6 Trigonometría

Un **ángulo** es una porción de plano limitada por dos semirrectas, los **lados**, que parten de un mismo punto llamado **vértice**.

A efectos representativos y de medición, el vértice puede situarse en el origen de coordenadas, y uno de los lados, que podemos llamar **lado inicial**, será el semieje positivo de abscisas. Rotando dicho semieje se forman los diferentes ángulos. Si la rotación se hace en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, el sentido y la medida son positivos; en caso contrario, negativos.

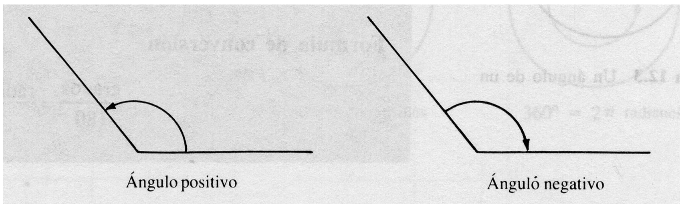

Figura 1.5

Una rotación de una vuelta completa determina un ángulo de 360^0. Este ángulo mide también 2π radiantes, Así pues, $360^0 = 2\pi$ radianes.

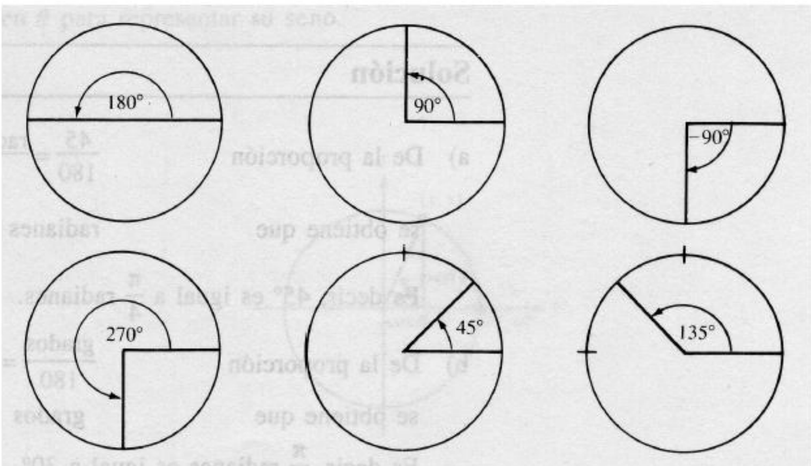

Figura 1.6

6.1 Razones trigonométricas de un ángulo

Para un ángulo α consideramos el triángulo rectángulo en la Figura 1.7.

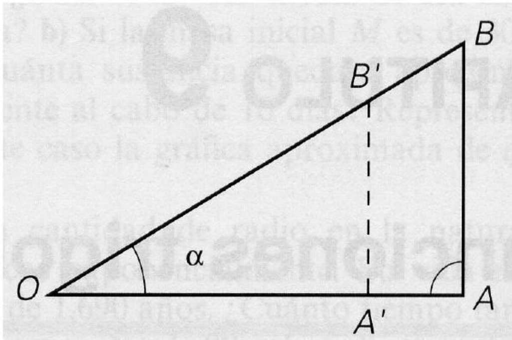

Figura 1.7

Se definen las siguientes razones trigonométricas:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} &= \frac{A\,B}{O\,B}\\
\cos\alpha &= \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} &= \frac{O\,A}{O\,B}\\
\operatorname{tag}\alpha &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} &= \frac{A\,B}{O\,A}.
\end{aligned}
$$

Debido a la proporcionalidad de segmentos (Teorema de Thales), estas razones son independientes de la medida de la hipotenusa del triángulo. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A\,B}{O\,B} = \frac{A'\,B'}{O\,B'} \quad \text{(ver Figura 1.7).}$$

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera nos ayudamos de una circunferencia de radio 1 cuyo centro es el origen de coordenadas. Cada ángulo, obtenido por rotación del semieje positivo OX, corta a la circunferencia en un punto de coordenadas (x, y) (Ver la Figura 1.8). De este modo se definen las razones trigonométricas como sigue:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{1} = y; \qquad \cos\alpha = \frac{x}{1} = x; \qquad \operatorname{tag}\alpha = \frac{y}{x}.$$

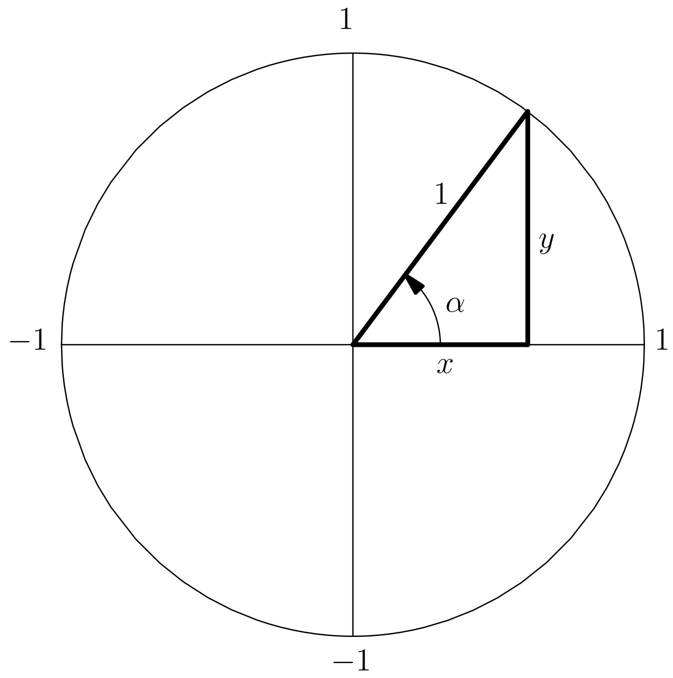

Figura 1.8

De las igualdades anteriores se deduce que $-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1$ y $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ para cualquier ángulo α. Por otra parte, el signo de las coordenadas x e y determina el de las razones trigonométricas. En el siguiente cuadro se indican estos signos.

Cuadrante	**sen** α	**cos** α	**tag** α
I: $0 < \alpha < \pi/2$	+	+	+
II: $\pi/2 < \alpha < \pi$	+	-	-
IIII: $\pi < \alpha < 3\pi/2$	-	-	+
IV: $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$	-	+	-

En la siguiente tabla mostramos los valores del seno y el coseno de algunos ángulos en el primer cuadrante.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sen α	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Partiendo de las definiciones anteriores, y teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, se prueba que para cualquier ángulo α se tienen las siguientes propiedades:

- $\mathbf{tag}\,\alpha = \dfrac{\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha}$
- $\mathbf{sen}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = 1$

- $\mathbf{tag}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\mathbf{cos}^2\alpha}$

Por otra parte, llamamos la atención sobre el hecho de que

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{sen}^2\alpha & = & (\mathbf{sen}\,\alpha)^2 & \neq & \mathbf{sen}\,\alpha^2 \\ \mathbf{cos}^2\alpha & = & (\mathbf{cos}\,\alpha)^2 & \neq & \mathbf{cos}\,\alpha^2 \\ \mathbf{tag}^2\alpha & = & (\mathbf{tag}\,\alpha)^2 & \neq & \mathbf{tag}\,\alpha^2. \end{array}$$

Además de las identidades anteriores, es interesante conocer las siguientes:

- Para sumas de ángulos:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(a+b) & = & \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \\ \cos(a+b) & = & \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \end{array}$$

- Para ángulos dobles:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} 2a & = & 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a \\ \cos 2a & = & \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a \end{array}$$

- Para ángulo mitad:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} \dfrac{a}{2} & = & \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}} \\ \cos \dfrac{a}{2} & = & \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}} \end{array}$$

Ejemplo 6.1 *¿Que relación existe entre sen α y sen$(-\alpha)$? ¿ Y entre cos α y cos$(-\alpha)$?*

En la Figura 1.9 representamos los ángulos α y $-\alpha$. En dicha figura podemos observar que

$$\operatorname{sen}\alpha = y \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -y.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

También en la mencionada figura se observa que

$$\cos\alpha = x \quad \text{y} \quad \cos(-\alpha) = x.$$

Así pues,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

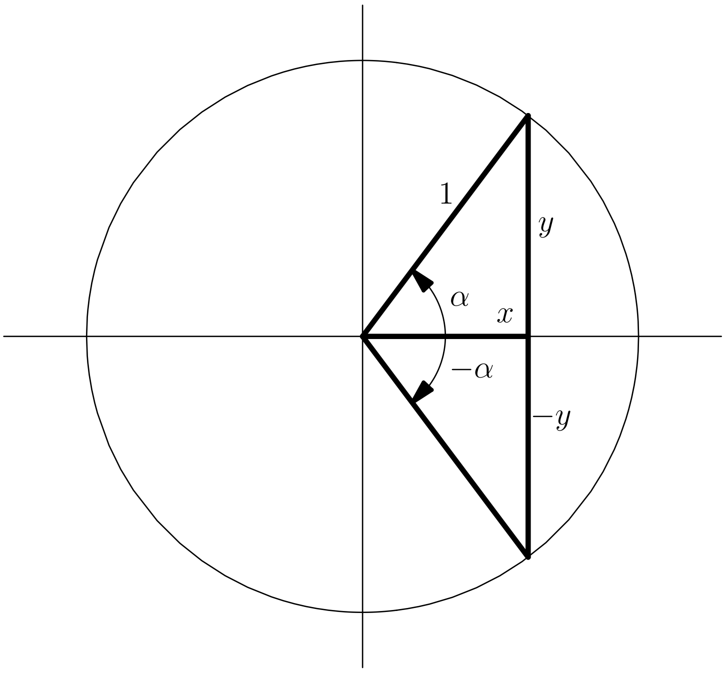

Figura 1.9

Ejemplo 6.2 *Sabiendo que sen$(a+b) = $ sen$\,a \cdot$ cos$\,b +$ sen$\,b \cdot$ cos$\,a$, deduce una fórmula en la que se exprese sen$(a-b)$ en función de razones trigonométricas de los ángulos a y b.*

Notar en primer lugar que la fórmula $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$ puede ser utilizada cambiando b por $-b$. Así tendremos:

$$\operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a \cdot \cos(-b) + \operatorname{sen}(-b) \cdot \cos a.$$

Ahora, teniendo en cuenta que por el Ejemplo 6.1,

$$\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b \quad \text{y} \quad \cos(-b) = \cos b,$$

concluimos que

$$\operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a.$$

6.2 Funciones trigonométricas

Son **funciones trigonométricas** aquellas funciones en las que intervienen el seno, el coseno o la tangente. Estudiamos a continuación algunas de sus propiedades más importantes.

■ Función seno de x

La función $\operatorname{sen} x$ tiene las siguientes propiedades:

- Está definida para cualquier valor de x; esto es $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Su imagen o recorrido es el conjunto $[-1, 1]$.
- Es una función periódica de periodo 2π; es decir, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + 2\pi)$.
- Es una función impar o simétrica respecto del origen ya que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$.

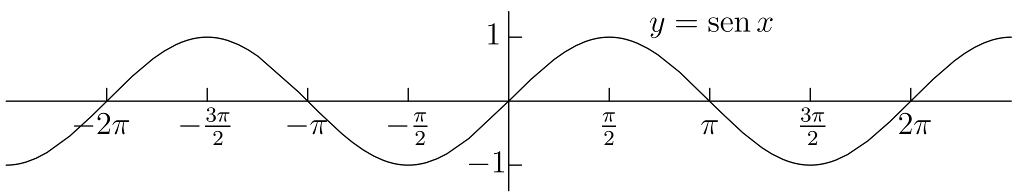

Figura 1.10: Gráfica de la función $\operatorname{sen} x$.

■ Función coseno de x

La función $\cos x$ tiene las siguientes propiedades:

- Está definida para cualquier valor de x; esto es $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Su imagen o recorrido es el conjunto $[-1, 1]$.
- Es una función periódica de periodo 2π; es decir, $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$.
- Es una función par o simétrica respecto del eje OY ya que $\cos x = \cos(-x)$.

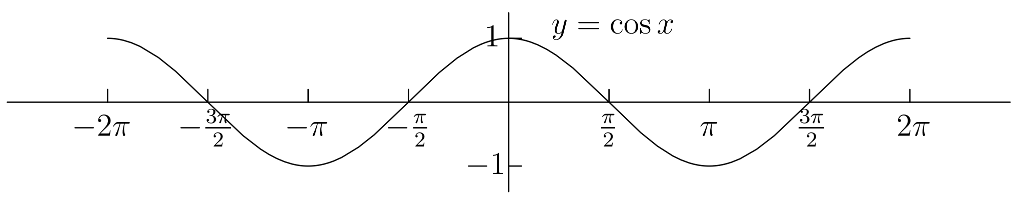

Figura 1.11: Gráfica de la función $\cos x$.

■ Función tangente de x

La función $\operatorname{tag} x$ tiene las siguientes propiedades:

- Se define como $\operatorname{tag} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
- Está definida para cualquier valor de x tal que $\cos x \neq 0$. Además, en estos puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ en los que la función no está definida, la gráfica de $\operatorname{tag} x$ tiene asíntotas verticales.
- Su imagen o recorrido es el conjunto $[-\infty, \infty]$.
- Es una función periódica de periodo π; es decir, $\operatorname{tag} \alpha = \operatorname{tag}(\alpha + \pi)$.

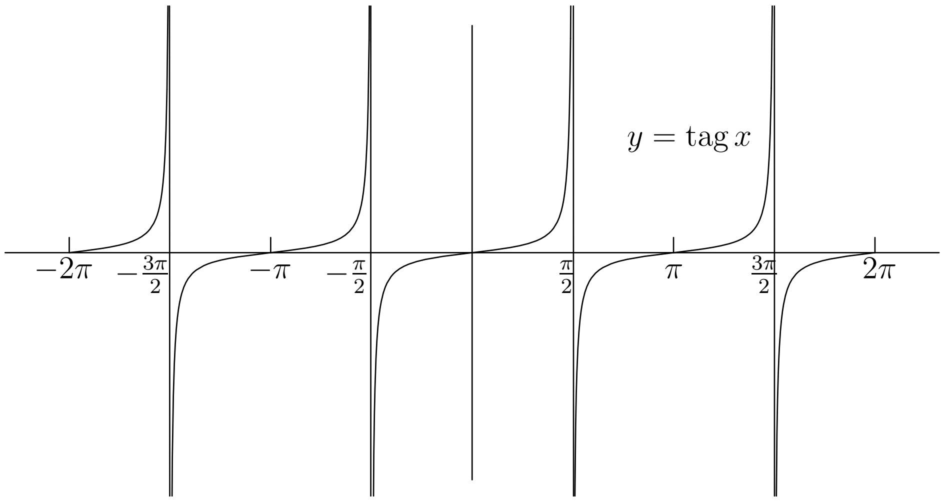

Figura 1.12: Gráfica de la función $\operatorname{tag} x$.

■ Otras funciones trigonométricas

Las inversas de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tag} x$ se llaman, respectivamente, cosecante, secante y cotangente. Por tanto, se definen como:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}; \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \qquad \operatorname{cotag} x = \frac{1}{\operatorname{tag} x}.$$

■ Funciones trigonométricas inversas

- **Arco seno de** x

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad \Longleftrightarrow x = \operatorname{sen} y.$$

- **Arco coseno de** x

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow x = \cos y.$$

Análogamente se definen las funciones $\operatorname{arctag} x$, $\operatorname{arccosec} x$, $\operatorname{arcsec} x$ y $\operatorname{arccotag} x$.

6.3 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 44. *Expresa en radianes los siguientes ángulos:*

$$180^0, \quad 240^0, \quad -120^0 \quad y \quad 375^0.$$

Ejercicio 45. *Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos:*

$$5\pi \; radianes, \quad \frac{7\pi}{3} \; radianes \quad y \quad 5 \; radianes.$$

Ejercicio 46. *Sabiendo que* $sen\,30^0 = \dfrac{1}{2}$ *y que* $sen\,45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *calcula* $sen\,75^0$ *y* $cos\,15^0$.

Ejercicio 47. *¿Qué relación existe entre* $tag\,\alpha$ *y* $tag\,(-\alpha)$ *para cualquier ángulo* α*?*

Ejercicio 48. *Contesta si son verdaderas o falsas las siguientes igualdades:*

- $sen\,\pi^2 + cos\,\pi^2 = 1.$
- $sen^2\pi + cos^2\pi = 1.$
- $\dfrac{sen\,x^2}{x} = sen\,x.$
- $\dfrac{5\pi^2\,sen\,\pi}{\pi^2} = 5\,sen\,\pi.$
- $\dfrac{sen\,(7\pi^2)}{sen\,(7\pi)} = sen\,\pi.$

Ejercicio 49. *Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo* $\dfrac{\pi}{3}$.

Ejercicio 50. *Representa gráficamente las funciones* $f(x) = 2\,sen\,x$ *y* $g(x) = 2 + sen\,x$.

Ejercicio 51. *Calcula la altura de una torre sabiendo que desde donde nos encontramos vemos su parte más alta bajo un ángulo de* 60^0 *y que estamos a 20 m. de su base.*

Ejercicio 52. *En una circunferencia de 3 cm. de radio, ¿cuánto mide un arco sustentado por un ángulo de 2 radianes?*

Ejercicio 53. *De un triángulo rectángulo se sabe que sus catetos miden 3 y 4 respectivamente. Encuentra la medida de la hipotenusa y la de los ángulos.*

Ejercicio 54. *¿Cuántos metros hemos ascendido después de recorrer 5 km. por una carretera cuya pendiente es del 10%?*