2.3 División de polinomios

Supongamos que queremos dividir el polinomio $A(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 3$ entre el polinomio $B(x) = x^2 + 1$. Para ello dividimos el primer término de $A(x)$, es decir, $3x^4$, entre el primero de $B(x)$, es decir, x^2 . De esta forma se obtiene el primer término del cociente, $3x^2$. A continuación se multiplica $3x^2$ por el divisor y se resta al dividendo, obteniéndose así el primer dividendo parcial. La operación se repite hasta obtener un dividendo parcial con grado inferior al del divisor. Notar, por otra parte, como para que sea posible una división de polinomios, el grado del polinomio que se divide ha de ser mayor o igual que el grado del polinomio que hace el papel de divisor.

Ejemplo 2.3 *Dividir el polinomio $A(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 3$ entre el polinomio $B(x) = x^2 + 1$.*

Siguiendo el esquema explicado, la división se realizaría en la forma:

$$\begin{array}{r}
 3x^4 \quad 0 \quad -5x^2 \quad +x \quad -3 \quad | \quad x^2 + 1 \\
 \underline{-3x^4 \quad \quad -3x^2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad} \quad 3x^2 - 8 \\
 \quad \quad \quad -8x^2 \quad +x \quad -3 \\
 \quad \quad \quad \quad \underline{8x^2 \quad \quad \quad +8} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \quad +5
 \end{array}$$

2.4 Raíces de un polinomio

Se dice que a es una raíz del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$. Es interesante conocer las siguientes propiedades:

- El número de raíces reales de un polinomio es inferior o igual a su grado.
- Si $a \neq 0$ es una raíz de un polinomio $P(x)$, entonces a es divisor del término independiente del polinomio $P(x)$.
- Si a es una raíz de un polinomio $P(x)$, entonces $(x - a)$ es un factor del polinomio $P(x)$, es decir, la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ es exacta.
- **Descomposición factorial:** Si $r_1, r_2, \dots, r_n$ son las raíces de un polinomio $P(x)$, entonces

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

2.5 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 14. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

(a) $(x^2 - 5x + 1) - (x + 3) \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$.

(b) $(2x + 1)^2$.

(c) $(2x - 1)^2$.

(d) $(2x + 1)(2x - 1)$.

(e) $(6x^3 - 7x^2 - 5) : (2x^2 - x)$.

Ejercicio 15. Dado el polinomio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 6x$, determina cuáles de los siguientes valores son raíces de $P(x)$:

$$0, \quad -1, \quad 3, \quad 5, \quad 7 \quad 9 \quad y \quad 11.$$

Expresa el polinomio $P(x)$ descompuesto factorialmente.

Ejercicio 16. Halla las raíces de los polinomios:

(a) $P(x) = 3x(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right)$; (b) $Q(x) = (x - 1)^3$.

Ejercicio 17. Descompón factorialmente los polinomios:

(a) $P(x) = x^2 - 9$.

(b) $Q(x) = (-x^2 + 2x + 3)(x - 3)$.

(c) $R(x) = 3x^5 + 3x^4$.

Ejercicio 18. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ del ejercicio anterior.