Práctica 3

Sucesiones y series

El programa *Mathematica* nos sirve de ayuda para estudiar el comportamiento de sucesiones y series de números reales, mediante las instrucciones **`Limit`** y **`Sum`** que nos permitirán, en la mayoría de los casos, calcular el límite de una sucesión y la suma de una serie, respectivamente. Asimismo el programa *Mathematica* nos facilita el estudio de sucesiones recurrentes.

1.- Sucesiones de números reales

Ejemplo 3.1

Estudiar la sucesión de término general $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

- Definimos la sucesión

In[1]:= $\mathtt{a[n\_]} := \dfrac{1}{n+1}$

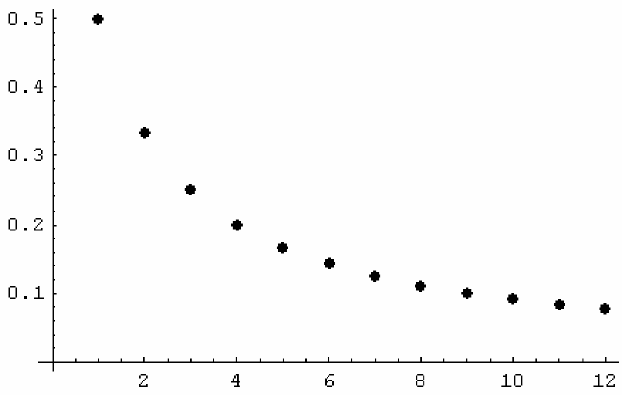
- Generamos una tabla con los 10 primeros términos de la sucesión

```
In[2]:= term = Table[a[n], {n, 1, 12}]
```

Out[2]= $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}\right\}$

- Los visualizamos gráficamente

```
In[3]:= ListPlot[term, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



Out[3]= - Graphics -

- También podemos hallar un término cualquiera de la sucesión:

```
In[4]:= a[1]
```

Out[4]= $\frac{1}{2}$

```
In[5]:= a[7]
```

$$\text{Out[5]=}\ \frac{1}{8}$$

Gráficamente se observa que la sucesión es decreciente ($a_{n+1} > a_n$), acotada ($0 < a_n < 1$) y que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Veamos como podemos estudiar estos aspectos con *Mathematica.*

- Crecimiento:

  ```
  In[6]:= a[n + 1] < a[n] // Simplify
  ```

  $$\text{Out[6]=}\ \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

  El programa no nos da información sobre si la desigualdad planteada es cierta. Esto es debido, entre otras cosas, a que el programa no reconoce a la variable **n** como un número natural. La siguiente instrucción resuelve este problema.

  ```
  In[7]:= FullSimplify[a[n + 1] < a[n], n ∈ Integers ∧ n > 0]

  Out[7]= True
  ```

- Acotación:

  ```
  In[8]:= FullSimplify[0 < a[n] < 1, n ∈ Integers && n > 0]

  Out[8]= True
  ```

- Límite:

  ```
  In[9]:= Limit[a[n], n → Infinity]

  Out[9]= 0
  ```

  También podemos utilizar el símbolo ∞ (véase la paleta **BasicInput**) para denotar el infinito en lugar de **Infinity.**

  ```
  In[10]:= Limit[a[n], n → ∞]

  Out[10]= 0
  ```

También podemos utilizar variables como subíndices. De esta forma, la sucesión anterior podría definirse como

$$\text{In[11]:=}\ a_{n\_} := \frac{1}{n+1}$$

Esto nos permite utilizar la misma terminología que habitualmente usamos en Matemáticas.

Ejemplo 3.2

Calcular el límite de la sucesión de término general $c_n = \dfrac{2^n}{2^n + 3^n}$

- Definimos la sucesión

  $$\text{In[13]:=}\ c_{n\_} := \frac{2^n}{3^n + 2^n}$$

- Calculamos su límite

```
In[14]:= Limit[c_n, n → ∞]
```

Out[14]= $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n + 3^n}$

Como podemos comprobar, en este ejemplo, *Mathematica* no es capaz de calcular el límite de determinadas expresiones. Esto suele depender de la versión del programa que estemos utilizando. Sin embargo, podemos ampliar el repertorio de expresiones para las cuales el programa puede calcular el valor del límite cargando el paquete **Calculus`Limit`**. Dicho paquete debería cargarse previamente siempre que necesitemos calcular límites de sucesiones y/o de funciones.

```
In[15]:= << Calculus`Limit`

In[16]:= Limit[c_n, n → ∞]

Out[16]= 0
```

Ejemplo 3.3

Calcular el límite de la sucesión de término general $d_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

- Definimos la sucesión

```
In[17]:= d_n_ := (-1)^n + 1/n
```

- Calculamos su límite

```
In[18]:= Limit[d_n, n → ∞]

Out[18]= Indeterminate
```

Mathematica no puede calcular el límite de la sucesión. En este caso es debido a que se trata de una sucesión oscilante que tiene dos subsucesiones con distinto límite (por tanto, la sucesión no es convergente).

- Estudiemos la sucesión de términos pares:

```
In[19]:= d_(2 n)
```

Out[19]= $(-1)^{2n} + \frac{1}{2n}$

Observemos que Mathematica no identifica $(-1)^{2n} = 1$, esto se debe a que, como hemos comentado anteriormente, el programa no reconoce a la variable **n** como un número natural. Para ello debemos utilizar la instrucción:

```
In[21]:= FullSimplify[d_(2 n), n ∈ Integers]
```

Out[21]= $1 + \frac{1}{2n}$

Ahora también podemos calcular su límite

```
In[22]:= Limit[FullSimplify[d_(2 n), n ∈ Integers], n → ∞]

Out[22]= 1
```

- Estudiemos ahora la sucesión de términos impares:

In[23]:= FullSimplify[d_{2n-1}, n ∈ Integers]

Out[23]= $\frac{1}{2n-1} - 1$

In[24]:= Limit[FullSimplify[d_{2n-1}, n ∈ Integers], n → ∞]

Out[24]= -1

La sucesión $\{d_n\}$ admite dos parciales que tienen distinto límite. Por tanto la sucesión es oscilante.

1.1- Sucesiones recurrentes

Ejemplo 3.4

Estudiar la sucesión recurrente dada por $x_1 = 1,\ \ x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}},\quad n \in N$

- Definimos la sucesión

In[25]:= x_1 = 1;

$x_{n\_}$:= $\sqrt{1 + x_{n-1}}$;

- Ahora podemos determinar cualquier término de la sucesión

In[28]:= x_2

Out[28]= $\sqrt{2}$

In[29]:= x_3

Out[29]= $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

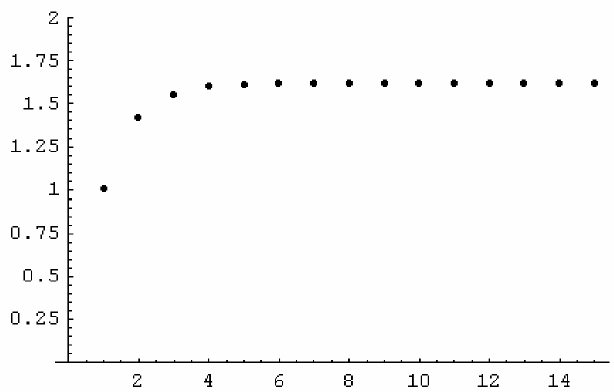
O un valor aproximado

In[30]:= x_5 // N

Out[30]= 1.61185

- Visualizar gráficamente los términos de la sucesión

In[30]:= ListPlot[Table[x_n, {n, 1, 15}], PlotRange → {
PlotStyle → PointSize[0.015]]



Gráficamente se observa que la sucesión es estrictamente creciente ($x_n < x_{n+1}$) y está acotada ($0 < x_n < 2$) y, por tanto, será convergente.

Si tratamos de calcular el límite de la sucesión $\{x_n\}$ mediante la instrucción **`Limit`** el programa queda inmerso en un proceso recursivo infinito y no es capaz de darnos el valor del límite. En estos casos, para calcular el límite de la sucesión hemos de seguir el procedimiento seguido en clase. Si llamamos L al límite de la sucesión, entonces deberá cumplirse que $L = \sqrt{1+L}$. Ahora podemos pedirle a *Mathematica* que nos resuelva esta ecuación.

In[31]:= `Solve[L == √(1 + L)]`

Out[31]= $\left\{\left\{L \to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$

Ejemplo 3.5

Estudiar la sucesión de Fibonacci dada por $x_1 = 1, x_2 = 1, \quad x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, \quad n \in N$

- Definimos la sucesión

In[32]:= `x1 = 1; x2 = 1;`
`xn_ := xn-1 + xn-2`

$x_1 = 1;\ x_2 = 1;$
$x_{n\_} := x_{n-1} + x_{n-2}$

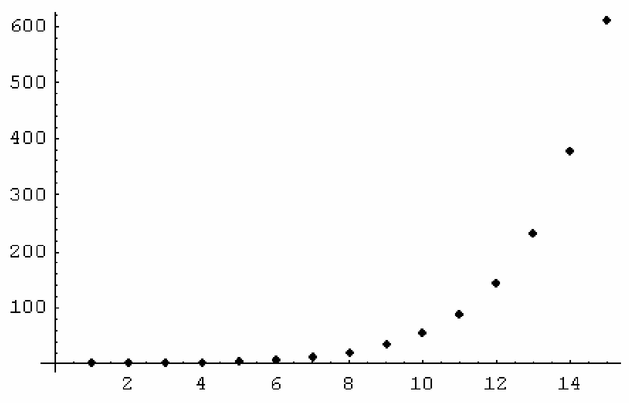
- Calculamos algunos términos

In[34]:= `term = Table[xn, {n, 1, 15}]`

Out[34]= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610}

Se trata de una sucesión estrictamente creciente ($x_n < x_{n+1}$) y no está acotada, por lo que será divergente. Esto puede comprobarse fácilmente si representamos gráficamente los términos de la sucesión.

In[35]:= `ListPlot[term, PlotStyle → PointSize[0.015]]`



Out[35]= - Graphics -

2.- Series de números reales

Ejemplo 3.6

Probar que la serie $\sum \frac{1}{n^2+7n+12}$ *es convergente. Calcular su suma.*

- Definimos el término general de la serie

In[36]:= $a_{n\_} := \frac{1}{n^2 + 7\, n + 12}$

Se trata de una serie de términos positivos. Para estudiar su convergencia procedemos como sigue.

- Condición necesaria de convergencia

In[37]:= `Limit[`a_n`, n → ∞]`

Out[37]= 0

La serie puede ser convergente.

- Criterio del cociente

In[38]:= `Limit[`$\frac{a_{n+1}}{a_n}$`, n → ∞]`

Out[38]= 1

Estamos ante un caso dudoso. Para resolverlo aplicamos el criterio de Raabe.

- Criterio de Raabe

In[39]:= `Limit[`$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$`, n → ∞]`

Out[39]= 2

Como el límite obtenido es mayor que 1 la serie es convergente.

- Calculamos su suma.

Mathematica puede calcula el valor exacto de la suma de diferentes tipos de series mediante la instrucción **Sum**

In[40]:= `Sum[`a_n`, {n, 1, ∞}]`

Out[40]= $\frac{1}{4}$

También podemos utilizar el símbolo $\sum_{\square=\square}^{\square} \blacksquare$ que figura en la paleta BasicImput.

In[41]:= $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Out[41]= $\frac{1}{4}$

Ejemplo 3.7

Probar que la serie $\sum \frac{n}{2^n}$ *es convergente. Calcular su suma a partir de la sucesión de sumas parciales.*

- Definimos el término general de la serie

```
In[42]:= b_n_ := n/2^n
```

Se trata de una serie de términos positivos.

- Condición necesaria de convergencia

```
In[43]:= Limit[b_n , n → ∞]
Out[43]= 0
```

La serie puede ser convergente.

- Criterio del cociente

```
In[44]:= Limit[b_(n+1)/b_n , n → ∞]
Out[44]= 1/2
```

Como el límite es menor que 1 la serie es convergente.

- Sucesión de sumas parciales.

```
In[45]:= S_n_ = Sum[b_k, {k, 1, n}]
Out[45]= 2^-n (-n + 2^(n+1) - 2)
```

Mathematica nos facilita, en este caso, una expresión explícita para el término general de la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales. Ahora podemos calcular el valor de la suma de la serie estudiando el límite de la sucesión $\{S_n\}$.

- Suma de la serie

```
In[46]:= Limit[S_n , n → ∞]
Out[46]= 2
```

El valor de la suma también podría haberse obtenido directamente:

```
In[47]:= Sum[b_n, {n, 1, ∞}]
Out[47]= 2
```

Ejemplo 3.8

Probar que la serie $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(\log n)^n}$ *es convergente. Calcular su suma.*

- Definimos el término general de la serie

```
In[48]:= c[n_] := 1/(Log[n])^n
```

Se trata de una serie de términos positivos.

- Condición necesaria de convergencia

```
In[49]:= Limit[c[n], n → ∞]

Out[49]= 0
```

La serie puede ser convergente.

- Criterio de la raíz

```
In[50]:= Limit[c[n]^(1/n), n → ∞]

Out[50]= 0
```

Como el límite es menor que 1 la serie es convergente.

- Sucesión de sumas parciales.

In[51]:= $S_{n\_} = \sum_{k=2}^{n} c_k$

Out[51]= $\sum_{k=2}^{n} c_k$

En este caso, *Mathematica* no ha sido capaz de darnos una expresión explícita para el término general de la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales.

- Suma de la serie

In[52]:= $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$

Out[52]= $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$

El programa Mathematica tampoco ha podido darnos el valor exacto de la suma. Sin embargo, podemos pedirle que nos de un valor aproximado usando el comando **N**.

In[53]:= $N\left[\sum_{n=2}^{\infty} c_n\right]$

Out[53]= 3.24261

También podemos pedirle que nos dé el valor de la suma con una cierta precisión.

```
In[54]:= N[Sum[c_n, {n, 2, ∞}], 20]
```

$$\text{In[54]:= } N\left[\sum_{n=2}^{\infty} c_n,\ 20\right]$$

Out[54]= 3.2426094109252482106

Si bien el comando **N** puede servirnos, en la mayoría de los casos, para obtener un valor aproximado de la suma de una serie, el programa *Mathematica* incorpora dos instrucciones específicas para este propósito: **NSum** y **EulerSum**.

```
In[55]:= NSum[c_n , {n , 2 , ∞}]

Out[55]= 3.24261
```

La instrucción **NSum** nos da un valor aproximado de la serie con una precisión de 6 dígitos.

Por su parte la instrucción **EulerSum** no forma parte del repertorio básico de instrucciones disponibles en el núcleo del programa *Mathematica*. Para poder utilizar esta instrucción hay que cargar el paquete **NumericalMath`Nlimit`**.

```
In[56]:= << NumericalMath`NLimit`

In[57]:= EulerSum[c_n , {n , 2 , ∞}]

Out[57]= 3.24261
```

La instrucción **EulerSum** utiliza algoritmos matemáticos más complejos para calcular la suma de la serie y, en la mayoría de los casos, el resultado obtenido es bastante más fiable.

Opera con bastante eficiencia, por ejemplo, cuando se trata de sumar series del tipo $\sum p(n)r^n$ donde $p(n)$ es un polinomio y $0<r<1$ y cuando se trata de sumar series alternadas.

Ejemplo 3.9

Calcular un valor aproximado de la suma de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(n^2-3n+1\right)$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-2n+3}{n!}$.

a) Definimos el término general de la serie y calculamos un valor aproximado de la suma

$$\text{In[58]:= } d_{n\_} := \left(\frac{-1}{2}\right)^n (n^2 - 3\,n + 1)$$

```
In[59]:= EulerSum[d_n , {n , 1 , ∞}]

Out[59]= 0.259259
```

b) Definimos el término general de la serie y calculamos un valor aproximado de la suma

$$\text{In[66]:= } e_{n\_} := \frac{(-1)^n}{2\,n - 1}$$

```
In[67]:= EulerSum[e_n , {n , 1 , ∞}]

Out[67]= -0.785398
```

c) Definimos el término general de la serie y calculamos un valor aproximado de la suma

```
In[68]:= f_n_ := (n^2 - 2 n + 3)/n!

In[69]:= EulerSum[f_n, {n, 1, ∞}]

Out[69]= 5.15485
```

Aunque hemos utilizado la instrucción **EulerSum**, en los tres casos anteriores podríamos haber obtenido un valor aproximado de la suma de la serie utilizando también la instrucción **NSum** o el comando **N[ ]**.

También, en cualquiera de los tres casos, *Mathematica* nos facilita el valor exacto de la suma.

In[60]:= $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$

Out[60]= $\frac{7}{27}$

In[63]:= $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$

Out[63]= $\frac{1}{4}(-4+\pi)$

In[70]:= $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Out[70]= $3(-1+e)$

3.- Ejercicios propuestos

1.- Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{3}{4n-2}$. Se pide:

a) escribir los 20 primeros términos y representarlos gráficamente,

b) estudiar el crecimiento y la acotación,

c) calcular el límite.

2.- Probar que la sucesión de término general $b_n = \cos(n\pi)$ es oscilante, estudiando las subsucesiones $\{b_{2n}\}$ y $\{b_{2n-1}\}$.

3.- Obtener la suma de:

a) los n primeros números naturales

b) los n primeros números impares.

4.- Probar que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

5.- Estudiar la sucesión recurrente dada por $x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, \quad n \in N$, para los valores de $a = 1, \quad a = \frac{1}{2}$ y $a = \frac{1}{4}$.

6.- Probar que las siguientes series son convergentes. Calcular el valor de la suma o, en su caso, un valor aproximado.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

7.- Comprobar que la serie $\sum \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ es hipergeométrica. Calcular su suma:

a) utilizando la fórmula para sumar una serie hipergeométrica

b) directamente con el programa *Mathematica*

8.- Probar que la serie $\sum (-1)^n sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ es convergente. Hallar el valor de su suma o, en su caso, un valor aproximado.