# TEMA III: ÁLGEBRAS DE BOOLE. FUNCIONES BOOLEANAS



## OBJETIVOS GENERALES

1. Hacer que el alumno asimile la estructura algebraica de retículo y álgebra de Boole,
2. Reconocer la importancia del álgebra de Boole como unificación de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional,
3. Las funciones booleanas como ejemplo de álgebra de Boole finita.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Conocer las estructuras algebraicas de retículo y sus tipos.
- ✓ Conocer la relación entre retículo y conjunto ordenado y saber utilizarlo para demostrar que un conjunto es un retículo.
- ✓ Conocer las propiedades que satisface un álgebra de Boole.
- ✓ Saber detectar si una terna formada por un conjunto y dos operaciones internas es o no álgebra de Boole.
- ✓ Saber cuales son las álgebras de Boole finitas.
- ✓ Saber calcular los átomos de un álgebra de Boole.
- ✓ Conocer el álgebra de Boole de las funciones booleanas.



## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Saber calcular las formas canónicas de una función booleana.
- ✓ Conocer los conjuntos funcionalmente completos y saber obtener una síntesis para cualquier función booleana.
- ✓ Conocer el concepto de circuito booleano.

## BIBLIOGRAFÍA


- **“Matemática discreta para la computación”. M.A. García-Muñoz. Servicio de Publ. Univ. Jaén. 2010.**
- “Matemática discreta y combinatoria”. R. P. Grimaldi. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- “Matemática discreta”, F. García Merayo. Paraninfo, 2001.
- “Estructuras de Matemática discreta para la computación”, B. Kolman y otros. Prentice Hall, 1997.
- “Problemas resueltos de Matemática discreta”, F. García Merayo y otros. Paraninfo, 2003.
- “Álgebra abstracta aplicada”. A. Vera López y otros autores. 1992.
- “2000 problemas resueltos de Matemática Discreta”. S. Lipschutz y M. Lipson. 2004




## DESARROLLO TEÓRICO

III.1 Introducción.
III.2 Retículos. Álgebras de Boole.
III.3 Funciones Boolenas.
III.4 Aplicaciones: circuitos lógicos.

# 1. INTRODUCCIÓN



A veces la importancia de un acontecimiento histórico no se mide por su difusión sino por las consecuencias que conlleva. Esto es lo que ocurrió en Lógica con el Álgebra de Boole. Su fundador fue George Boole y dicha Álgebra sólo trata con ceros y unos.

Aunque parece de poco interés, sin embargo reflexionando un poco, es fácil darse cuenta que muchas situaciones sólo admiten dos estados y no solo en el ámbito de la lógica (verdadero/falso), y de la matemática (pertenece/no pertenece), sino también en el mundo que nos rodea (encendido/apagado) como en el funcionamiento de un interruptor, el funcionamiento de un sistema informático,....

Su logro fundamental en 1854 fue introducir una estructura algebraica, el álgebra de Boole (“An investigation of the laws of thought”). Fue definida para un conjunto de elementos junto con dos operaciones que satisfacen ciertas propiedades, y con ella logró unificar la teoría de conjuntos y el calculo proposicional, ya que ambos teoría se rigen por dicha estructura algebraica.

Usualmente, cualquier hallazgo en Lógica pasa inadvertido. De hecho, para muchos filósofos las matemáticas, la lógica y, en general, las ciencias formales están fuera del saber científico al no ser ciencias empíricas. Antes de finales de la década de los años 30 del siglo pasado, el álgebra de Boole no parecía tener muchas aplicaciones. En 1938, Claude E. Shannon, mientras trabajaba en el Massachusetts Institute of Technology, usó el álgebra de Boole para analizar los circuitos eléctricos, lo que abrió al mundo de las aplicaciones del álgebra de Boole. Desde entonces, el álgebra de Boole ha jugado un papel central en el diseño, análisis y simplificación de los dispositivos electrónicos, incluidos los ordenadores.



Sin embargo, si observamos la huella que ha dejado la obra de Boole nos damos cuenta de la repercusión posterior de ésta. Basta tener en cuenta que los computadores trabajan con información binaria, luego la herramienta matemática adecuada para su análisis y para el diseño de su funcionamiento es el álgebra de Boole.

# 2. RETÍCULOS. ÁLGEBRAS DE BOOLE



Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una **ley de composición interna en X** u **operación interna** en X es una aplicación de $X \times X$ en X, es decir,

$$* : X \times X \longrightarrow X.$$
$$(a, b) \longmapsto c = *(a, b) = a * b.$$

Un **retículo** es una terna $(L, \vee, \wedge)$ (también denotado por $(L,+, .)$) donde $L \neq \emptyset$ es un conjunto y $\vee, \wedge$ son dos operaciones internas en L verificando las propiedades:

1. Asociativas, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,
   $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \forall a, b, c \in L.$
2. Conmutativas, $a \vee b = b \vee a$,
   $a \wedge b = b \wedge a, \forall a, b \in L.$
3. Idempotencia, $a \vee a = a, a \wedge a = a \ \forall a \in L.$
4. Absorción, $a \vee (a \wedge b) = a$,
   $a \wedge (a \vee b) = a, \forall a, b \in L.$

*Ejercicio 1*: Comprobar que ($\mathbb{B}_2$ ={0, 1}, ∨, ∧) es un retículo donde

| ∨ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 1 |

| ∧ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 |

<u>Ejemplos</u>

- Dado X un conjunto, (P (X), ∪, ∩) es un retículo.
- Dado (X, ≤) conjunto ordenado no vacío tal que ∀x, y ∈ X, existe supremo{x, y} e ínfimo{x, y}, entonces (X, supremo{x, y}, ínfimo{x, y}) es un retículo (Demostración ejercicio 3.4).

***Proposición 3.1.*** Si (L, ∨, ∧) es un retículo, entonces la relación binaria definida por

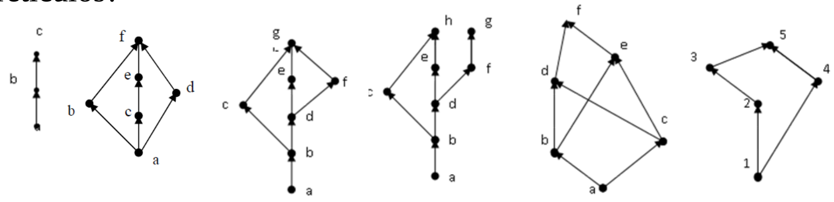
$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \text{ (o equivalentemente, } a \vee b = b)$$

es una relación de orden en L. Además supremo{a, b} = a ∨ b e ínfimo{a, b} = a ∧ b, ∀a, b ∈ L (Demostración ejercicio 3.7).

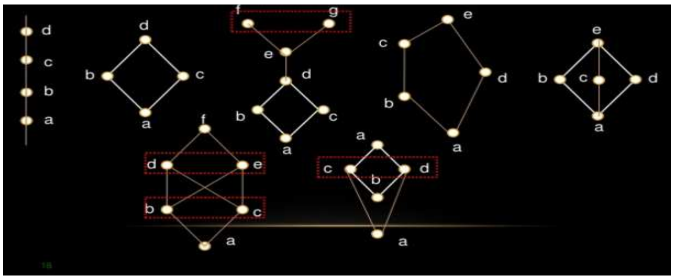


Después de la proposición 3.1, podemos definir **retículo** como un conjunto ordenado (L, ≤) en el cual cada subconjunto de dos elementos {x, y} tiene un supremo y un ínfimo. Usualmente, denotaremos:
sup{x, y} mediante x ∨ y (la unión de x e y) e inf{x, y} mediante x ∧ y (la intersección de x e y).

Ejemplo: ¿Cuáles de estos diagramas de Hasse representan retículos?

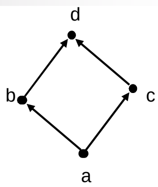


Después de la proposición 3.1, podemos definir **retículo** como un conjunto ordenado $(L, \leq)$ en el cual cada subconjunto de dos elementos $\{x, y\}$ tiene un supremo y un ínfimo. Usualmente, denotaremos:
$\sup\{x, y\}$ mediante $x \vee y$ (la unión de x e y) e $\inf\{x, y\}$ mediante $x \wedge y$ (la intersección de x e y).





*Ejercicio 2*: Dado el conjunto ordenado $X = \{a, b, c, d\}$. Obtener las operaciones binarias $\vee$ y $\wedge$ tales que $(X, \vee, \wedge)$ es un retículo.




Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y $\emptyset \neq S \subseteq L$, diremos que S es un **subretículo de L** si S es cerrado para las dos operaciones, es decir:

$$\forall a, b \in S, \quad a \vee b \in S \quad y \quad a \wedge b \in S.$$

*Ejercicio 3*: ¿Es $S = \{a, b, c\}$ un subretículo del retículo anterior $(X, \vee, \wedge)$? ¿Y $T = \{a, d\}$?.

Sean $(L_1, \vee_1, \wedge_1)$ y $(L_2, \vee_2, \wedge_2)$ retículos. Una aplicación $f: L_1 \longrightarrow L_2$ se llama **morfismo de retículos** si satisface:

$$f(a \vee_1 b) = f(a) \vee_2 f(b) \quad y \quad f(a \wedge_1 b) = f(a) \wedge_2 f(b), \forall a, b \in L_1.$$

Si además f es biyectiva diremos que f es un **isomorfismo de retículos**.

Diremos que un retículo $(L, \vee, \wedge)$ es **distributivo** si satisface las propiedades distributivas, es decir,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \forall a, b, c \in L.$$

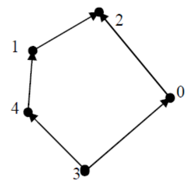
Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ se dice que es un **retículo con $\mathbb{1}$** si posee elemento maximal, a tal elemento maximal se le llama **elemento $\mathbb{1}$**.

Análogamente, se dice que es un **retículo con $\emptyset$** si posee elemento minimal, a tal elemento minimal se le llama **elemento $\emptyset$.**

Nótese que el elemento $\mathbb{1}$ actúa como neutro para la operación $\wedge$ y que el elemento $\emptyset$ actúa como neutro para la operación $\vee$:
$x \wedge \mathbb{1} = x$ y $x \vee \emptyset = x, \forall x \in L$ **(leyes de la identidad)**.



*Ejercicio 4*: ¿Es distributivo el retículo dado por el conjunto ordenado $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ con la relación de orden definida por el diagrama de Hasse de la izquierda? ¿Contiene elemento cero y elemento uno?




Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo con elemento $\emptyset$ y $\mathbb{1}$. Si $a \in L$, entonces un elemento $\overline{a} \in L$ se llama **complemento de a** si verifica:

$$a \wedge \overline{a} = \emptyset \quad y \quad a \vee \overline{a} = \mathbb{1}$$ **(leyes del complemento)**.

Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ con elemento $\emptyset$ y $\mathbb{1}$ se dice **complementado** si todo elemento de L tiene complemento, es decir, $\forall a \in L, \exists\, \overline{a} \in L$.

*Ejercicio 5*: ¿Son los retículos del ejercicio 2 y 4 complementados? Obtén los complementos de sus elementos.

***Proposición 3.2.*** Si (L, $\vee$, $\wedge$) es un retículo distributivo y complementado, entonces:

i) El complemento de cada elemento es único.

ii) $\overline{\overline{a}} = a, \forall a \in L$.

iii) Leyes de Morgan, $\forall a, b \in L$:

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b} \qquad \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$$

iv) $\overline{\mathbb{0}} = \mathbb{1}$ y $\overline{\mathbb{1}} = \mathbb{0}$.

v) $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge \overline{b} = \mathbb{0} \Leftrightarrow \overline{a} \vee b = \mathbb{1}$.

Un **álgebra de Boole** es un retículo con elemento $\mathbb{0}$ y $\mathbb{1}$, complementario y distributivo.



Resumiendo, un álgebra de Boole viene dada por:

- Un conjunto L no vacío que contiene dos elementos distintos, $\mathbb{0}$ y $\mathbb{1}$,
- Dos operaciones binarias $\vee$ e $\wedge$: $L \times L \longrightarrow L$, y
- Una operación unitaria "el complemento":

$$\overline{\phantom{a}} : L \longrightarrow L$$

satisfaciendo las propiedades asociativas, conmutativas, distributivas, las leyes de la identidad y las leyes del complemento.

*Ejercicio 6*: ¿Es $\mathbb{B}_2$ un algebra de Boole? ¿Y los retículos de los ejercicios 2 y 4?

*Ejercicio 7*: Sea D(12) el conjunto de los divisores positivos de 12 con la relación de orden dada por:

a R b si y sólo si a es un divisor de b (a divide a b)

¿Es D(12) un retículo? ¿Es D(12) un álgebra de Boole?

Ejemplos

• Sea P el conjunto de todas las formas enunciativas con n variables. Definimos en P la relación binaria

$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ si y solo si $\mathcal{A}$ **es lógicamente equivalente a** $\mathcal{B}$

entonces ~ es una relación de equivalencia y (P/~, $\vee$, $\wedge$) es un álgebra de Boole.
• Dado X un conjunto, ($\mathcal{P}$(X), $\cup$, $\cap$) es un álgebra de Boole.
• ($\mathbb{B}_2^n = \mathbb{B}_2 \times \mathbb{B}_2 \times ... \times \mathbb{B}_2$, $\vee$, $\wedge$) es un álgebra de Boole donde:

$$\mathbb{B}_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in \mathbb{B}_2\}$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i, 1 \leq i \leq n.$$
$$\mathbb{0} = (0, 0, \ldots, 0)$$
$$\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)$$



*Ejercicio 8*: Obtener el diagrama de Hasse de las álgebras de Boole $\mathbb{B}_2^2$ y $\mathbb{B}_2^3$.

Sea (L, $\vee$, $\wedge$) un algebra de Boole y $\varnothing \neq S \subseteq L$, diremos que S es un **subálgebra de L** si S es un subretículo de L, con elemento $\mathbb{0}$ y $\mathbb{1}$ y es cerrado para los complementos.

Sean ($L_1$, $\vee_1$, $\wedge_1$) y ($L_2$, $\vee_2$, $\wedge_2$) álgebras de Boole. Una aplicación f: $L_1 \longrightarrow L_2$ es un **morfismo de álgebras de Boole** si es un morfismo de retículos que conserva los elementos cero, uno y los complementos.

$$f(\mathbb{0}_1) = \mathbb{0}_2, \quad f(\mathbb{1}_1) = \mathbb{1}_2 \quad \text{y} \quad f(\overline{x}) = \overline{f(x)}.$$

Si además f es biyectiva diremos que f es un **isomorfismo de álgebras de Boole**.

***Proposición 3.3.*** Dado $X = \{x_1, x_2,...,x_n\}$ un conjunto con n elementos entonces f: $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{B}_2{}^n$ tal que $\forall A \subseteq X$,

$$f(A) = (a_1, a_2,...,a_n)$$

donde $a_i = 1$ si $x_i \in A$ y $a_i = 0$ si $x_i \notin A$, es un isomorfismo de álgebras de Boole. (Demostración ejercicio 3.32).

**Observación importante:** Se habrá observado que casi todas las leyes de los retículos y las álgebras de Boole vienen siempre en pareja. Esto no sucede por azar. Su justificación es la siguiente:

Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado, $(X, \leq^{-1})$ es también un conjunto ordenado, y si $(X, \leq)$ es un retículo, también lo es $(X, \leq^{-1})$. Podemos observar que estos dos retículos ordenados y las operaciones definidas en ambos se parecen mucho. En concreto la operación $\vee$ de $(X, \leq)$ es la operación $\wedge$ de $(X, \leq^{-1})$ y la operación $\wedge$ de $(X, \leq)$ es la operación $\vee$ de $(X, \leq^{-1})$. Por tanto, se tiene:



***Teorema 3.4. (Principio de dualidad)*** Toda propiedad en el álgebra de Boole $(L, \vee, \wedge)$ tiene una dual obtenida a partir de la primera intercambiando entre si las operaciones $\vee$ y $\wedge$ y los elementos $\mathbb{0}$ y $\mathbb{1}$.

Vamos ahora a caracterizar todas las álgebras de Boole finitas, para ello tenemos que dar la siguiente definición:

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un álgebra de Boole. Un elemento $\mathbb{0} \neq a$ en L se llama **átomo** si verifica:

$$\forall x \in L \qquad x \wedge a = a\ (a \leq x) \text{ o bien } x \wedge a = \mathbb{0}$$

es decir, si es un elemento minimal de $L - \{\mathbb{0}\}$.

*Ejercicio 9*: Obtener los átomos of $\mathbb{B}_2{}^3$, el conjunto de las partes $\mathcal{P}(X)$ con $X = \{a, b, c\}$ y D(12) del ejercicio 7.

***Proposición 3.5.*** Si $a_1$ y $a_2$ son dos átomos en un álgebra de Boole $(L, \vee, \wedge)$, entonces $a_1 = a_2$ o bien, $a_1 \wedge a_2 = \emptyset$, es decir, dos átomos distintos de un álgebra de Boole no son comparables. (Demostración ejercicio 3.36).

***Teorema 3.6. (de estructura de las álgebras de Boole finitas)*** Sea $(L, \vee, \wedge)$ un álgebra de Boole finita y M el conjunto de todos los átomos de L. Entonces L es isomorfo al álgebra de Boole $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$. (Demostración ejercicio 3.37).

***Corolario 3.7*** Sea $(L, \vee, \wedge)$ un álgebra de Boole finita, entonces:
i) El cardinal de L es $2^n$, para un entero n no negativo.
ii) $(L, \vee, \wedge)$ es isomorfa a un álgebra de Boole del tipo $(\mathbb{B}_2^n, \vee, \wedge)$. (Demostración ejercicio 3.38).

*Ejercicio 10*: Usar el corolario anterior para comprobar si D(12) y D(24) son álgebras de Boole.



# 3. FUNCIONES BOOLEANAS

Tanto los circuitos de los ordenadores como de otros dispositivos eléctricos: conmutador eléctrico, transmisor,..., poseen entradas (inputs) con solo dos estados (el 0 y el 1, activar y desactivar, pasar corriente y no pasar corriente,...) que pueden abstraerse al 0 y al 1. Así los circuitos pueden construirse de manera que sólo manejen elementos básicos de dos entradas.

Claude Shannon demostró usando las leyes dadas por Boole como podían utilizarse las reglas básicas de la lógica para diseñar circuitos de manera que la operación realizada por un circuito se puede definir mediante una función booleana indicando los valores de las salidas que corresponde a cada una de las entradas.



Diremos que una variable x es una **variable booleana** si sólo toma valores de $\mathbb{B}_2 = \{0, 1\}$.

Dado $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, a cualquier aplicación $f: (\mathbb{B}_2)^n \longrightarrow \mathbb{B}_2$ la llamaremos **función booleana elemental** de n variables o **puerta lógica** de n entradas. Destacaremos las variables escribiendo la función mediante $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, donde cada $x_i$ es una variable booleana para $0 \leq i \leq n$.

Para conocer cualquier función booleana f es necesario dar la imagen por f de todos los elementos de $\mathbb{B}_2^n$. Usualmente se escriben en una tabla que se llama **tabla de verdad**:

| $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

Ejemplo

1) Funciones booleanas de una variable:

| x | $f_0(x) = 0$ | $f_1(x) = x$ | $f_2(x) = \overline{x}$ | $f_3(x) = 1$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

2) Funciones booleanas de dos variables:

| x | y | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |



| Escrituras mas común | Nombres más común |
|---|---|
| $f_0(x,y) = 0$ | *Constante 0, contradicción* |
| $f_1(x,y) = x \downarrow y$ | *Operación de Pierce, NOR, ni* |
| $f_2(x,y) = \overline{x} \wedge y$ | |
| $f_3(x,y) = \overline{x}$ | *Complemento de la 1ª componente* |
| $f_4(x,y) = x * y$ | *Inhibidor* |
| $f_5(x,y) = \overline{y}$ | *Complemento de la 2ª componente* |
| $f_6(x,y) = x \oplus y$ | *Diferencia simétrica o exclusiva, XOR* |
| $f_7(x,y) = x \uparrow y = x \mid y$ | *Operación de Sheffer, exclusión, NAND* |
| $f_8(x,y) = x \wedge y = xy$ | *Ínfimo, producto, AND* |
| $f_9(x,y) = x \leftrightarrow y = x^y$ | *Equivalencia lógica, potencia booleana* |
| $f_{10}(x,y) = y$ | *Proyección de la segunda componente* |
| $f_{11}(x,y) = x \rightarrow y$ | *Implicación lógica, condicional* |
| $f_{12}(x,y) = x$ | *Proyección de la primera componente* |
| $f_{13}(x,y) = x \leftarrow y$ | *Implicación recíproca* |
| $f_{14}(x,y) = x \vee y = x + y$ | *Supremo, suma, OR* |
| $f_{15}(x,y) = 1$ | *Constante1, tautología* |

Por último, nótese que existen $2^{2^n}$ funciones booleanas elementales de n variables. Su estudio se reduce al de las funciones booleanas elementales de 1 y 2 variables, puesto que (aunque no de manera única) cada una de ellas puede expresarse como composición de éstas. En realidad, como veremos más adelante, incluso pueden expresar usando sólo algunas de ellas.

Una función booleana elemental puede venir dada también por una **expresión booleana**, es decir, una formula en la que aparecen constantes, variables y operaciones del álgebra de Boole, que nos permita calcular la tabla de verdad de la función. Claramente, diferentes expresiones booleanas proporcionaran la misma función.

Diremos que dos funciones booleanas elementales son **iguales** si tiene la misma tabla de verdad.



*Ejercicio 11*: Comprobar si las siguientes funciones booleanas f, g: $(\mathbb{B}_2)^3 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ son iguales donde f y g vienen dadas por las siguientes expresiones booleanas:

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \rightarrow z \quad y \quad g(x, y, z) = \overline{x.y} + z$$

Cada expresión booleana en n variables define una función booleana de $(\mathbb{B}_2)^n$ en $\mathbb{B}_2$. Por otra parte, vamos a comprobar que para cada función booleana f: $(\mathbb{B}_2)^n \longrightarrow \mathbb{B}_2$ podemos encontrar una expresión booleana $E(x_1, x_2,\ldots x_n)$ tal que $f(x_1, x_2,\ldots x_n) = E(x_1, x_2,\ldots x_n)$.

| $x_1$ | $x_2$ | $f(x_1, x_2)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

*Ejercicio 12*: Encontrar una expresión booleana que defina la función booleana f: $(\mathbb{B}_2)^2 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ cuya tabla de verdad es:

Denotamos por $m_{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)}$ a la función booleana en cuya tabla de verdad aparece un 0 en todas las filas salvo en la correspondiente a la combinación $(\delta_1, \delta_2,\ldots, \delta_n)$ que tiene un 1, es decir:

$$m_{(\delta_1,\,\delta_2,\ldots,\delta_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n),\\ 0 & \text{si} \quad (x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n).\end{cases}$$

A estos elementos se les llaman **mintérminos** y vienen dados por la expresión booleana

$$m_{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\tilde{x}_1\wedge\tilde{x}_2\wedge\ldots\wedge\tilde{x}_n$$

donde

$$\tilde{x}_i=\begin{cases}x_i & \text{si} \quad \delta_i=1,\\ \overline{x}_i & \text{si} \quad \delta_i=0.\end{cases}$$



***Proposición 3.8.*** Toda función booleana elemental f: $\mathbb{B}_2^n \longrightarrow \mathbb{B}_2$ de n variables, distinta de la constante cero, se escribe como supremo de mintérminos, de forma única. A esta expresión se le llama **forma canónica en mintérminos** o **forma canónica disyuntiva** de la función.

El principio de dualidad nos asegura la existencia de un concepto dual al de mintérmino, llamando **maxtérminos** a las funciones booleanas elementales en cuya tabla de verdad aparece un solo 0 y todos los demás son 1. Además a partir de la proposición anterior, podemos enunciar otra dual:

***Proposición 3.9.*** Toda función booleana elemental f: $\mathbb{B}_2^n \longrightarrow \mathbb{B}_2$ de n variables, distinta de la constante uno, se escribe como infimo de maxtérminos, de forma única. A esta expresión se le llama **forma canónica en maxtérminos** o **forma canónica conjuntiva** de la función.

Denotamos por $M_{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)}$ al maxtérmino en cuya tabla de verdad aparece un 0 en la fila de la combinación ($\delta_1$, $\delta_2$,..., $\delta_n$) y un 1 en el resto, es decir:

$$M_{(\delta_1,\, \delta_2,\ldots,\delta_n)}(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x_1, x_2,\ldots, x_n) = (\delta_1, \delta_2,\ldots,\delta_n), \\ 1 & \text{si} \quad (x_1, x_2,\ldots, x_n) \neq (\delta_1, \delta_2,\ldots,\delta_n). \end{cases}$$

Tales elementos vienen dados por la expresión booleana

$$M_{(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n)}(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_n$$

donde

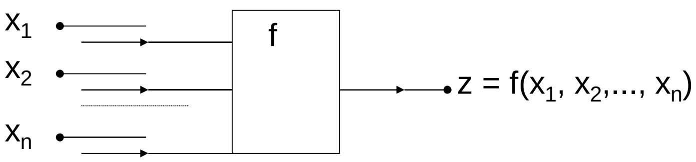
$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad \delta_i = 0, \\ \overline{x}_i & \text{si} \quad \delta_i = 1. \end{cases}$$

*Ejercicio 13*: Obtener la forma canónica en mintérminos y en maxtérminos de la función booleana f: $(\mathbb{B}_2)^3 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ donde: f(x, y, z) = x $\wedge$ (y $\leftrightarrow$ z).



# 4. APLICACIONES: CIRCUITOS LÓGICOS

Las funciones booleanas elementales con n variables se llama también **puertas lógicas con n entradas** pues puede interpretarse como una “caja electrónica” que acepta n señales de entrada (los valores de las n variables) y genera una salida (la imagen por f de las n entradas).

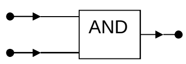



Para n variables contamos con $2^{2^n}$ puertas lógicas distintas. En la práctica, sólo dispondremos de un número de puertas lógicas mucho menor, por ejemplo, en orden a abaratar los costes o evitar tiempo y espacio inútil. En lo que sigue veremos como a veces será posible montar o sintetizar cualquier puerta lógica a partir de las que disponemos.

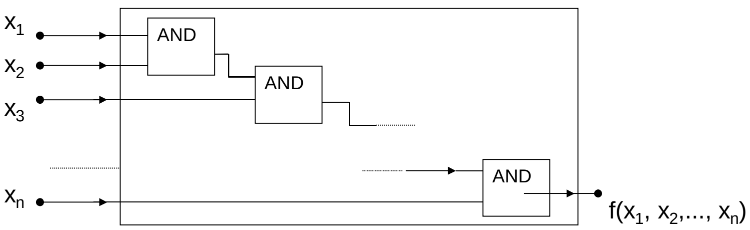


<u>Ejemplo</u>: Supuesto que sólo disponemos de puertas lógicas con dos variables realizando la función AND ($x \wedge y$), se nos pide montar una puerta lógica con n variables que realice $f(x_1, x_2,..., x_n) = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$.

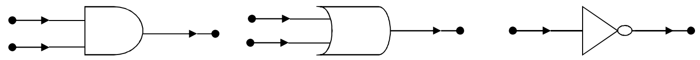
Si representamos la unidad AND por el símbolo




Usando la propiedad asociativa se tiene:



Las tres puertas fundamentales – las puertas AND, OR y NOT – realizan las tres operaciones básicas de supremo, ínfimo y complemento, respectivamente. Las puertas lógicas se representan mediante símbolos estándar desarrollados por el Institute of Electrical and Electronics Engineers: Las puertas lógicas para las funciones booleanas de 2 variables conjunción (AND) y disyunción (OR) y la función booleana de una variable complemento (NOT), también llamada **inversor**, las representaremos mediante los siguientes diagramas:

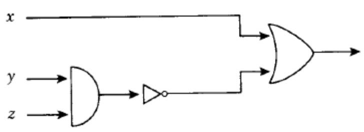


Con frecuencia la función AND se denota por el producto (·) y la función OR mediante la suma (+).

Cuando representamos una función booleana con este tipo de gráfica, las variables que aparecen a la izquierda de la puerta son las entradas. Las salidas aparecen a la derecha.



*Ejercicio 14*: Obtener la expresión booleana que define la función booleana f: $(\mathbb{B}_2)^3 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ dada mediante el diagrama:




Enumeramos algunas características de estos gráficos:

a) Las líneas de entrada pueden dividirse para ser usadas como entradas para distintas puertas.

b) Las líneas de entrada y salida sólo se juntan en las puertas.

c) La salida de una puerta no puede ser usada como entrada de ésta o de otra que lleve a esta misma puerta, es decir, no podemos hacer que una línea vuelva hacia atrás.

*Ejercicio 15*: Dibujar el diagrama para la puerta lógica f: $(\mathbb{B}_2)^3 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ dada por $f(x, y, z) = (x + (\overline{y.z})) + (x.z)$

Como toda función booleana elemental se escribe como supremo de mintérminos, es inmediato que toda puerta lógica se puede sintetizar a partir de las puertas lógicas AND, OR y NOT.

Un conjunto de funciones booleanas elementales (puertas lógicas) se dice que es un **conjunto funcionalmente completo** si toda función booleana elemental se puede sintetizar a partir de dichas puertas lógicas.

Por lo anterior, el conjunto {AND, OR, NOT} es funcionalmente completo.

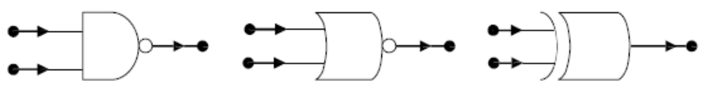
¿Pueden menos operadores constituir un conjunto funcionalmente completo?



***Proposición 3.10.*** Los conjuntos {AND, NOT}, {OR, NOT}, {NAND} y {NOR} son conjuntos funcionalmente completos.

***Proposición 3.11.*** El conjunto {1, ⊕ = XOR, AND} es funcionalmente completo y la síntesis de cualquier función booleana elemental a partir de estas puertas lógicas se le llama **polinomio de Gegalkine (Zhegalkin)** de la función.

Usaremos los siguientes símbolos para denotar las puertas lógicas NAND, NOR y XOR:



*Ejercicio 16*: Obtener el polinomio de Gegalkine de la función booleana f: $(\mathbb{B}_2)^3 \longrightarrow \mathbb{B}_2$ dada por $f(x, y, z) = (x + (\overline{y.z})) + (x.z)$.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Llamamos **circuito lógico** a una aplicación

$$f: (\mathbb{B}_2)^n \longrightarrow (\mathbb{B}_2)^m$$

que asocia cada n-upla $(x_1, x_2,..., x_n)$ en $(\mathbb{B}_2)^n$ a una m-upla en $(z_1, z_2,..., z_m)$ en $(\mathbb{B}_2)^m$, es decir, $f(x_1, x_2,..., x_n) = (z_1, z_2,..., z_m)$.

Dado un circuito lógico f, podemos considerar para j = 1, 2,..., m una puerta lógica con n entradas $f_j: \mathbb{B}_2^n \longrightarrow \mathbb{B}_2$ definida por $f_j(x_1, x_2,..., x_n) = z_i$.

Así un circuito lógico de n entradas y m salidas no es más que un conjunto de m puertas lógicas de n entradas que podemos representarlo mediante: