TEMA II: CONJUNTOS Y RELACIONES DE ORDEN

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS GENERALES

1. Hacer que el alumno asimile el concepto de conjunto como la estructura algebraica más simple en la que se ambientarán el resto de las estructuras algebraicas,

2. Conocer el concepto de aplicación entre conjuntos, y

3. Conocer el concepto de relación binaria y en particular las relaciones de equivalencia y de orden.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Unificar y reafirmar el concepto de conjunto y la notación de teoría de conjuntos.**
- ✓ **Entender los conjuntos como el modelo matemático más sencillo que se conoce.**
- ✓ **Decidir cuando dos conjuntos son iguales o uno de ellos está contenido en otro.**
- ✓ **Conocer el conjunto de las partes de un conjunto.**
- ✓ **Saber operar con conjuntos (unión, intersección, complemento).**
- ✓ **Reconocer las propiedades que satisfacen las distintas operaciones entre conjuntos y saber utilizarlas para demostrar igualdades entre conjuntos.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Conocer el producto cartesiano entre conjuntos y sus propiedades.**
- ✓ **Conocer el concepto de correspondencia y saber calcular imagen, imagen inversa, dominio y codominio de una correspondencia.**
- ✓ **Saber cuando una correspondencia entre dos conjuntos es una aplicación y saber clasificarla.**
- ✓ **Saber calcular la composición de dos aplicaciones.**
- ✓ **Conocer la correspondencia inversa de una aplicación.**
- ✓ **Reconocer cuando una familia de subconjuntos de un conjunto es un partición.**
- ✓ **Entender el concepto de relación binaria y saber determinar las propiedades que satisface.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ **Distinguir entre relación de equivalencia y de orden.**
- ✓ **Saber calcular una clase de equivalencia y el conjunto cociente asociado a una relación de equivalencia, y**
- ✓ **Conocer los conceptos de conjunto totalmente ordenado y conjunto bien ordenado.**
- ✓ **Entender los distintos elementos notables de un conjunto ordenado y saber calcularlos.**

BIBLIOGRAFÍA

- ➢ **“Matemática discreta para la computación”. M.A. García-Muñoz. Servicio de Publ. Univ. Jaén. 2010.**
- ➢ “Álgebra lineal”, J. de Burgos. McGraw-Hill, 1995.
- ➢ “Álgebra y Geometría Analítica”, F. Granero. McGraw-Hill, 1994.
- ➢ “Álgebra lineal y geometría: curso teórico-práctico”, J. García- García y M. López Pellicer. Marfil, 1992.
- ➢ “Matemática discreta”, F. García Merayo. Paraninfo, 2001.
- ➢ “Estructuras de Matemática discreta para la computación”, B. Kolman y otros. Prentice Hall, 1997.
- ➢ “Problemas resueltos de Matemática discreta”, F. García Merayo y otros. Paraninfo, 2003.

DESARROLLO TEÓRICO

II.1 Introducción.
II.2 Conjuntos.
  II.2.1 Conceptos básicos.
  II.2.2 Operaciones con conjuntos.
  II.2.3 Producto cartesiano.
II.3 Aplicaciones entre conjuntos.
II.4 Relaciones binarias.
  II.4.1 Relaciones de equivalencia.
  II.4.2 Relaciones de orden.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de **conjunto** es uno de los más importantes en matemáticas, aun más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas. En su forma explícita, los principios y terminología de los conjuntos se utilizan para construir teoremas matemáticos más claros y precisos, y para explicar conceptos abstractos como el **infinito**.

Todo matemático o filósofo ha empleado razonamientos de **teoría de conjuntos** de una forma más o menos consciente. La teoría de conjuntos se debe al matemático ruso Georg Cantor (1845-1918), aunque otros matemáticos como George Boole (1815-1864) dieron los primeros pasos para su desarrollo.

En el último cuarto del siglo XIX se vivió un episodio apasionante de la historia de las matemáticas que las ligaría desde entonces a la historia de la lógica. Primero, George Boole trató de presentar la lógica como parte de las matemáticas. Poco después G. Fregge (1848-1925) intentó demostrar que la aritmética era parte de la lógica y, dando un gran paso tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de la lógica, G. Cantor se adelantó a Fregge con una fundamentación lógica de la aritmética. Como consecuencia, Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la **Teoría de Conjuntos**.

Cantor definió **conjunto** como “una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto”.

Su obra fue admirada y condenada simultáneamente por sus contemporáneos. Desde entonces los debates en el seno de la **teoría** de **conjuntos** han sido siempre apasionados, sin duda por hallarse estrechamente conectados con importantes cuestiones lógicas.

La **teoría de conjuntos** empezó a influir en otras áreas de las matemáticas. Por ejemplo, Lebesgue la utilizó en su integral. Posteriormente se intento axiomatizar la teoría de conjuntos. El primero que lo hizo fue Zermelo en 1908. Después lo intentaron Fraenkel, von Neumann, Bernays y Gödel. Este último terminó demostrando las limitaciones de cualquier teoría axiomática.

Comenzamos la unidad presentando el lenguaje de conjuntos. Introduciremos el concepto de conjunto, las varias formas de describir un conjunto y de construir nuevos conjuntos a partir de otros conocidos. En la segunda parte, estudiaremos la noción de aplicación y estudiaremos algunas aplicaciones importantes. Además estudiaremos las propiedades importantes de algunas aplicaciones especiales y algunas técnicas para construir nuevas aplicaciones a partir de otras conocidas. Terminaremos examinando el concepto de relación, sus propiedades y diferentes tipos de relaciones. Nos centraremos en el estudio de las relaciones de equivalencia y de orden.

2. CONJUNTOS

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Aunque conjunto es un termino indefinido, como punto y línea en geometría, describimos lo que queremos entender con este termino: un **conjunto** a toda colección de objetos bien definidos. Los objetos pueden ser cualquiera y se les llamará **elemento** del conjunto.

{1, Jaen, ⊕, π}
{x / x es un buen político}

No es un conjunto a menos que definamos "buen" con precisión

Utilizaremos las letras mayúsculas A, B, X,... para denotar conjuntos y las letras minúsculas a, b, x, y,... para denotar elementos. Sin embargo, un elemento puede denotarse con una letra mayúscula si este elemento es también un conjunto.

Si un objeto x es un elemento de A, escribiremos $x \in A$.

" x pertenece a A"

Si un objecto x no es un elemento de A, escribiremos $x \notin A$

" x no pertenece a A"

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Un conjunto se puede definir de dos formas:

I) Por **extensión**: listando los elementos encerrados entre llaves {}.

El orden en el cual se enumeran los elementos no importa. Ejemplo: {m, a, t, h} y {a, h, m, t} son el mismo conjunto.

Si un elemento se repite, no se considera más de una vez. Por ejemplo: {x, y, x, z, t, y} y {x, y, z, t} son el mismo.

Un conjunto con un gran número de elementos que sigue un patrón definido, con frecuencia se escriben usando puntos suspensivos (…) listando unos pocos elementos del principio. Por ejemplo: El conjunto de los enteros positivos impares se escribiría por {1, 3, 5,…}.

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Un conjunto se puede definir de dos formas:

I) Por **extensión**: listando los elementos encerrados entre llaves {}.

II) Por **comprensión**: definiendo los elementos del conjunto mediante una propiedad que satisfacen todos los elementos del conjunto ({x / P(x)} el conjunto formado por todos los objetos x tales que x satisface la propiedad P(x)).
Por ejemplo: A = {x / x e un entero positivo impar}
La barra "/" se lee "tal que" y puede cambiarse por "|" o ":".

Ejercicio 1: Enumera los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos, usando la notación "…" si es necesario:

a) {x : x es un mes del año con 31 días}
b) {x / x es un entero positivo y $3x^2 – 5x – 2 = 0$}
c) {x / $x = z^2$ y z es un entero}

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

El conjunto sin elementos es el **conjunto vacío (o nulo)**; Se denota por $\varnothing$ o { }.
Los siguientes son algunos conjuntos infinitos especiales que usaremos con frecuencia:

$\mathbb{N}$ = {números naturales} = {0, 1, 2, 3, 4,.....}

$\mathbb{Z}$ = {números enteros} = {...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

$\mathbb{Q}$ = {números racionales} = $\{\frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ = {números reales} $\ni \pi$, e, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{2}$

$\mathbb{C}$ = {números complejos} = $\{a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

$\mathbb{Z}^-$ = {enteros negativos} = {...,-3, -2, -1}

$\mathbb{Z}^+$ = {enteros positivos} = {1, 2, 3,...} = $\mathbb{N} - \{0\}$

$\mathbb{R}^+$ = {números reales positivos} = $\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\}$

$\mathbb{R}_0^-$={números reales negativos incluido el 0}=$\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 0\}$

Algunos conjunto en $\mathbb{R}$, llamados **intervalos**, son:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b \}$ = **intervalo cerrado**
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b \}$ = **intervalo semicerrado en a**
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b \}$ = **intervalo semiabierto en a**
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b \}$ = **intervalo abierto**

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Los conjuntos los podemos representar mediante **diagramas de Venn** (regiones del plano delimitadas por una curva cerrada que encierra a los elementos del conjunto) o bien mediante **diagramas en línea** (los elementos de un conjunto se representan sobre una línea recta).

Llamaremos **cardinal** de un conjunto A al número de elementos de dicho conjunto y lo representaremos por **card**(A). Atendiendo a esto diremos que un conjunto es **finito** si **card**(A) es finito, en otro caso diremos que A es **infinito**.

Ejercicio 2: Determinar el cardinal de los conjuntos del ejercicio 1 y de cada uno de los conjuntos siguientes. Usar la notación {x / p(x)} para describirlos:

i) {∅}   ii) ∅

iii) {2, 3}   iv) {{1, 3, 5}}.

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Dados A y B conjuntos, diremos que son **iguales**, A = B, si están formados por los mismos elementos.

Proposición 2.1. La igualdad de conjuntos satisface las siguientes propiedades:

i) **Reflexiva**: A = A para todo conjunto A.

ii) **Simétrica**: A y B conjuntos, si A = B entonces B = A.

iii) **Transitiva**: A, B y C conjuntos, si A = B y B = C entonces A = C.

Ejercicio 3: Decide si es o no cierto:

a) {x /x es un número primo mayor que 23 y menor que 28}={∅}.

b) {a, i, e} = {x / x es una vocal en la palabra “mathematics”}.

c) {{1, 2}} = {{1}, {2}}.

d) {2, 1, 2, 3, 1} = {dígitos del número 21231} = {3, 2, 1}.

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Diremos que A es un **subconjunto** de B, y lo denotaremos por $A \subseteq B$, si todo elemento de A es un elemento de B. Es decir,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \text{ entonces } x \in B).$$

Si $A \subseteq B$, también podemos decir que B **contiene** a A o B **incluye** a A y escribir $B \supseteq A$. También podemos usar A está **contenido** en B, A esta **incluido** en B. Denotamos $A \subset B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $A \neq B$.

Si A no es un subconjunto de B, escribimos $A \not\subseteq B$.

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x, x \in A \text{ and } x \notin B).$$

Ejercicio 4: Estudiar si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $\{2\} \in \{x \,/\, x \text{ es un dígito en } 2123\}$ b) $\varnothing \in \{\{1, 2\}\}$

c) $\{a, i, e\} \subseteq \{x/x \text{ es una vocal}\}$ d) $\varnothing \subseteq \{3, \{2, 1\}\}$.

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Proposición 2.2. El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto A, $\varnothing \subseteq A$, $\forall A$. (Demostración ejercicio 2.8.)

Siempre podremos elegir un conjunto especial U ($\neq\varnothing$) tal que cada conjunto que podamos considerar es un subconjunto de U. Este conjunto se le llama **conjunto universal**, y lo denotaremos por U. En los diagramas de Veen U se representa mediante los punto interiores a un rectángulo.

Proposición 2.3. La inclusión de conjuntos satisface las siguientes propiedades:

i) **Reflexiva**: $A \subseteq A$ para todo conjunto A.

ii) **Antisimétrica**: A y B conjuntos, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ entonces $A = B$. (la usaremos para probar la igualdad de conjuntos)

iii) **Transitiva**: A , B y C conjuntos, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Llamaremos **subconjuntos propios** de A a los subconjuntos distintos de $\varnothing$ y de A. A los subconjuntos A y $\varnothing$ del conjunto A se les llama **subconjuntos impropios** de A.

Los subconjuntos de un conjunto se pueden usar para definir un nuevo conjunto:

Dado un conjunto A, llamaremos **conjunto de las partes** o **conjunto potencia** de A, $\mathcal{P}(A)$ al conjunto que tiene por elementos a todos los subconjuntos de A, esto es,

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \,/\, B \subseteq A \} .$$

Ejercicio 5: Calcular el conjunto de las partes $\mathcal{P}(A)$ de A ={1, 2, 3}.

Proposición 2.4. Si A es finito, entonces **card**($\mathcal{P}$(A)) = $2^{\mathbf{card}(A)}$

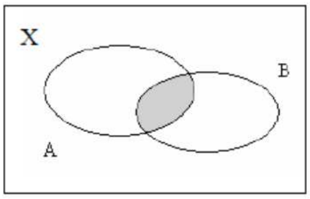
(Demostración ejercicio 2.20.)

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

De igual forma que combinando varias formas enunciativas obteníamos nuevas formas enunciativas, combinando conjuntos de diferentes formas obtendremos nuevos conjuntos.

Sea X un conjunto y A, B $\in \mathcal{P}(X)$, llamaremos **intersección** de A y B, al subconjunto de X formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B,

$$A \cap B = \{ x \in X \,/\, x \in A \text{ y } x \in B\} \in \mathcal{P}(X).$$



2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Podemos extender la definición de intersección a más de dos conjuntos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. Su intersección es:

$$\bigcap_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r = \{x \in X / \, x \in A_r, para\ cada\ r = 1,2,\ldots,n\}$$

Diremos que A y B son **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 6: Sea $X = \{x \in \mathbb{Z}^+ / \, x \leq 15\}$, $A = \{x \in X / \, x \text{ es par}\}$, $B = \{x \in X / \, x \text{ es múltiplo de } 3\}$ y $C = \{x \in X / \, x^2 - 9 = 0\}$. Calcular $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Proposición 2.5. La intersección de conjuntos satisface las propiedades:

i) **Conmutativa**: $A \cap B = B \cap A$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.

ii) **Asociativa**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

iii) **Idempotencia**: $A \cap A = A$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

iv) **Elemento ínfimo**: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

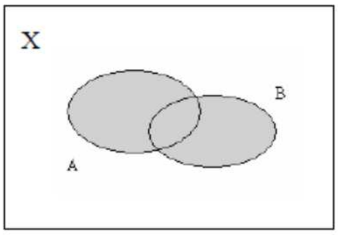
v) **Elemento neutro**: $A \cap X = A$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

Ejercicio 7: Probar la propiedad conmutativa para la intersección.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sea X un conjunto y A, B $\in \mathcal{P}$(X), llamaremos **unión** de A y B, al subconjunto de X formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de dichos conjuntos, es decir:

$$A \cup B = \{ x \in X \,/\, x \in A \text{ ó } x \in B\} \in \mathcal{P}(X).$$



Como es fácil observar hay una conexión obvia entre intersección de conjuntos y conjunción y entre unión de conjuntos y disyunción.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Podemos extender la definición de unión a más de dos conjuntos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos. Su unión es:

$$\bigcup_{r=1}^{n} A_r = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = \{x \in X \,/\, \exists r \in \{1,2,\ldots,n\} \; tal\; que\; x \in A_r\}$$

Ejercicio 8: Sean X = $\{x \in \mathbb{Z}^+ / x \leq 15\}$, A = $\{x \in X / x$ es par$\}$, B = $\{x \in X / x$ es múltiplo de 3$\}$ y C = $\{x \in X / x^2 - 9 = 0\}$. Calcular $A \cup B$, $A \cup B \cup C$ y $(A \cup B) \cap C$.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Proposición 2.6. La unión de conjuntos satisface las propiedades:

i) **Conmutativa**: $A \cup B = B \cup A$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.

ii) **Asociativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(X)$.

iii) **Idempotencia**: $A \cup A = A$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

iv) **Elemento universal o ley de dominación:**
$A \cup X = X$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

v) **Elemento neutro:** $A \cup \varnothing = A$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Proposición 2.7. La unión junto con la intersección de conjuntos satisface las propiedades:

i) **Leyes de absorción**:

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A \qquad \forall A, B \in \mathcal{P}(X).$$

ii) **Distributivas**:

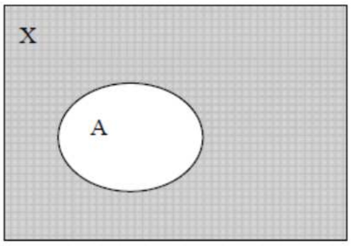
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad \forall A, B, C \in \mathcal{P}(X).$$

Ejercicio 9: Probar una de las leyes de absorción.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Sea X un conjunto y $A \in \mathcal{P}(X)$, llamaremos **complemento** de A respecto de X, al conjunto formado por todos los elementos de X que no pertenecen a A, es decir:

$$A' = \bar{A} = \{ x \in X / x \notin A\} \in \mathcal{P}(X).$$



2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Ejercicio 10: Sean $X = \{x \in \mathbb{Z}^+ / x \leq 15\}$, $A = \{x \in X / x \text{ es par}\}$, $B = \{x \in X / x \text{ es múltiplo de } 3\}$ y $C = \{x \in X / x^2 - 9 = 0\}$. Calcular los conjuntos A', $(A \cup C)'$ y $(A \cup C) \cap B'$.

Proposición 2.8. El complemento de un conjunto satisface:

i) **Doble complemento o involución**:
$$(A')' = A \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

ii) **Complemento del conjunto universo:** $X' = \emptyset$

iii) **Complemento del conjunto vacío:** $\emptyset' = X$

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Proposición 2.9. La operación complemento junto con la unión y la intersección satisfacen las propiedades:

i) **Ley del complemento**:

$A \cup A' = X \qquad A \cap A' = \varnothing \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$

ii) **Leyes de De Morgan**:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B' \qquad \forall A, B \in \mathcal{P}(X).$

Ejercicio 11: Probar una de las leyes de De Morgan.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

2.2 OPERACIONES CON CONJUNTOS

Nótese la similitud entre las propiedades de los conjuntos y las leyes de lógica. Cada ley de lógica se puede obtener reemplazando conjuntos con enunciados, las operaciones de conjuntos $\cap$, $\cup$, y ‘ con las conectivas $\wedge$, $\vee$, y ~ respectivamente, y la igualdad (=) con la equivalencia lógica ($\Leftrightarrow$). Por ejemplo, la ley de De Morgan $(A \cap B)' = A' \cup B'$ se puede trasladar como

$$(\sim(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q)).$$

Igual que las leyes de lógica se pueden usar para simplificar expresiones lógicas y obtener nuevas leyes, las propiedades de conjuntos se pueden usar para simplificar expresiones de conjuntos.

Ejercicio 12: Simplificar la expresión:

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cup B)'$$

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

2.3 PRODUCTO CARTESIANO

El orden en que se enumeran los elementos de un conjunto carece de importancia. En algunas circunstancias, sin embargo, el orden sí es significativa (por ejemplo, al representar los punto en geometría).

Un **par ordenado** es un objeto formado por dos elementos con un orden determinado que notaremos por (a, b). A los elementos "a" y "b" se les denomina **primera** y **segunda componente** del par (a, b). Dos pares ordenados son **iguales** si y sólo si las componentes correspondientes son iguales.

De forma análoga podemos definir una **terna**, **cuaterna**, **quíntupla** y en general, **n-upla** como un objeto formado por n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en un orden dado y lo notaremos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

2.3 PRODUCTO CARTESIANO

Dados X e Y conjuntos, llamaremos **producto cartesiano** de X e Y, al conjunto formado con todos los pares ordenados que pueden formarse con elementos de X e Y:

$$X \times Y = \{(a, b) \,/\, a \in X \text{ y } b \in Y\}$$

Si X = Y, usualmente denotamos $X \times X = X^2$.

Ejercicio 13: Sean A ={1, 3} y B = {a, b, c}. Calcular $A \times B$, $B \times A$ y A^2.

Nótese que $X \times Y \neq Y \times X$.

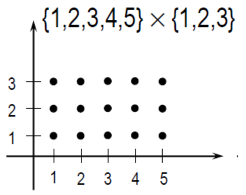
Proposición 2.10. Si X e Y son conjuntos finitos, entonces

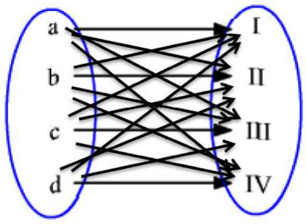
$$\mathbf{card}(X \times Y) = \mathbf{card}(X).\mathbf{card}(Y)$$

(Demostración ejercicio 2.21.)

2.3 PRODUCTO CARTESIANO

El producto cartesiano se puede representar mediante diagramas cartesianos, diagramas sagitales y tablas de doble entrada.





a	(a, x)	(a, y)	(a, z)
b	(b, x)	(b, y)	(b, z)
	x	y	z

2.3 PRODUCTO CARTESIANO

De igual forma se puede definir el producto cartesiano de tres o más conjuntos:

Dados A_1, A_2,..., A_n conjuntos, definimos su **producto cartesiano** como el conjunto formado por todas las n-uplas posibles $(a_1, a_2,...,a_n)$ de forma que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$,..., $a_n \in A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{ (a_1, a_2,...,a_n) \,/\, a_i \in A_i, \forall i\}$$

Si todos los A_i son iguales a A, el producto cartesiano se denota por A^n.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

2.3 PRODUCTO CARTESIANO

Proposición 2.11. Sean X e Y conjuntos, A, B $\in \mathcal{P}$(X) y C, D $\in \mathcal{P}$(Y), se tiene:

i) $A \times C \subseteq X \times Y$.

ii) Distributiva respecto de la unión

$$X \times (C \cup D) = (X \times C) \cup (X \times D)$$
$$(A \cup B) \times Y = (A \times Y) \cup (B \times Y)$$

iii) Distributiva respecto de la intersección

$$X \times (C \cap D) = (X \times C) \cap (X \times D)$$
$$(A \cap B) \times Y = (A \times Y) \cap (B \times Y)$$

iv) $(X \times C)' = X \times C'$ $\quad$ $(A \times Y)' = A' \times Y$

v) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Ejercicio 13: Mostrar con un ejemplo que en general:

$$(A \times C) \cup (B \times D) \neq (A \cup B) \times (C \cup D).$$

3. APLICACIONES

El concepto de función o aplicación es tan fundamental que juega el papel de hilo conductor que entrelaza todas las ramas de las matemáticas. Se usa en la vida cotidiana (por ejemplo, al calcular la factura de la luz o el agua).

Empezamos con la noción conocida por los estudios previos (las funciones de variable real). Tradicionalmente se denota por x, a una variable asociada frecuentemente a expresiones tales como $x^2 + 2x - 3$, sen(x), ln(x), etc.

Estas expresiones se denotan por f(x) y se les llaman “funciones de (variable) x” (generalmente la variable x se refiere a una número real arbitrario, aunque puede estar sujeto a algunas restricciones). La esencia de los ejemplos es que se puede calcular el valor de la expresión para cualquier valor (permitido) de la variable x.

De hecho, nos proporciona una “regla” para calcular su valor dado cualquier valor de x.

En esta sección utilizaremos funciones donde la variables no es un número real, ni siquiera un número, sino un elemento de un conjunto X. Por esto, puede ser un poco engañoso referirnos a una regla para calcular el valor de una expresión.

En muchos casos se asigna a cada elemento de un conjunto otro elemento particular de un segundo conjunto. Por ejemplo, asignar habitaciones a las personas en un hotel, asignar una calificación a cada estudiante de una clase, ...

Con esto en mente, vamos a comenzar con una definición más general que la definición de aplicación, el concepto de correspondencia entre dos conjuntos.

Sean X e Y conjuntos. Una **correspondencia** entre X e Y es una terna (X, Y, G) donde $G \subseteq X \times Y$. Al conjunto X se le llama **conjunto inicial**, al conjunto Y se le llama **conjunto final** y a G se le llama **grafo** o **gráfica** de la correspondencia.

Si el par ordenado $(x, y) \in G$ se dice que "**x se corresponde con y**", o "**y depende de x**".

A una correspondencia como la anterior se le suele asignar letras f, g, h,..., representándose mediante

$$f: X \longrightarrow Y, \quad \text{o bien,} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Nótese que el grafo de tal correspondencia se denota mediante G_f para indicar que es el grafo de f.

En lo que sigue sea f = (X, Y, G) una correspondencia.

Si $a \in X$, llamaremos **imagen de a,** f(a), al conjunto de elementos de Y que se corresponden mediante f con a:

$$f(a) = \{ b \in Y \,/\, (a, b) \in G\} \subseteq Y$$

Si $b \in Y$, llamamos **imagen inversa de b**, $f^{-1}(b)$, al conjunto de elementos de X que se corresponden con b:

$$f^{-1}(b) = \{ a \in X \,/\, (a, b) \in G\} \subseteq X$$

Llamaremos **dominio** de una correspondencia f al subconjunto de X formado por los elementos cuya imagen es distinta del vacío, es decir:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{ a \in X \,/\, f(a) \neq \varnothing \} \subseteq X.$$

Llamaremos **imagen** de f al conjunto formado por todas las imágenes de los elementos de A,

$$\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{a \in Dom(f)} f(a) \subseteq Y.$$

Ejercicio 14: Dado X = {1, 2, 3} e Y ={x / x es una letra en la palabra “mathematics”} conjuntos. Consideremos las siguientes correspondencias $f_i = (X, Y, G_i)$ para $1 \leq i \leq 5$ donde:

$G_1 = \varnothing$

$G_2 = \{(2, a), (1, e), (2, m), (2, t)\}$

$G_3 = \{(2, a), (2, e), (2, m), (2, t), (1, h),(1, i),(3, c),(3, s)\}$

$G_4 = \{(2, a), (1, e), (3, m)\}$

$G_5 = X \times Y$

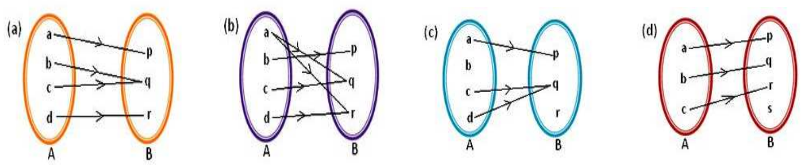
Obtener en cada caso la imagen de los elementos de X, la preimagen de los elementos de Y, el dominio y la imagen.

Una correspondencia f: X $\longrightarrow$ Y se dice que es una **aplicación** cuando todo elemento de X tiene UNA Y SOLO UNA imagen en Y:

$$\forall\, a \in X,\ \exists_1\, b \in Y \text{ tal que } f(a)=b$$

(para cada $a \in X$ existe un único $b \in Y$ tal que $(a, b) \in G_f$)

Ejercicio 15: Determinar si son aplicaciones las siguientes correspondencias:



Ejercicio 16: ¿Es una aplicación alguna de las correspondencias del ejercicio 14?

De acuerdo con la definición previa, las expresiones $x^2 + 2x - 3$, sen(x), ln(x),… no son aplicaciones por si solas pues no se ha especificado los conjuntos X e Y. Sin embargo, las dos primeras pueden ser definidas como aplicaciones f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asocian cada número real x al número $f(x) = x^2 + 2x - 3$ y $g(x) = \text{sen}(x)$, respectivamente. Por otra parte, la tercera no puede usarse para definir una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, ya que ln(x) no está definido para todos los números reales. Con este ejemplo hacemos hincapié en la importancia de los conjuntos X e Y en la definición de aplicación.

El conjunto X es ahora llamado **dominio**, y el conjunto Y **codominio** o **conjunto final**, de f. Si $(a, b) \in G_f$ el elemento $b \in Y$ es llamado la **imagen** de $a \in X$ y escribimos $b = f(a)$.

A una aplicación también se le llama **función** o **transformación**.

Dadas dos aplicaciones f, g diremos que son **iguales** si tienen iguales conjunto inicial y final y el mismo grafo:

$$f = g \Leftrightarrow f, g: X \longrightarrow Y \text{ y } f(a) = g(a), \ \forall a \in X.$$

<u>Ejemplos</u>:

A) Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. La **aplicación constante** $c: X \longrightarrow X$ definida por $c(a) = x_0$, para cada $a \in X$.

B) Sea X un conjunto. La **aplicación identidad** $id_X: X \longrightarrow X$ definida por $id_X(a) = a$, para cada $a \in X$.

C) Sea X un conjunto y $A \subseteq X$. La **aplicación inclusión** $i: A \longrightarrow X$ definida por $i(a) = a$, para cada $a \in A$.

Dada una aplicación f: $X \longrightarrow Y$ y $A \subseteq X$, llamamos **imagen de A por f**, $f_*(A)$, al subconjunto de Y formado por todas las imágenes por f de los elementos de A

$$f(A) = f_*(A) = \bigcup_{a \in A} f(a) = \{ f(a) \;/\; a \in A \}$$

Si A = X, entonces f(X) es el **rango** o el **conjunto imagen de f.**

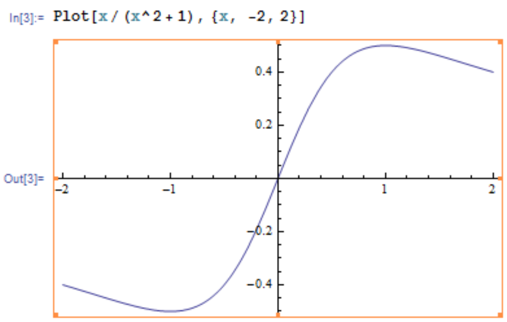
Si $C \subseteq Y$, llamamos **imagen inversa de C por f** o **preimagen de C por f**, $f^*(C)$, al subconjunto de X formado por todos los elementos cuya imagen por f pertenecen a C

$$f^{-1}(C) = f^*(C) = \{ a \in X \;/\; f(a) \in C\}$$

Ejercicio 17: Si $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ y $x_0 = 1$ en los ejemplos previos. Obtener la imagen de B por c, id e i, y la preimagen de C por c, id e i donde B = (–2, 3) y C = [0, 3).

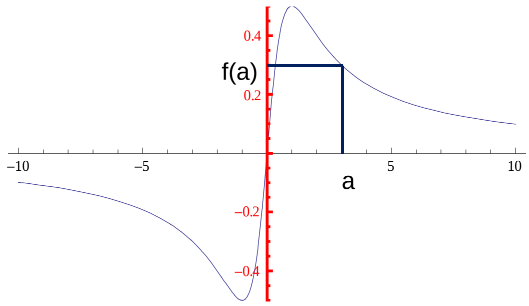
En funciones reales de variable real para obtener el conjunto imagen determinamos los números $y \in Y$ tales que la ecuación y = f(x) tiene solución para algún $x \in X$.

Ejercicio 18: Encontrar el conjunto imagen de la función real f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x / (x^2 + 1)$.



En este caso podemos encontrar el conjunto im(f) ya que la ecuación y = f(x) es simple. En general, será mas difícil.

El conjunto imagen de una función se puede encontrar fácilmente de forma geométrica. Para cada elemento a de X, su imagen f(a) se puede determinar a partir de la gráfica de la función dibujando una línea vertical desde a hasta que toca la gráfica y desde este punto de la gráfica otra línea horizontal hasta el eje OY. Por tanto, el conjunto imagen de f es el conjunto de puntos del eje OY al que se llega desde la gráfica con este método.



Tipos de aplicaciones

Una aplicación se puede clasificar de acuerdo con las propiedades que tiene. Estas propiedades describen el comportamiento de la función. Dada una aplicación $f: X \longrightarrow Y$, diremos que es:

A) f es **inyectiva** si cada elemento de Y es imagen a lo mas de un elemento de X, es decir,

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'), \quad (\text{equiv. } f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

B) f es **sobreyectiva** si todo elemento de Y es imagen al menos de un elemento de X (im(f) = Y), es decir:

$$\forall\, b \in Y, \exists\, a \in X \text{ tal que } f(a)= b,$$

Tipos de aplicaciones

C) f es **biyectiva** (una **biyección** o una **correspondencia uno a uno**) si es inyectiva y sobreyectiva a la vez,

$$\forall\, b \in Y,\ \exists_1\, a \in X \text{ tal que } f(a)= b.$$

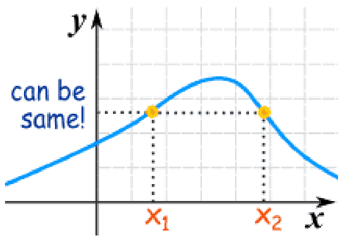
Toda aplicación biyectiva de un conjunto en si mismo se le llama **permutación**.

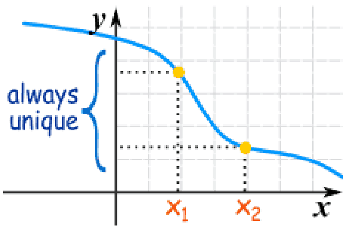
Ejercicio 19: ¿Qué tipo de aplicaciones son las de los ejercicios previos?

Si f: X $\longrightarrow$ Y es una aplicación donde X e Y son subconjuntos de $\mathbb{R}$, lo mismo que podemos obtener el conjunto imagen a partir de la gráfica de la función, también es posible saber si la aplicación es inyectiva o sobreyectiva.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Si f no es inyectiva, existirán dos elementos x_1 y x_2 en X tales que $f(x_1) = f(x_2) = b$. Es decir, la línea horizontal a la altura b se encuentra con la gráfica en los puntos que se corresponden con $x = x_1$ y con $x = x_2$ del eje OX.

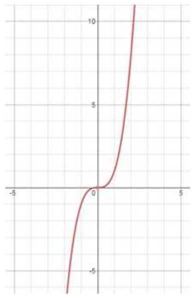




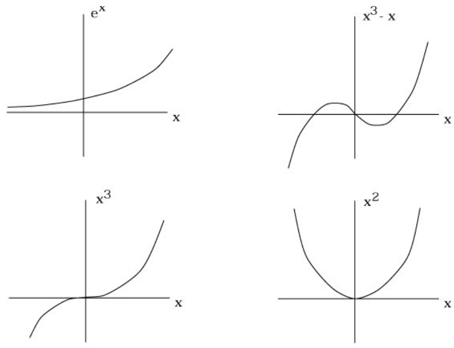
Si f is inyectiva esa situación nunca se dará. En otras palabras, una línea horizontal que pase por cada punto b en Y del eje OY no se encontrará con la gráfica de la función en más de un punto.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Finalmente, f es sobreyectiva si y sólo si cada línea horizontal pasando por un punto del eje OY se encuentra a la gráfica de la función al menos una vez.



Ejercicio 20. ¿Qué tipo de aplicaciones son las de las siguientes gráficas?



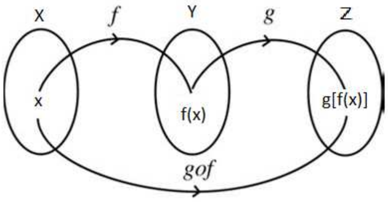
Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Proposición 2.12. Sea f: X ⟶ Y una aplicación entre conjuntos finitos, se tiene:

i) si f es inyectiva entonces card(X) ≤ card(Y),

ii) si f es sobreyectiva entonces card(X) ≥ card(Y), y

Dadas f: X ⟶ Y y g: Y ⟶ Z aplicaciones, podemos definir una correspondencia h: X ⟶ Z tal que h(x) = g(f(x)). Así definida h es también una aplicación que llamamos **aplicación compuesta de f y g** y se denota por h = g o f.



En general, dom(g) no necesariamente ha de ser igual a im(f), solo es necesario que im(f) ⊆ dom(g).

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Ejercicio 21. Sean f, g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \cos(x)$. Calcular $g \circ f$ y $f \circ g$ y comprobar que la composición no satisface la propiedad conmutativa.

Proposición 2.13. La composición de aplicaciones satisface la propiedad asociativa, es decir, si $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ y $h: Z \longrightarrow T$ entonces $h \text{ o } (g \text{ o } f) = (h \text{ o } g) \text{ o } f$.

Proposición 2.14. Dada $f: X \longrightarrow Y$ aplicación, se tiene $f \text{ o } Id_X = f$ y $Id_Y \text{ o } f = f$.

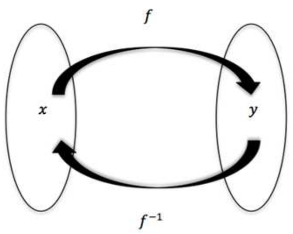
Proposición 2.15. Sean $f: X \longrightarrow Y$ y $g: Y \longrightarrow Z$ aplicaciones. Entonces:

i) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

Ejercicio 22. Sea f, g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3x + 3$ y $g(x) = \frac{x}{3} - 1$. Comprobar que $g \circ f = Id = f \circ g$, es decir, una función deshace lo que hace la otra.

Dada una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ (es decir, $f = (X, Y, G)$) existe una correspondencia de Y en X, $f^{-1} = (Y, X, G_{inv})$, de manera que $(b, a) \in G_{inv}$ si y sólo si $(a, b) \in G$. Además si f es biyectiva, entonces f^{-1} es una aplicación, también biyectiva, que se llama **inversa de f**.



Proposición 2.14. Sean X e Y conjuntos, f: X $\longrightarrow$ Y y g: Y $\longrightarrow$ X aplicaciones. Entonces:

i) Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} \circ f = Id_X$ y $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

ii) Si $g \circ f = Id_X$, entonces f es inyectiva y g sobreyectiva.

iii) Si $g \circ f = Id_X$ y $f \circ g = Id_Y$, entonces f y g son biyectivas y $g = f^{-1}$. (Demostración ejercicio 2.44)

Proposición 2.15. Sean X, Y y Z conjuntos, f: X $\longrightarrow$ Y y g: Y $\longrightarrow$ Z aplicaciones biyectivas, entonces g o f: X $\longrightarrow$ Z es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. (Demostración ejercicio 2.45)

Sean I y X conjuntos, llamamos **familia de elementos de X indizada en I** a toda aplicación f: I $\longrightarrow$ X tal que $f(i) = x_i$. Usaremos la notación $(x_i)_{i\in I} = \{ x_i / i \in I\}$. Si I es finito se dice que la familia es **finita** y si I = {1, 2,..., n} se escribe $(x_i)_{1\leq i \leq n}$.

Sea X es un conjunto y $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{P}(X)$ indizada en I, es decir, una aplicación f: I $\longrightarrow$ $\mathcal{P}(X)$ tal que $f(i) = A_i$. Llamamos **unión** de la familia anterior al conjunto

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{ x \in X / \exists i\in I \text{ t. q. } x \in A_i \}.$$

De igual forma, llamamos **intersección** de la familia al conjunto

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{ x\in X / x \in A_i, \forall i\in I \}.$$

Sea X un conjunto. Una **partición** de X es una familia $(A_i)_{i\in I}$ de elemento de $\mathcal{P}(X)$ satisfaciendo:

i) $A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$ (cada conjunto es no vacio),

ii) Si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$, (A_i son disjuntos dos a dos),

iii) $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ (la unión de todos ellos es el conjunto X).

Ejercicio 21. Sea X ={x / x es una letra de "mathematics"}. Obtener una partición de X con tres subconjuntos y tal que uno de ellos sea el conjunto A ={x / x es una vocal en "mathematics"}. ¿Es posible obtener una partición de X con diez elementos?

4. RELACIONES BINARIAS

En el mundo que nos rodea hay muchas relaciones. A nivel humano, ejemplos son padres-hijos, marido-mujer, estudiante-profesor, etc. También existe relaciones entre números, la igualdad (=) y menor que (<) son ejemplos de relaciones entre números. De hecho, relaciones pueden definirse entre cualquiera dos conjuntos; y las conoceremos como relaciones.

Sea X un conjunto. Llamamos **relación binaria** en X a todo subconjunto R del producto cartesiano $X \times X$, es decir,

$$R \subseteq X \times X.$$

Diremos que "**a está relacionado con b por R**", y lo notaremos por a R b, si y solo si $(a, b) \in R$. Si $(a, b) \notin R$, escribiremos $a \not R b$.

Sea R una relación binaria en el conjunto X, diremos que:

- R es **reflexiva**, si a R a para todo $a \in X$.
- R es **simétrica**, siempre que a R b, se tiene que b R a.
- R es **antisimétrica**, siempre que a R b y b R a, se tiene que a=b (si $a \neq b$ entonces $a \not R b$ o $b \not R a$).
- R es **transitiva**, siempre que a R b y b R c, se tiene que a R c.

Nótese que para demostrar que una relación R en un conjunto satisface una de las propiedades previas, necesitamos demostrar que la propiedad se tiene para elementos arbitrarios de X. Sin embargo, para mostrar que R no satisface una propiedad, sólo necesitamos encontrar un elemento o elementos particulares del conjunto (un contra-ejemplo) que no la satisfaga.

Sea R una relación binaria en el conjunto X, diremos que:

- R es **reflexiva**, si a R a para todo $a \in X$.
- R es **simétrica**, siempre que a R b, se tiene que b R a.
- R es **antisimétrica**, siempre que a R b y b R a, se tiene que a=b (si $a \neq b$ entonces a $\not{R}$ b o b $\not{R}$ a).
- R es **transitiva**, siempre que a $\cancel{R}$ b y b $\cancel{R}$ c, se tiene que a R c.

Ejercicio 22. Sea X ={a, b, c, d}. Estudiar las propiedades que satisfacen las siguientes relaciones binarias:
i) R_1 = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (c, c), (b, c), (b, d)}.
ii) R_2 = {(a, a), (a, b), (c, c), (b, a), (b, b), (d, d)}.
iii) R_3 = {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}.
iv) $R_4 = \emptyset$
iv) $R_5 = X \times X$

4.1 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria R en X se dice que es una **relación de equivalencia** si verifica simultáneamente las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejercicio 23. Sea $X = \mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y definimos en X las relaciones

$$x \, R_1 \, y \text{ si y sólo si } x < y$$
$$x \, R_2 \, y \text{ si y sólo si } x^2 = y^2$$

¿Es alguna de ellas una relación de equivalencia?

Dada R una relación de equivalencia sobre un conjunto X y $a \in X$, definimos la **clase de equivalencia** de a al subconjunto de X formado por todos los elementos relacionados con a, es decir,

$$\bar{a} = [a] = \{ x \in X \, / \, x \, R \, a \}.$$

Si $x \in [a]$, entonces x es un **representante** de la clase [a].

4.1 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Ejercicio 24. Sea $X = \mathbb{Z}^+$, los números enteros positivos, y sea R la siguiente relación binaria en X

x R y si y sólo si x – y es un múltiplo de 2

Comprobar que R es una relación de equivalencia y calcular sus clases de equivalencia.

Proposición 2.17. Sea R una relación de equivalencia en X. Entonces a R e si y solo si $\bar{a} = \bar{e}$. (Demostración ejercicio 2.49)

Sea R una relación de equivalencia en X. Llamaremos **conjunto cociente de X por la relación R**, y lo notaremos por X/R, al conjunto de todas las clases de equivalencia en X determinadas por R

$$X/R = \{\bar{a} \,/\, a \in X\}$$

4.1 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Ejercicio 25. Calcular el conjunto cociente de $\mathbb{Z}^+$ por la relación dada en el ejercicio previo.

Además la aplicación $p: X \longrightarrow X/R$, definida por $p(a) = \bar{a}$, para todo $a \in X$ es sobreyectiva y recibe el nombre de **proyección canónica**.

Proposición 2.18. X/R determina una partición en X. (Demostración ejercicio 2.51)

Proposición 2.19. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición del conjunto X, entonces la relación R definida por: a R b si y sólo si $\exists j \in I$ tal que $a, b \in A_j$, es una relación de equivalencia en X y el conjunto cociente $X/R = \{A_i\}_{i\in I}$.

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Una relación binaria R sobre un conjunto X diremos que es una **relación de orden** si verifica simultáneamente las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Diremos que X es un conjunto **ordenado** si hay una relación de orden definida en X.
Generalmente escribimos $a \leq b$ y se lee "a es menor o igual que b" cuando $(a, b) \in R$.

Ejercicio 27. Estudiar si las siguientes relaciones binarias en $\mathbb{Z}$ son relaciones de orden:

a R b si y sólo si $a \leq b$
a R b si y sólo si $a < b$
a R b si y sólo si a divide a b (a es un divisor de b)

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Dos elementos $a, b \in X$ se dicen **comparables** por la relación de orden R si y solo si $a \leq b$ o bien $b \leq a$ ($(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$). En otro caso se dice que son **no comparables.**

Ejercicio 28. Dar un ejemplo, si es posible, de dos elementos comparables y dos no comparables $\mathbb{Z}$ con las relaciones de orden del ejercicio previo.

Una relación de orden R en X, se dice que es un **orden total** si cualquier par de elementos de X son comparables. En tal caso se dice que X es un conjunto **totalmente ordenado**. En otro caso se dice que R es un **orden parcial** y que X es un conjunto **parcialmente ordenado**.

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Sea R una relación de orden en X, un subconjunto no vacío A de X se llama **cadena** cuando todo par de elementos de A son comparables por la relación R de X, es decir, la relación de orden R restringida a A es un orden total.

Cuando el conjunto X ordenado por la relación *R* es finito, el orden puede ser representado gráficamente mediante un diagrama conocido como **diagrama en árbol** o **diagrama de Hasse**. En tales diagramas los elementos se representan por puntos y cuando dos elementos son comparables, los puntos que los representan se unen mediante una flecha de manera que si $a \leq b$, en el diagrama aparecerá una flecha ascendente desde el punto que representa al elemento a hasta el punto que representa al punto b.

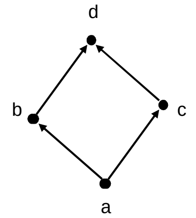
Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

4.2 RELACIONES DE ORDEN

El diagrama de Hasse para X = {a, b, c, d} ordenado mediante la relación de orden

R = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)}

está dado por:



Obsérvese que omitimos las fechas que se obtiene por transitividad.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Ejercicio 28. En el conjunto potencia de {a, b, c} definimos la relación binaria dada por la inclusión. Comprobar que es una relación de orden y dibujar el diagrama de Hasse.

Sea X un conjunto ordenado por una relación de orden R y $A \subseteq X$. Diremos que A está **acotado superiormente** si existe un $x \in X$ tal que $a \leq x$ para todo $a \in A$. A tal elemento x se le llama **cota superior** de A.
Diremos que A está **acotado inferiormente** si existe un $y \in X$ tal que $y \leq a$ para todo $a \in A$. A tal elemento y se le llama **cota inferior** de A.

Si A está acotado inferior y superiormente se dice que A está **acotado**.

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Se dice que un elemento $m \in A$ es el **máximo** de A si es una cota superior de A. De igual forma un elemento $n \in A$ es el **mínimo** de A si es un cota inferior de A.

Proposición 2.20. Si existe máximo de un conjunto (resp. mínimo) es único.

El máximo (mínimo), si existen, son los elementos representados en lo más alto (bajo) del diagrama de Hasse.

Ejercicio 29. En el conjunto potencia de X = {a, b, c, d} con la relación de inclusión, estudiar si el subconjunto

$$B = \{A \subseteq X \,/\, \mathrm{card}(A) \text{ es impar}\}$$

está acotado. ¿Existe máximo o mínimo?

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Un conjunto ordenado X se dice **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento mínimo.

Proposición 2.21. Todo conjunto bien ordenado está totalmente ordenado.

Sea $A \subseteq X$. Llamaremos **supremo** de A, sup(A), al mínimo (si existe) del conjunto de cotas superiores de A y llamaremos **ínfimo** de A, inf(A), al máximo (si existe) del conjunto de cotas inferiores de A.

4.2 RELACIONES DE ORDEN

Sea X un conjunto ordenado. Un elemento $x \in X$ se dice **maximal** de X si la relación $x \leq a$ para algún $a \in X$, implica que $x = a$. Un elemento $y \in A$ se dice **minimal** en X si la relación $b \leq y$ para algún $b \in X$, implica que $y = b$.

Teniendo en cuenta que $a \leq b$ significa "a precede o es igual a b" en algún sentido, entonces un elemento es maximal si no existe un elemento "mayor" en el conjunto. De forma similar un elemento es minimal si no existe un elemento "menor" en el conjunto.

Ejercicio 30. En el conjunto partes de $X = \{a, b, c, d\}$ con la relación de inclusión, sea $B = \{A \subseteq X \ / \ \text{card}(A) \text{ es impar}\}$. ¿Existe supremo o ínfimo? Calcular los elementos maximales y minimales de B.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.