5 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real x se escribe como $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es positivo,} \\ -x & \text{si } x \text{ es negativo.} \end{cases}$$

Así, por ejemplo, $|3/5| = 3/5$ y $|-5'23| = -5'23$.

Ejemplo 5.1 *Resuelve la ecuación* $|2x-4| = 3$.

De la definición de valor absoluto caben las posibilidades:

$$2x - 4 = 3 \quad \text{o} \quad 2x - 4 = -3.$$

Por tanto las soluciones son

$$x = \frac{7}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Veamos a continuación un ejemplo en el que se resuelve una desigualdad en la que aparece un valor absoluto.

Ejemplo 5.2 *¿Para qué valores de* x *se tiene que* $|2x-4| < 3$*?*

Es claro que para que $|2x-4| < 3$ tiene que ser

$$-3 < 2x - 4 < 3.$$

Ahora, resolviendo la inecuación $-3 < 2x - 4$ se tiene que $x < 7/2$. Por otra parte, resolviendo la inecuación $2x - 4 < 3$ se tiene que $x > 1/2$. En consecuencia, los valores de x para los que $|2x-4| < 3$ son los puntos del intervalo

$$(-\infty, 7/2) \cap (1/2, +\infty) = (1/2, 7/2).$$

El valor absoluto satisface las siguientes propiedades:

(i) $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(iii) $|x\,y| = |x||y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

La desigualdad (iv) se conoce como **desigualdad triangular**. Por otra parte, observar que usando la tercera propiedad es fácil deducir que

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}.$$

Análogamente, usando la desigualdad triangular es fácil ver que

$$|x - y| \leq |x| + |y| \quad \text{para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}.$$

5.1 Ejercicios propuestos

Ejercicio 42. *Resuelve las ecuaciones:*

(a) $|3x - 7| = 5$; **(b)** $|2x - 1||x - 2| = 5$.

Ejercicio 43. *Resuelve las inecuaciones:*

(a) $|3x - 7| > 5$; **(b)** $|2x - 1||x - 2| \leq 5$.