b) Determinar los máximos, mínimos, elementos maximales y minimales.
c) Determinar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de *B* en *A*.

26. Definimos en $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros la relación binaria

$$a \mathrel{R} b \text{ si y sólo si } a - b \text{ es par (o cero).}$$

Se pide:

i) Estudiar las propiedades que satisface dicha relación binaria. ¿Es una relación de orden? ¿es de equivalencia?

ii) Si es una relación de equivalencia calcular el conjunto cociente $\mathbb{Z}/R$ y probar que existe una aplicación biyectiva entre $\mathbb{Z}/R$ y $\mathbb{Z}_2$. Si por el contrario es una relación de orden, estudiar si es un orden total y si con este orden el conjunto $\mathbb{Z}$ está bien ordenado.

27. Consideramos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par}\}$. (Esto es, los $x \in \mathbb{Z}$ de la forma $x = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$).
b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es impar}\}$. (Esto es, los $x \in \mathbb{Z}$ de la forma $x = 2k + 1$, con $k \in \mathbb{Z}$).
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de } 4\}$. (Esto es, los $x \in \mathbb{Z}$ de la forma $x = 4k$, con $k \in \mathbb{Z}$).
d) $D = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
e) $E = \mathbb{C} - \mathbb{R}$. (Esto es, los complejos que no son reales).
f) $F = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. (Esto es, los reales que son irracionales).

Se pide:

i. Comprobar cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{C}$ son particiones de $\mathbb{C}$:
   a. $\{A, B, \mathbb{Q}, E, F\}$ b. $\{A, B, E, F\}$ c. $\{\mathbb{Q}, E, F\}$
ii. Definimos en el conjunto $\mathfrak{A} = \{A, B, C, D, E, F, \mathbb{Q}\}$ la siguiente relación binaria:
   $$X_1 \mathrel{R} X_2 \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2.$$
   Comprobar que es una relación de orden.
iii. Dibujar el diagrama de orden del conjunto $\mathfrak{A} = \{A, B, C, D, E, F, \mathbb{Q}\}$ con la relación de orden definida en ii).

iv. Determinar los máximos, mínimos, elementos maximales y minimales del conjunto $\mathfrak{A}$, con la relación de orden definida en ii).
v. Calcular cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo si existen del conjunto $\mathfrak{A}$ en $P(\mathbb{C})$ con la relación de orden dada por la inclusión.
   a) Sea

28. Sea $A = \{x, y, z\}$. Definimos en $\mathcal{P}(A)$ la relación binaria:

$$A_1 \, R \, A_2 \text{ si y sólo si } \mathrm{card}(A_1) = \mathrm{card}(A_2).$$

Se pide:

b) Estudiar las propiedades que satisface dicha relación binaria. ¿Es R una relación de orden y/o de equivalencia?
c) Si es posible, calcular el conjunto cociente $\mathcal{P}(A)/R$. ¿Define dicho conjunto una partición en $\mathcal{P}(A)$?

c) Elige un número natural positivo p y define una aplicación biyectiva entre $\mathcal{P}(A)/R$ y el conjunto $\{1, 2, \ldots, p\}$.

29. Sea A el conjunto de todas las letras del abecedario, sea A^n el producto cartesiano de A consigo mismo n-veces y sea $B = A \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4$. Esto es, B es el conjunto de todas las posibles combinaciones de 1, 2 3 y 4 letras del abecedario (palabras de a lo sumo 4 letras), por ejemplo:

‘pera’ la identificamos con: (**p**, **e**, **r**, **a**) y ‘xwa’ la identificamos con: (**x**, **w**, **a**)

Y entonces podemos entender que:

$$(p, e, r, a) \in A^4 \subseteq B \quad \text{y} \quad (x, w, a) \in A^3 \subseteq B.$$

Sea D, el conjunto de todas las palabras del Diccionario de la Real Academia Española (D.R.A.E.) vistas como n-uplas, esto es,

‘palabra’ la identificamos con el elemento, (**p**, **a**, **l**, **a**, **b**, **r**, **a**) $\in A^7 \subseteq D$.

Entonces $E_4 = B \cap D$ será el conjunto de todas las palabras del D.R.A.E. con 4 o menos letras. En A consideramos el orden habitual, esto es, $a<b<c<\ldots<z$. Y en E_4 definimos la siguiente relación binaria:

Sean $x=(x_1,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,\ldots,y_m)$ con $1\leq n,m\leq 4$ dos elementos cualesquiera de E_4,

$$xRy \iff \begin{cases} n\leq m \quad \text{y} \quad x_i = y_i \ \forall i\leq n \\ \qquad \text{O} \\ \exists k \leq \text{mín}(n,m) \text{ tal que } x_i = y_i \ \forall i < k \quad \text{y} \quad \text{además } x_k < y_k \text{ en A.} \end{cases}$$

a) Sabiendo que la relación binaria definida en E_4 es transitiva, demostrar que es una relación de orden.
b) Buscar, si existen, una cota inferior y otra superior de E_4 en B.

c) Calcular, si existen, minimales y mínimo de E_4.
d) ¿Es E_4 un conjunto totalmente ordenado?