TEMA I: FUNDAMENTOS DE LÓGICA

OBJETIVOS GENERALES

1. **Hacer que el alumno asimile la enorme utilidad de precisar el lenguaje matemático**
2. **Conocer el concepto de razonamiento válido y de los distintos tipos de demostraciones.**

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Manejar el concepto de enunciado simple y compuesto.
- ✓ Traducir enunciados a expresiones lógicas.
- ✓ Conocer los principales conectores lógicos y manejar sus correspondientes tablas de verdad.
- ✓ Construir con soltura tablas de verdad de formas enunciativas compuestas.
- ✓ Averiguar si una forma enunciativa es una tautología o una contradicción.
- ✓ Averiguar si dos proposiciones son lógicamente equivalentes o una de ellas implica lógicamente a la otra.
- ✓ Manejar las principales reglas de manipulación y sustitución para probar que dos formas enunciativas son equivalentes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ✓ Construir las formas normales de cualquier forma enunciativa (Sesión 4 de prácticas).
- ✓ Conocer los distintos conjuntos adecuados de conectivas.
- ✓ Saber determinar una forma equivalente a una dada en la que sólo aparezcan conectivas de un determinado conjunto adecuado de conectivas.
- ✓ Averiguar si una argumentación es válida.
- ✓ Conocer los distintos tipos de demostración.

BIBLIOGRAFÍA

- **"Matemática discreta para la computación". M.A. García-Muñoz. Servicio de Publicaciones Univ. Jaén. 2010.**
- **"Lógica para matemáticos". A. G. Hamilton. Paraninfo, 1981. (Capítulo 1).**
- "Matemática discreta y combinatoria". R. P. Grimaldi. Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
- "Matemáticas especiales para computación". J.L. García Valle. McGraw-Hill, 1991.
- "Introducción a la lógica simbólica". V. Rodríguez Lozano. Akal, 1985.
- "Matemática discreta con aplicaciones". Thomas Koshy, Elsevier Academic Press, 2004.

DESARROLLO TEÓRICO

1. INTRODUCCIÓN

"Lógica es el estudio de los principios y técnicas de razonamiento. Se originó en la antigua Grecia a través de el filósofo Aristóteles, quien con frecuencia se le conoce como el padre de la lógica. Sin embargo, no fue antes del siglo XVII cuando se usaron los símbolos para su desarrollo. El filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz introdujo el simbolismo en la lógica. No obstante, no se tuvieron contribuciones importantes en lógica simbólica hasta mediados del siglo XIX cuando George Boole (1815-1864), un matemático inglés, quien a los 39 años publicó su excepcional trabajo en lógica simbólica "An investigation of the Laws of Thought".

La lógica juega un papel fundamental en el desarrollo de cada área del conocimiento, especialmente de la matemática y de la ciencia de la computación. Los informáticos, por ejemplo, emplean la lógica para desarrollar lenguajes de programación y para determinar si un programa actúa correctamente. Los ingenieros electrónicos aplican la lógica en el diseño de chips de los ordenadores."

Traducción de

"Discrete Mathematics with applications", Thomas Koshy

El hombre en todo momento pretende tener elementos que le ayuden a comprender lo que se le dice, comprobar si la información que se le trasmite es correcta y, sobre todo, averiguar si el cómo se le transmite una información sigue alguna regla que le sirva para deducir si la información que se le comunica es correcta.

Lógica es una palabra que tiene como raíz el vocablo griego "*logos*" cuyo significado es "palabra", "idea" o "razón". Podemos, por tanto, definir Lógica como la ciencia que estudia las formas de razonamiento válidas. Según el diccionario de la lengua española de la RAE "lógica" es la disciplina que expone las leyes, modos y formas del conocimiento científico.

Aquí estudiaremos los fundamentos de la lógica, sus símbolos y las reglas que nos ayudaran a pensar sistematicamente, expresarnos con términos precisos y concisos y a construir argumentaciones válidas.

Problemas interesantes que podemos proponer en este tema:

- Consideremos las siguientes dos oraciones, ambas ciertas:

  Hay más residentes en New York que cabellos sobre la cabeza de cualquier residente. Ningún residente es totalmente calvo. ¿Cuál es tu conclusión: Es cierto que al menos dos residentes tienen el mismo número de cabellos? (R.M. Smullyan, 1978).
- Hay dos tipos de habitantes, "caballeros" y "picaros", en una isla. Los caballeros siempre cuentan la verdad, mientras los pícaros siempre mienten. Cada habitante es un caballero o un pícaro. Tom y Dick son dos habitantes de la isla. Tom dice, "Al menos uno de nosotros es un pícaro". ¿Qué son Tom y Dick? ¿Qué son ellos si Tom dice, "O yo soy un pícaro o Dick es un caballero"? (R.M. Smullyan, 1978).

Traducción de

"Discrete Mathematics with applications", Thomas Koshy

La Lógica se divide en dos ramas, la llamada **Lógica Material** y **la Lógica Formal**.

La primera trata de averiguar la veracidad de los términos y proposiciones de un argumento, es decir, se ocupa del contenido de las argumentaciones. Sin embargo, la Lógica Formal está interesada en la forma o estructura de los razonamientos, esto es, trata de encontrar el método correcto para derivar una verdad a partir de otra.

Dentro de esta última, aparece la **Lógica Matemática**, cuyo fundador fue Giuseppe Peano (1858-1932), aunque hoy en día se considera que el matemático alemán Gottlob Frege es el padre de esta rama de la Lógica, que proporciona un instrumento para investigar los fundamentos de la matemática mediante un lenguaje simbólico artificial y haciendo abstracción de los contenidos.

Reseña histórica

A Aristóteles (s. IV a.c.) se debe el primer sistema de lógica de predicados con el que trato de identificar las formas del razonamiento humano, para así crear criterios para discernir en las discusiones filosóficas. Esta línea, que se conoce como **lógica clásica**, fue seguida por otros pensadores entre ellos Santo Tomas de Aquino (s. XIII) que la usó como vehículo de discusiones teológicas.

La siguiente etapa comienza en el s. XVII donde la **Lógica matemática** o **Lógica simbólica** comienza a perfilarse con Leibniz quien expresó su deseo de extender la aplicación de la lógica a las matemáticas. Su ambición era encontrar un procedimiento de comprobación de teoremas, sin embargo no pudo cumplir su propósito.

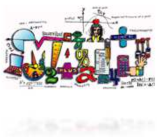
Durante los siguientes 150 años ningún matemático le dio importancia a los estudios de Leibniz pero a finales del siglo XIX, la lógica matemática se constituyo como ciencia con los trabajos de **Boole** y **Fregge**. El primero desarrollo un modelo algebraico de la lógica proposicional y Fregge formalizó la lógica de predicados, desarrollando un lenguaje formal e introduciendo el concepto de cuantificadores. En esta misma época tenemos que mencionar a **Augustus de Morgan**, quien formuló una herramienta fundamental del cálculo lógico como es la ley de dualidad de la conjunción y la disyunción (leyes de Morgan). El comienzo del siglo XX supuso un auge de la lógica, Russell con la ayuda de Whitehead se propuso mostrar que la aritmética era una extensión de la lógica, para contestar al desafío que Hilbert hizo sobre la axiomatización de las matemáticas. Sin embargo, fue el matemático Gödel en 1936 quien contestó negativamente a este desafío.

La tercera época de la lógica comienza con la aparición de los ordenadores. Los ordenadores estaban resolviendo problemas en muchos campos y era natural que se pretendiera utilizarlos para demostrar automáticamente los teoremas. Esta nueva época a producido mucho resultados en el campo de las aplicaciones prácticas como la elaboración de estrategias de programación que aprovecharon los conocimientos de la lógica. También se elaboraron lenguajes de programación especialmente adecuados a la programación lógica, como por ejemplo el Prolog.

Hoy en día, la lógica proposicional, que es la que estudiaremos, principalmente, en este capítulo, tiene una importancia singular dada su aplicación en los llamados "circuitos lógicos" de uso en electrónica e informática.

Para terminar os muestro donde se usa la lógica:

- En matemáticas:



  - ✓ Dar un significado preciso a los teoremas.
  - ✓ Distinguir entre argumentaciones válida o no válidas.
  - ✓ Dar reglas de razonamiento “correcto”.

- En informática:

  - ✓ Obtener nuevos datos/conocimiento a partir de hechos existentes.
  - ✓ Diseñar circuitos de computadoras.
  - ✓ Construir programas informáticos.
  - ✓ Verificar la corrección de los programas y del diseño de los circuitos.

2. FORMAS ENUNCIATIVAS Y CONECTIVAS. TABLAS DE VERDAD

La Lógica, o al menos la **Lógica Matemática**, examina las reglas de deducción con precisión matemática. Esta precisión necesita que el lenguaje que usemos no de lugar a confusiones, lo que conseguimos utilizando un lenguaje simbólico donde cada símbolo tenga un significado preciso.

Dada una frase en castellano, en primer lugar, podemos observar si se trata de una frase **simple** (un sujeto + un predicado) o de una frase **compuesta** (formada a partir de frases simples por medio de algún término de enlace (conectiva)).

En segundo lugar, vamos a suponer que todas las frases simples pueden ser verdaderas o falsas. Ahora bien, en castellano hay frases que no son ni verdaderas, ni falsas (exclamaciones, ordenes, preguntas), por tanto, tenemos que usar otro término, hablaremos de **enunciados** o **proposiciones** (sentencias que pueden ser verdaderas o falsas). Así, distinguimos entre **enunciados simples** (**atómicos**) o **enunciados compuestos** (**moleculares**).

Ejercicio 1: ¿Son las siguientes oraciones enunciados? ¿Cuáles son simples y cuáles compuestos?

a) Prohibido fumar en este lugar.
b) Jaen es una pequeña ciudad de Andalucia.
c) ¿Qué hora es?
d) 5 – 3 = 2.
e) Si 1 + 1 es cero, entonces no entiendo matemáticas.
f) x + 2y = 3.
g) Los extraterrestres no son de Marte.

Denotamos los enunciados simples por letras mayúsculas A, B, C, D,... .
Para construir enunciados compuestos introducimos símbolos para las **conectivas** o nexos de unión:

CONECTIVAS	**SIMBOLOS**
Negación de A	~A
A y B	$A \wedge B$
A o B	$A \vee B$
si A, entonces B	$A \rightarrow B$
A si, y sólo si B	$A \leftrightarrow B$

Llamaremos **esqueleto lógico** de un enunciado compuesto al resultado de simbolizar dicho enunciado. Nótese que un "esqueleto lógico" puede ser común a varios enunciados diferentes. Esto nos permite analizar las deducciones, pues una deducción tiene que ver con las formas del enunciado, y no con su significado. Por tanto, estudiamos formas enunciativas y no enunciados particulares.

Example

Si Messi es un futbolista entonces es el mejor futbolista del mundo.
Messi es un futbolista
∴ Messi es el mejor futbolista del mundo.

Messi es un futbolista
∴ Messi es el mejor futbolista del mundo.

Ejercicio 2: Para los siguientes enunciados, distinguir entre simples o compuestos. Obtener la forma simbólica de los enunciados compuestos:

(a) Jaen es una pequeña ciudad en Andalucia, pero es muy bonita.
(b) Un número es primo si y sólo si no tiene divisores primos.
(c) Si mañana hace calor, llamaré a mis amigos e iremos a la piscina.
(d) $x - y = y - x$.
(e) Si x es mayor que z y z es mayor que y, entonces x es mayor que y.
(f) Si $a > 3$, entonces $a + b > 3$ siempre que b no sea un número negativo.
(g) Los gusanos llegan a ser mariposas.

Denotaremos con letras minúsculas p, q, r,... a las **variables de enunciado** que designan enunciados simples arbitrarios. Estas variables nos permitirán describir las propiedades que poseen los enunciados y las conectivas. Como todo enunciado es verdadero o falso, una variable de enunciado tomará uno u otro de entre estos dos **valores de verdad**: V (verdadero) o F (falso).

Nosotros no decidiremos el valor de verdad de un enuncido simple. Eso no es lo que hace la lógica. En su lugar, nosotros combinaresmos enunciados simples mediante lo que llamamos **conectivas lógicas** construyendo enunciados compuestos y estudiaremos como los valores de verdad de un enunciado compuesto depende de los valores de verdad de los enunciados simples que contiene.

Para definir con precisión el significado de los símbolos que representan las distintas conectivas, debemos conocer con precisión el significado de dichas conectivas. Consideremos una a una todas las conectivas:

Negación *(conectiva unitaria)*
"Hoy es lunes" ⇒ "No se da el caso de que hoy es lunes"
(Usualmente escribiremos: "Hoy no es lunes"
Sea A un enunciado, denotaremos por ~A a su negación. Si A toma el valor verdadero (falso resp.) entonces ~A tomará el valor falso (verdadero resp.) siendo irrelevante el significado de A. Esto se puede describir mediante la tabla de verdad:

p	~p
V	F
F	V

Esta conectiva ~ da lugar a una función $f^{\sim}$ del conjunto {V, F} en si mismo definida por $f^{\sim}(V) = F$, $f^{\sim}(F) = V$.

Conjunción *(conectiva binaria)*

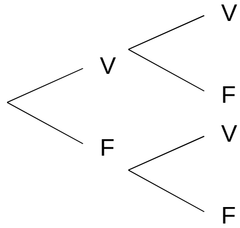
"Hoy es lunes"

"Está soleado" $\Rightarrow$

"Hoy es lunes y está soleado"

Como antes, los valores de verdad que toman el enunciado A $\wedge$ B depende sólo de los valores de verdad que toman A y B. En su tabla de verdad necesitamos considerar cuatro posibles casos:

Valor de verdad de p   Valor de verdad de q



p	q	p ∧ q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	F

En la tabla tenemos una fila para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad de p y q. La última columna nos da los valores de verdad de p $\wedge$ q

Conjunción *(conectiva binaria)*

La conectiva $\wedge$ nos define una función de verdad f^ de dos argumentos:

$$f\,^\wedge : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$$
$$f\,^\wedge(V, V) = V, \quad f\,^\wedge(V, F) = F,$$
$$f\,^\wedge(F, V) = F, \quad f\,^\wedge(F, F) = F.$$

Conectar dos enunciados usando un "y" no es la única forma de formar conjunciones. Los siguientes ejemplos también son conjunciones:

"Hoy es lunes pero está soleado"

"Aunque hoy es lunes, está soleado"

"Hoy es lunes mientras que está soleado"

p	q	p ∧ q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	F

Disyunción

"A Juan le gusta la leche",
"A Juan le gusta el te" $\Leftrightarrow$ "A Juan le gusta la leche o a Juan le gusta el te"

(Usualemente escribimos:"A Juan le gusta la leche o el te")

Hemos usado A $\vee$ B para denotar A o B, pero hay dos usos distintos de la palabra "o" en castellano. "A o B" puede significar "A o B o ambos", o bien "A o B pero no ambos". Para mantener precisión en nuestro lenguaje simbólico, elegimos el primero para el símbolo $\vee$ (**disjunción inclusiva** o simplemente **disjunción**). Su tabla de verdad será:

p	**q**	**p $\vee$ q**
V	**V**	V
V	**F**	V
F	**V**	V
F	**F**	F

Cuidado con los enunciados con "o" en el lenguaje natural:
"Haz tus deberes o suspenderás el examen"

Disyunción

De nuevo tenemos una función de verdad con dos argumentos:

$$f^{\vee}:\{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$$
$$f^{\vee}(V, V) = V, \quad f^{\vee}(V, F) = V,$$
$$f^{\vee}(F, V) = V, \quad f^{\vee}(F, F) = F.$$

"José jugará al futbol mañana a las 3 p.m.",
"José visitará a su madre mañana a las 3 p.m."
"José jugará al futbol o visitará a su madre mañana a las 3 p.m."

Observación: El significado de la palabra "o" en el ejemplo previo es uno pero no ambos. Podemos simbolizar "A o B pero no ambos" (**o exclusivo, disjunción exclusiva, A $\oplus$ B**), como $(A \vee B) \wedge (\sim (A \wedge B))$.

Condicional

Sean A y B dos enunciados, Denotaremos por $A \rightarrow B$ para representar el enunciado "A implica B" o "si A entonces B". Ahora el castellano no nos ayudará a construir una tabla de verdad.

De nuevo, $\rightarrow$ define la función de verdad $f^{\rightarrow}$:
$f^{\rightarrow} : \{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$
$f^{\rightarrow}(V, V) = V$, $f^{\rightarrow}(V, F) = V$,
$f^{\rightarrow}(F, V) = F$, $f^{\rightarrow}(F, F) = V$.

p	**q**	**p → q**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Lo extraño de esta tabla es la asignación del valor V cuando p toma el valor F. Nótese que en matemáticas este tipo de enunciados no nos dicen nada a partir de la falsedad de A.

Condicional

Para ilustrar lo anterior, usamos un enunciado matemático muy común:
"Para cada número entero, si $n > 2$ entonces $n^2 > 4$"
Claramente es un resultado verdadero para números enteros. Sería esperable considerar la afirmación "si $n > 2$ entonces $n^2 > 4$" verdadera independientemente del valor que tome n. Sin embargo, valores diferentes de n nos proporcionan ejemplos de todos las posibles combinaciones de verdad para "$n > 2$" y "$n^2 > 4$", excepto para la combinación VF.

p	**q**	**p → q**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Conditional

Los condicionales se pueden construir de varias formas. Las siguientes son algunas de los posibles condicionales:

"Si p, entonces q"
"Si p, q"
"q si p"
"p implica q"
"q se sigue de p"
"una condición suficiente para q es p"
"una condición necesaria para p es q"
"q a menos que no p"
"p es suficiente para q"
"q cuando p"
"p sólo si q"

Bicondicional

Sean A y B dos enunciados. Denotamos el enunciado "A si y sólo si B" o "A equivale a B" por $A \leftrightarrow B$.

La conectiva $\leftrightarrow$ nos define una función de verdad $f^{\leftrightarrow}$ de dos argumentos:
$f^{\leftrightarrow}:\{V, F\} \times \{V, F\} \longrightarrow \{V, F\}$
$f^{\leftrightarrow}(V, V) = V$, $f^{\leftrightarrow}(V, F) = F$,
$f^{\leftrightarrow}(F, V) = F$, $f^{\leftrightarrow}(F, F) = V$.

p	**q**	**p ↔ q**
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

En lo que sigue veremos que el valor de verdad de una forma enunciativa compuesta depende de los valores de verdad de los enunciados simples o de las variables de enunciado que la formen.

Una **forma enunciativa** es una expresión en la que intervienen variables de enunciado y conectivas, que se construye utilizando las siguientes reglas:

(i) Cualquier variable de enunciado es una forma enunciativa.

(ii) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son formas enunciativas, entonces $(\sim\mathcal{A})$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ y $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ son formas enunciativas.

Ejercicio 3. Decide si las siguientes expresiones son formas enunciativas:

a) $(r \vee (\sim (a \to q)))$.

b) $(p \wedge (q \neq r))$.

La **tabla de verdad** de cualquier forma enunciativa es la tabla que indica, para cada asignación de valores de verdad de las variables involucradas, el valor que toma dicha forma y se obtiene usando las tablas de verdad de las conectivas.

Esta tabla de verdad es una representación gráfica de una **función de verdad**, cuyo número de argumentos es igual al número de variables de enunciado distintas que intervienen en la forma enunciativa.

La tabla de verdad asociada a una forma enunciativa se construye a partir del procedimiento usado para construir dicha forma.

Ejercicio 4. Obtener las formas enunciativas de los enunciados compuestos del ejercicio 2. Calcular sus tablas de verdad.

Ejercicio 2: Para los siguientes enunciados, distinguir entre simples o compuestos. Obtener la forma simbólica de los enunciados compuestos:

(a) Jaen es una pequeña ciudad en Andalucia, pero es muy bonita
(b) Un número es primo si y sólo si no tiene divisores primos.
(c) Si mañana hace calor, llamaré a mis amigos e iremos a la piscina.
(d) x - y = y - x.
(e) Si x es mayor que z y z es mayor que y, entonces x es mayor que y.
(f) Si a > 3, entonces a + b > 3 siempre que b no sea un número negativo.
(g) Los gusanos llegan a ser mariposas.

2^n

A una forma enunciativa en la que aparezcan n (n > 0) variables de enunciado diferentes le corresponde una función de verdad con n argumentos y la tabla de verdad tendrá 2^n filas, una para cada una de las posibles combinaciones de valores de verdad.

Ejercicio 5. Obtener las posibles combinaciones de valores de verdad que aparecen en la tabla de verdad de una forma enunciativa con cuatro variables distintas.

2^{2^n}

Además podemos asegura que existe 2^{2^n} funciones de verdad distintas de n argumentos, que se corresponden con las 2^{2^n} posibles formas de emplazar los V's y los F's en la última columna de la tablas de verdad con 2^n filas. Como podremos construir infinitas formas enunciativas con n argumentos, es lógico que formas enunciativas distintas correspondan a una misma función de verdad.

Antes de terminar la sección veamos con el siguiente ejercicio otra forma de construir una tabla de verdad de una forma enunciativa.

Ejercicio 6. Obtener la tabla de verdad de la forma enunciativa:

$$\mathscr{A}: (p \vee r) \rightarrow ((\sim r) \leftrightarrow (p \wedge q))$$

3. TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN. EQUIVALENCIA E IMPLICACIÓN LÓGICA

Una forma enunciativa es una **tautología** si, con independencia del valor de verdad de las variables de enunciado simples que aparecen en ella, siempre toma el valor de verdad V.

"Ser o no ser"

De forma análoga, diremos que es una **contradicción** si, con independencia del valor de verdad de las variables de enunciado simples que intervienen en ella, siempre toma el valor de verdad F.

"a es b y a no es b"

El método usado para verificar si una forma enunciativa es o no una tautología o una contradicción es construir su tabla de verdad.

Proposición 1.1. Si $\mathcal{A}$ es una tautología entonces $(\sim\mathcal{A})$ es una contradicción.

Ejercicio 7. ¿Son estas formas enunciativas tautologías o contradicciones?

$q \leftrightarrow (\sim(\sim q))$ $\quad$ $(p \vee r) \to (p \wedge r)$ $\quad$ $(\sim p_1) \vee p_1$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ formas enunciativas.

Diremos que $\mathcal{A}$ **implica lógicamente a** $\mathcal{B}$ (lo notaremos $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) si la forma enunciativa $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ es una tautología.

$\mathcal{A}$ **es lógicamente equivalente a** $\mathcal{B}$ (lo notaremos $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$) si la forma enunciativa $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ es una tautología.

Otras formas habituales de decir $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ son: "$\mathcal{B}$ es consecuencia lógica de $\mathcal{A}$", "$\mathcal{A}$ es condición suficiente de $\mathcal{B}$" o "$\mathcal{B}$ es condición necesaria de $\mathcal{A}$".

Nótese que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son lógicamente equivalentes, entonces ambas tienen la misma tabla de verdad.

21

Ejercicio 8. Comprobar las siguientes propiedades:

(a) la conjunción es conmutativa.

(b) el bicondicional es lógicamente equivalente a la doble implicación, es decir: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$

(c) la conectiva $\oplus$ (o exclusivo) se puede expresar a través del bicondicional: $(p \oplus q) \Leftrightarrow (\sim(p \leftrightarrow q))$

Aparte del ejercicio anterior, usaremos equivalencias lógicas para simplificar enunciados compuestos (sección 6) o transformar enunciados compuestos complicados en ciertas "forma normal" que es más sencilla de manejar (sección 5).

4. REGLAS DE MANIPULACIÓN Y SUSTITUCIÓN

Proposición 1.2. Si $\mathcal{A}$ y $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ son tautologías entonces $\mathcal{B}$ es una tautología. (Demostración ejercicio 1.12.)

Proposición 1.3. (Principio de sustitución) Sea $\mathcal{A}$ una forma enunciativa en la que aparecen las variables de enunciado p_1, p_2,..., p_n, y sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$ formas enunciativas cualesquiera. Si $\mathcal{A}$ es una tautología entonces la forma enunciativa obtenida a partir de $\mathcal{A}$ reemplazando cada intervención de p_i por $\mathcal{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$, es también una tautología. (Demostración ejercicio 1.14.)

Ejercicio 9. Probar que la siguiente forma enunciativa es una tautología

$$(\sim(p \to (q \wedge r))) \vee (p \to (q \wedge r))$$

El resultado anterior es uno de los varios con los que nos encontraremos que pueden aplicarse con frecuencia y a veces inconscientemente. Un ejemplos es el siguiente:

Corolario 1.4 (Leyes de De Morgan) Dadas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ formas enunciativas cualesquiera,

i.$(\sim(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2)) \Leftrightarrow ((\sim\mathcal{A}_1) \vee (\sim\mathcal{A}_2))$

ii.$(\sim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)) \Leftrightarrow ((\sim\mathcal{A}_1) \wedge (\sim\mathcal{A}_2))$

Ejercicio 10. Probar las leyes de De Morgan’s.

Ejercicio 11. Construir la negación de:

“Tengo un portatil y un ordenador sobremesa”

“Iré al supermercado o mi mujer saldrá de compras”

Corolario 1.5 (Ley de la Doble negación) Dada $\mathcal{A}$ una forma enunciativa, $\sim(\sim(\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{A}$

Corolario 1.6. (Leyes asociativa y conmutativa) Dadas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ formas enunciativas cualesquiera,

i) $(\mathcal{A}_1 \wedge (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \wedge \mathcal{A}_3)$,
ii) $(\mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3)$,
iii) $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_1)$,
iv) $(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_1)$.

Corolario 1.7. (Leyes Distributivas) Dadas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$ formas enunciativas cualesquiera,

i) $(\mathcal{A}_1 \wedge (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \vee (\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3))$,
ii) $(\mathcal{A}_1 \vee (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3)) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \wedge (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_3))$,
iii) $((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2) \vee \mathcal{A}_3) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_3) \wedge (\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3))$,
iv) $((\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) \wedge \mathcal{A}_3) \Leftrightarrow ((\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_3) \vee (\mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3))$.

Corolario 1.8. (Leyes de Idempotencia y del Complemento) Dada $\mathcal{A}$ una forma enunciativa cualquiera,

i) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$.
ii) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$.
iii) $(\mathcal{A} \wedge (\sim\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es una contradicción.
iv) $(\mathcal{A} \vee (\sim\mathcal{A})) \Leftrightarrow \mathcal{V}$, donde $\mathcal{V}$ es una tautología.

Corolario 1.9. (Elemento neutro) Dada $\mathcal{A}$ una forma enunciativa cualquiera, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{F}$ una tautología y una contradicción con el mismo número de variables que $\mathcal{A}$, entonces:

i) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{F}$, ii) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{F}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$,
iii) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{V}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$, iv) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{V}) \Leftrightarrow \mathcal{V}$.

Ejercicio 12. Demostrar que, para cada $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ formas enunciativas, los siguientes pares de formas enunciativas son logicamente equivalentes:

(a) $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$.
(b) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, $((\sim\mathcal{B}) \rightarrow (\sim\mathcal{A}))$.

Proposición 1.9. (Ley de sustitución) Sea $\mathcal{B}$ la forma enunciativa resultante de sustituir en la forma enunciativa $\mathcal{A}$ una o más intervenciones de la forma enunciativa $\mathcal{B}_1$ por $\mathcal{A}_1$. Si $\mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$. (Demostración ejercicio 1.19.)

Ejercicio 13. Demostrar que, para cada formas enunciativas $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$,

$$(\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\sim(\mathcal{A}_1 \wedge (\sim \mathcal{A}_2)))$$

Usar la ley de sustitución y las equivalencias previas para probar que el siguiente par de formas enunciativas es lógicamente equivalente:

$$\mathcal{A}: (p \rightarrow (\sim r)) \rightarrow (p \wedge (\sim q))$$
$$\mathcal{B}: (\sim(p \wedge r)) \rightarrow (\sim(p \rightarrow q))$$

5. FORMAS NORMALES

Llamaremos **forma enunciativa restringida** a una forma enunciativa en la que sólo aparecen las conectivas ~, ∧ y ∨.
Hemos visto que de una forma enunciativa podemos construir una tabla de verdad. Ahora probaremos el reciproco:

Proposición 1.10. Toda función de verdad es la función de verdad determinada por una forma enunciativa restringida. (Demostración ejercicio 1.23.)

Llamaremos **conjuncción lógica** a una forma enunciativa que tomá valor de verdad V sólo para una combinación de valores de verdad de las variables que intervienen, siendo F para las demás. Se construye mediante conjunciones de variables o de sus negaciones: pondremos la variable en la conjunción si esta variable en la combinación está asignada al valor V, y la negación de esta si dicha variable está asignada al valor F. Haremos lo mismo con cada variable.

Ejercicio 14. Obtener una forma enunciativa restringida $\mathcal{A}$ cuya tabla de verdad es la siguiente:

p_1	p_2	p_3	f	
V	V	V	V	$\to$ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$
V	V	F	F	
V	F	V	F	
V	F	F	F	
F	V	V	V	$\to$ $(\sim p_1) \wedge p_2 \wedge p_3$
F	V	F	F	
F	F	V	V	$\to$ $(\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge p_3$
F	F	F	F	

Conjunciones básicas

$\mathcal{A}$: $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee ((\sim p_1) \wedge p_2 \wedge p_3) \vee ((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge p_3)$

Corolario 1.11. Toda forma enunciativa, que no es una contradicción, es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

donde cada Q_{ij} es una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado.

Esta forma se llama **forma normal disyuntiva**.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Corolario 1.12. Toda forma enunciativa, que no es una tautología, es lógicamente equivalente a una forma enunciativa restringida de la forma:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)\right)$$

donde cada Q_{ij} es una variable de enunciado o la negación de una variable de enunciado. (Demostración ejercicio 1.25.)

Esta forma se llama **forma normal conjuntiva**.

Ejercicio 15. Encontrar la forma normal conjuntiva que es lógicamente equivalente a: $(p \rightarrow q) \vee (\sim r)$.

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

6. CONJUNTOS ADECUADOS DE CONECTIVAS

Un **conjunto adecuado de conectivas** es un conjunto tal que toda función de verdad puede representarse por medio de una forma enunciativa en la que sólo aparezcan conectivas de dicho conjunto.

Una de las consecuencias de la sección anterior es que el conjunto $\{\sim, \vee, \wedge\}$ es un conjunto adecuado de conectivas.

Proposición 1.13. Los pares $\{\sim, \wedge\}$, $\{\sim, \vee\}$ y $\{\sim, \rightarrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas. (Demostración ejercicios 1.29. y 1.30.)

Ejercicio 16. Encontrar una forma enunciativa lógicamente equivalente a $(p \rightarrow q) \vee (\sim r)$ en la que sólo aparezcan las conectivas del conjunto $\{\sim, \rightarrow\}$.

Notemos que los anteriores son los únicos conjuntos adecuados de conectivas con dos elementos. ¿Existen conjuntos adecuados de conectivas unitarios, es decir, con una sola conectiva?

Las 5 conectivas $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$, que hemos estudiado no constituyen por si solas un conjunto adecuado.

Sin embargo, las anteriores no son las únicas conectivas, de hecho, cada tabla de verdad con dos entradas define una nueva conectiva pero con significado intuitivo no muy claro. En 1913 Sheffer introduce dos nuevos conectivos:

NOR

Se denota por $\downarrow$ y no es más que la negación de la disyunción, es decir,

$$(p \downarrow q) \Leftrightarrow (\sim(p \vee q))$$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	**F**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

NAND

Se denota por $\uparrow$, o bien, $|$ y es la negación de la conjunción, es decir,

$$(p \uparrow q) \Leftrightarrow (\sim(p \wedge q))$$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \uparrow q$
V	V	**F**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**V**

El interés de estas conectivas lo expresamos en la siguiente proposición y tiene consecuencias en el diseño y estudio de computadoras.

Proposición 1.14. Los conjuntos unitarios $\{\downarrow\}$ y $\{\uparrow\}$ son conjuntos adecuados de conectivas. (Demostración ejercicios 1.33. y 1.34.)

Ejercicio 17. Probar que $\{\downarrow\}$ es un conjunto adecuado de conectivas. Obtener una forma enunciativa lógicamente equivalente a $(p \rightarrow q) \vee (\sim r)$ en la que sólo aparezca $\downarrow$.

Resumen

{~, ∧} es un conjunto adecuado de conectivas

$(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim((\sim p) \wedge (\sim q)))$.

{~, ∨} es un conjunto adecuado de conectivas

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim((\sim p) \vee (\sim q)))$.

{~, →} es un conjunto adecuado de conectivas

$(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \rightarrow q)$.

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim(p \rightarrow (\sim q)))$

{|} es un conjunto adecuado de conectivas

$(\sim p) \Leftrightarrow (p \mid p)$.

$(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \mid p) \mid (q \mid q))$.

$(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \mid q) \mid (p \mid q))$.

{↓} es un conjunto adecuado de conectivas

$(\sim p) \Leftrightarrow (p \downarrow p)$.

$(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$.

$(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$.

7. ARGUMENTACIÓN Y VALIDEZ

En adelante trabajamos con argumentaciones cuyas premisas y conclusión son todas formas enunciativas simples o compuestas.
Ejemplo:

Si tienes el password, puedes descargarte ficheros de la web
Tienes el password
$\therefore$ Puedes descargarte ficheros de la web

Esta argumentación la podemos considerar satisfactoria desde el punto de vista lógico. Sin embargo, la argumentación:

Tienes el password
$\therefore$ Puedes descargarte ficheros de la web

que también parece lógicamente satisfactoria, debido al significado de las palabras "password" y "descargar ficheros de la web", y no por deducción meramente lógica. Si simbolizamos ambas:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \therefore B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} A \\ \therefore B \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \therefore B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} A \\ \therefore B \end{array}$$

Es la "forma" de la primera (**Modus ponens**) lo que la hace válida. Cualquier argumentación con la misma forma sería también válida (intuición lógica sobre el condicional). La segunda no comparte esta propiedad. Hay muchas argumentaciones con tal forma que intuitiva no consideraríamos válidas.

Las nubes son blancas
$\therefore$ Las nubes están hecha de lana

Trabajamos ahora con argumentaciones cuyas premisas y conclusión son enunciados simples o compuestos.
Lo importante de una argumentación es su forma, por tanto, consideramos **formas argumentativas**, es decir, una sucesión finita de formas enunciativas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$, $\therefore$ $\mathcal{B}$, de las cuales a la última $\mathcal{B}$ se le llama **conclusión** o **tesis** y a las restantes $\mathcal{A}_i$ **premisas** o **hipótesis**.

Al definir que es una forma argumentativa "válida" nos encontramos con la misma dificultad que teníamos al definir el símbolo de implicación. Cuando asignamos valores de verdad a las variables de enunciado que aparecen en una forma argumentativa podemos encontrarnos que la conclusión es falsa y una o más premisas es también falsa. ¿Justifican las premisas falsa una conclusión falsa? Esta pregunta es irrelevante. Usamos las argumentaciones sólo para demostrar que cierta conclusión es consecuencia de premisas conocidas.

Lo que necesitamos de una forma argumentativa válida, es que para una asignación de valores de verdad de las variables de enunciado, si todas las premisas toman valor de verdad V, la conclusión también toma valor de verdad V.

Sean $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}$ formas enunciativas. La forma argumentativa $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$, $\therefore$ $\mathcal{B}$, de "$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$ se deduce $\mathcal{B}$", es **válida** si para cada asignación de valores de verdad de las variables que intervienen y que hace que todas las premisas $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$,..., $\mathcal{A}_n$ tomen valor V, también hace que la conclusión $\mathcal{B}$ tome valor V. En otro caso se dice que la forma argumentativa es **inválida**.

Por tanto, un primer método para comprobar si una forma argumentativa es válida o invalida consiste en construir la tabla de verdad de todas las formas enunciativas que aparecen como premisas o conclusión.

La validez o invalidez de una argumentación se puede obtener haciendo las tablas de verdad de las premisas y la conclusión.
Sin embargo, no es el método más adecuado cuando tenemos muchas variables, en ese caso usaremos el **método de refutación** que consiste en intentar probar la invalidez de la forma argumentativa buscando aquellos valores de las variables que hace que cada una de las premisas tome el valor V y la conclusión el valor F. Si esto es imposible es que la forma argumentativa es válida, en otro caso habremos encontrado unos valores de verdad que hacen que será invalida.

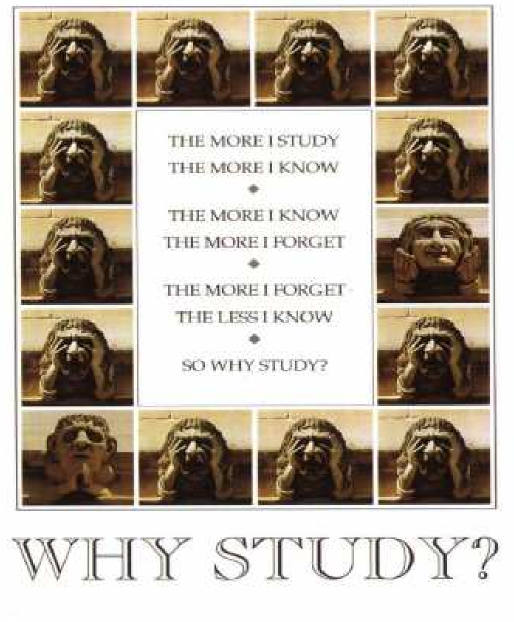
Ejercicio 18. Comprobar la validez de las siguientes formas argumentativas:

a) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)), q; \therefore (p \rightarrow r)$.
b) $(p \rightarrow q), ((\sim q) \rightarrow r), r; \therefore p$.

Ejercicio 19. Comprobar la validez de la siguiente argumentación:
“Si subo la relación de ejercicios a la web, los alumnos los resolveran”
“Si los alumnos los resuelven, entonces aprenderan más lógica”
“Por tanto, si subo la relación de ejercicios a la web, aprenderan más lógica”

El siguiente resultado hace explicito la conexión entre argumentación e implicación previamente mencionada.

Proposición 1.15. La forma argumentativa $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \therefore \mathcal{B}$, es válida si y sólo si $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) \Rightarrow \mathcal{B}$, es decir, si $(\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n) \rightarrow \mathcal{B}$ es una tautología. (Demostración ejercicios 1.36)



Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

8. TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Matemática Discreta
García Muñoz, M.A.

Dadas p y q variables de enunciado, la conectiva $\rightarrow$ da lugar al enunciado $(p \rightarrow q)$ que ya hemos estudiado. A partir del anterior se deducen 3 nuevas implicaciones:

- $((\sim p) \rightarrow (\sim q))$, forma enunciativa **contraria** de $(p \rightarrow q)$.
- $(q \rightarrow p)$, forma enunciativa **recíproca** del enunciado $(p \rightarrow q)$.
- $((\sim q) \rightarrow (\sim p))$, forma enunciativa **contrarrecíproca** de $(p \rightarrow q)$.

Nótese que $(p \rightarrow q)$ es lógicamente equivalente a su contrarrecíproco y que la forma contraria es lógicamente equivalente a su recíproca, es decir,

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \rightarrow (\sim p)),$$

$$((\sim p) \rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow (q \rightarrow p).$$

Veamos ahora algunos ejemplos de demostraciones tipo para enunciados de la forma $(p \rightarrow q)$ que aparecerán a lo largo del curso:

DEMOSTRACIÓN DIRECTA: se utiliza la validez de la siguiente argumentación

$$(p \rightarrow r),\ (r \rightarrow q),\ \therefore (p \rightarrow q) \text{ (Regla de silogismo)}$$

Así si construimos una cadena finita de enunciados verdaderos de la forma $(p \rightarrow p_1)$, $(p_1 \rightarrow p_2)$,..., $(p_n \rightarrow q)$ tendremos demostrado que $(p \rightarrow q)$ es verdadero.

Teorema: "Si n es un entero impar entonces n^2 es un entero impar"

DEMOSTRACIÓN POR CONTRAPOSITIVO O INDIRECTA: consiste en utilizar la equivalencia

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \rightarrow (\sim p)).$$

Teorema: "Si 3n + 2 es impar, entonces n es impar"

DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO: consiste en deducir una contradicción de la negación del resultado que se quiere demostrar, lo que se basa en la equivalencia

$$p \Leftrightarrow ((\sim p) \rightarrow (q \wedge (\sim q))).$$

O lo que es igual, suponer que la hipótesis es verdadera, la conclusión es falsa y llegar a una contradicción.

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge (\sim q)) \rightarrow (\sim p)).$$

Teorema: "La raíz cuadrada de 2 es un número irracional"

DEMOSTRACIÓN POR CASOS: cuando se tiene una implicación del tipo $(p \rightarrow (r_1 \wedge r_2 \wedge \ldots \wedge r_n))$ para demostrar $(p \rightarrow q)$ basta con probar $(r_1 \rightarrow q), (r_2 \rightarrow q), \ldots, (r_n \rightarrow q)$.

Teorema: "Si x es un número real con $|x| < 1$, entonces $0 \leq x^2 < 1$."

DEMOSTRACIÓN DE DOBLES IMPLICACIONES: demostrar un enunciado $(p \leftrightarrow q)$ será equivalente a demostrar $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$ usando la equivalencia

$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)).$$

Teorema: "Un número entero n es par si y sólo si su cuadrado n^2 es par"

DEMOSTRACIÓN DE EQUIVALENCIAS MÚLTIPLES: demostrar que n proposiciones son equivalentes

$$(p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n)$$

es igual a demostrar

$$((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1))$$

usando la equivalencia

$$(p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n) \Leftrightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \rightarrow p_n) \wedge (p_n \rightarrow p_1))$$

Teorema: “Los siguientes enunciados equivalen:
- a) n es par,
- b) n^2 es par
- c) n^4 es par”