3 Ecuaciones

Una **ecuación** es una igualdad en la que aparecen ligados, mediante operaciones algebraicas, números y letras. Las letras que aparecen en una ecuación se llaman **incógnitas**.

Existen varios criterios para clasificar las ecuaciones:

- Por el **número de incógnitas** las ecuaciones pueden ser:
  - *De una incógnita.* Por ejemplo, $2x + 3 = 5 - \frac{x}{2}$.
  - *De dos incógnitas.* Por ejemplo, $x + \frac{y}{3} = 4$.
  - *De tres incógnitas.* Por ejemplo, $x + y + 2z = 4$. Y así sucesivamente.
- Atendiendo al término de **mayor grado** las ecuaciones se clasifican en:
  - *Ecuaciones de primer grado o lineales.* Son aquellas en las que el mayor exponente es uno. Por ejemplo, $x + 2y = 3$.
  - *Ecuaciones de segundo grado.* Cuando el mayor exponente con el que figura cualquier incógnita es dos. Por ejemplo, $x^2 + x - 2 = 0$.
  - *Ecuaciones de grado n.* Cuando el mayor exponente es n. Por ejemplo, $x^n + x^{n-1} + \cdots + 2x^2 - x + 1 = 0$.
- Atendiendo a la forma de presentarse las incógnitas, las ecuaciones se clasifican en:
  - *Ecuaciones racionales.* Cuando ninguna incógnita aparece bajo el signo de raíz. Por ejemplo, $(x + 2)^3 = 7 - x$.
  - *Ecuaciones irracionales.* Cuando aparece alguna incógnita bajo el signo de raíz. Por ejemplo, $\sqrt{2x + 5} = x - 1$.
  - *Ecuaciones logarítmicas.* Cuando la incógnita aparece en el argumento de un logaritmo. Por ejemplo, $2\log_2(x - 2) - \log_2 x = 0$.

3.1 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita es interesante recordar las dos siguientes propiedades:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma (resta) el mismo número, se obtiene una ecuación equivalente; es decir, que tiene las mismas soluciones que la ecuación original.

- Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica (divide) por un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.

Ejemplo 3.1 *Resuelve la ecuación:*

$$\frac{x}{2} - \frac{x+2}{3} = 5x + \frac{x+3}{6}.$$

Lo primero que tendremos que hacer es expresar todas las fracciones con el mismo denominador. Para ello calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores que en este caso es 6. Así, expresando todas las fracciones con denominador 6 la ecuación sería:

$$\frac{3x}{6} - \frac{2x+4}{6} = \frac{30x}{6} + \frac{x+3}{6}.$$

A continuación, multiplicando ambos miembros de la ecuación por 6, eliminamos los denominadores. Por tanto,

$$3x - 2x - 4 = 30x + x + 3.$$

Ahora pasamos al primer miembro todos los términos en x y escribimos en el segundo miembro todos los términos independientes.

$$3x - 2x - 30x - x = 3 + 4 \quad \Longrightarrow \quad -30x = 7.$$

Finalmente despejamos la incógnita y se obtiene

$$x = \frac{7}{-30}.$$

3.2 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo del valor del **discriminante**, $\Delta = b^2 - 4ac$, se pueden dar los siguientes casos:

- Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

- Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene una única solución real que es doble.
- Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene soluciones reales.

Geométricamente, los casos anteriores determinan las distintas posiciones de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ respecto del eje de abscisas. Así, en el primer caso tendríamos una parábola que cortaría al eje de abscisas en dos puntos. En el segundo caso la parábola tendría un único punto de corte con el eje OX. Finalmente, en el tercer caso la parábola no tendría puntos de corte con el eje de abscisas.

Ejemplo 3.2 *Resuelve la ecuación*

$$x^2 + (x+1)^2 - \frac{7}{4} = 1.$$

Desarrollando el cuadrado indicado, queda

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - \frac{7}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + 2x - \frac{7}{4} = 0.$$

Multiplicando ahora por 4 para quitar denominadores se obtiene:

$$8x^2 + 8x - 7 = 0.$$

Finalmente, aplicando la fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado se concluye que

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-7)}}{16} = \frac{-8 \pm \sqrt{288}}{16}.$$

3.3 Ecuaciones de grado mayor o igual que tres con una incógnita

La expresión general de una ecuación de tercer grado con una incógnita es de la forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0.$$

Para resolver esta ecuación no hay fórmulas asequibles que nos permitan hallar directamente las soluciones, salvo que haya alguna solución entera que, si existe, será divisor del término independiente, d. Una vez conocida esta solución, s, sabemos que

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - s)(ax^2 + b'x + c') = 0.$$

Así, las otras soluciones de la ecuación de tercer grado son las soluciones de la ecuación $ax^2 + b'x + c' = 0$. Un procedimiento similar puede seguirse para encontrar las raíces de una ecuación de grado mayor que tres con una incógnita.

Ejemplo 3.3 *Resuelve la ecuación*

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0.$$

Notemos en primer lugar que los únicos enteros divisores del término independiente son: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 6, -6, 10, -10, 15, -15, 30 y -30. Por tanto, las soluciones enteras de la ecuación deben estar entre estos números. Probando se observa que

$$(-2)^3 + 4(-2)^2 - 11(-2) - 30 = 0.$$

Por tanto, -2 es una solución de la ecuación. A continuación dividimos $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$ entre $x + 2$. Así se tiene que

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = (x + 2)(x^2 + 2x - 15).$$

Finalmente resolvemos la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-15)}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = 3 \text{ y } -5.$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$ son -2, 3 y -5.

3.4 Ecuaciones irracionales

Una **ecuación irracional** es una ecuación en la que la incógnita aparece dentro de una raíz. Para resolver una ecuación irracional se aisla la raíz en uno de los miembros y a continuación se elevan ambos miembros al índice de la citada raíz. De esta forma conseguimos eliminar la raíz.

Ejemplo 3.4 *Resuelve la ecuación irracional*

$$x - \sqrt{2x - 4} = 6.$$

En primer lugar aislamos la raíz en uno de los miembros de la ecuación.

$$x - 6 = \sqrt{2x - 4}.$$

Ahora elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$(x - 6)^2 = (\sqrt{2x - 4})^2.$$

Simplificando se tiene

$$x^2 - 12x + 36 = 2x - 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Finalmente, resolvemos la ecuación de segundo grado obtenida.

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 40}}{2} = \frac{14 \pm 6}{2} = 10 \text{ y } 4.$$

3.5 Ecuaciones logarítmicas

Una **ecuación logarítmica** es aquélla en la que la incógnita x aparece en el argumento de un logaritmo. Para resolver una ecuación logarítmica tendremos que utilizar la equivalencia

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y. \tag{I.3}$$

Por otra parte, es interesante recordar las propiedades de los logaritmos:

- $\log_a a^x = x$
- $\log_a 1 = 0.$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$
- $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$
- $y \cdot \log_a x = \log_a x^y.$
- $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}.$

Ejemplo 3.5 *Resuelve la ecuación logarítmica*

$$2\, log_2 (x - 2) - log_2 x = 0.$$

Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos, la ecuación considerada puede ser escrita en la forma:

$$\log_2 \frac{(x-2)^2}{x} = 0.$$

Ahora, usando (I.3) se tiene que

$$\frac{(x-2)^2}{x} = 2^0.$$

Por tanto, llegamos a la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 4x + 4 = x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son 1 y 4.

3.6 Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

A continuación describimos los métodos de **sustitución**, **reducción** e **igualación** para la resolución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

■ Método de sustitución

Para aplicar el método de sustitución a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas x e y se despeja en primer lugar una de las incógnitas, por ejemplo, la y, en una ecuación. A continuación la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación. Así se obtiene una ecuación en la que la única incógnita es la x. Resuelta esta última ecuación, se sustituye el valor de x en la otra ecuación y se obtiene el valor de y.

Ejemplo 3.6 *Resuelve por el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 3 \\ x - 2y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Para resolver el sistema considerado por el método de sustitución, despejamos, por ejemplo, la y en la primera ecuación.

$$y = -3 + x^2.$$

A continuación sustituimos en la segunda ecuación el valor obtenido de y, de manera que llegamos a la siguiente ecuación en la que la única incógnita es la x:

$$x - 2(-3 + x^2) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se tiene que $x = 2$ y $x = -\dfrac{3}{2}$. Finalmente sustituyendo en la primera ecuación los valores obtenidos de x se obtienen los correspondientes valores de y:

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad 2^2 - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 4.$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{9}{2}.$$

■ Método de reducción

El método de reducción consiste en multiplicar adecuadamente las ecuaciones de manera que al sumarlas o restarlas resulte una ecuación con una sola incógnita. Así, una vez hallada ésta, se sustituye su valor en cualesquiera de las ecuaciones del principio y se calcula la otra incógnita.

Ejemplo 3.7 *Resuelve por el método de reducción el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 3 \\ x - 2y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Es obvio que la incógnita que vamos a eliminar es la y. Para ello, por ejemplo, multiplicando la primera ecuación por -2 y sumándola a la segunda se tiene

$$-2x^2 + x = -6.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que $x = 2$ y $x = -\dfrac{3}{2}$. Finalmente sustituyendo en la primera ecuación concluimos que

$$\begin{array}{ll} \text{Si} & x = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 4. \\ \text{Si} & x = -\dfrac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{9}{2}. \end{array}$$

■ Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las 2 ecuaciones. Así, igualando las expresiones obtenidas se llega a una ecuación con una sola incógnita. Finalmente, una vez calculado el valor de dicha incógnita se procede como antes para el cálculo de la otra incógnita.

Ejemplo 3.8 *Resuelve por el método de igualación el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 3 \\ x - 2y & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Para resolver el sistema por el método de igualación despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones. Así se tiene:

$$y = x^2 - 3 \quad \text{e} \quad y = \frac{x}{2}.$$

Igualando ahora ambas expresiones resulta la ecuación

$$x^2 - 3 = \frac{x}{2},$$

cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = -\frac{3}{2}$. Finalmente, sustituyendo en la primera ecuación concluimos como antes que

$$\begin{array}{lll} \text{Si} \quad x = 2 & \Longrightarrow & y = 4. \\ \text{Si} \quad x = -\dfrac{3}{2} & \Longrightarrow & y = \dfrac{9}{2}. \end{array}$$

3.7 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 19. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

(a) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{5x+1}{6} + \dfrac{1}{8} = x + 2.$

(b) $x + 2 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{3}{8}.$

(c) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{2x}{(x-1)^2}.$

Ejercicio 20. *La suma de tres números consecutivos es 90. ¿Qué números son?*

Ejercicio 21. *En una clase hay 37 alumnos. Si hay 9 chicos más que chicas, ¿cuántos chicos y chicas hay?*

Ejercicio 22. *Un alumno hace cinco exámenes a lo largo del curso. Los cuatro primeros tienen el mismo valor y el quinto vale el triple que cada uno de los anteriores. Si en los cuatro primeros exámenes dicho alumno tiene una media de 6'2, ¿qué nota debe sacar en el quinto para conseguir un 7 de nota media?*

Ejercicio 23. *¿Cuántos litros de alcohol puro hay que añadir a 1 litro de solución al 70% de alcohol para que resulte una mezcla al 90% de alcohol?*

Ejercicio 24. *Una mujer desea invertir 12.000 euros. Una parte de ese dinero lo meterá en una cuenta a plazo que le produce un 7% de interés y el resto en un fondo de inversión que le renta un 10%. ¿Cuánto tendría que invertir en cada cosa para obtener una rentabilidad del 9%?*

Ejercicio 25. *Un profesional puede teclear un escrito en 12 horas; un amigo, no experto, lo puede hacer en 18 horas. ¿Cuántas horas tardarían en teclearlo entre los dos?*

Ejercicio 26. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

(b) $-x^2 + 5x - 7 = 0$.

Dibuja las parábolas de ecuaciones $y = x^2 - 5x + 6 = 0$ *e* $y = -x^2 + 5x - 7$ *y comprueba gráficamente que las soluciones obtenidas para las ecuaciones anteriores corresponden a los puntos de corte de las correspondientes parábolas con el eje de abscisas.*

Ejercicio 27. *Resuelve la ecuación*

$$\frac{2x-3}{x+2} = \frac{2x-5}{2-x}.$$

Ejercicio 28. *Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:*

(a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

(b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$.

Ejercicio 29. *Un lado de un rectángulo es 16 cm. mayor que el otro. Si el lado menor aumenta en 8 cm. y el mayor diminuye en 10 cm., el área permanece invariable. Halla las dimensiones del rectángulo original.*

Ejercicio 30. *En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide 2 cm. más que el otro y 2 cm. menos que la hipotenusa. Calcula las longitudes de los lados.*

Ejercicio 31. *Las pérdidas o ganancias de una empresa siguen una ley*

$$y = \frac{2x-4}{x+2},$$

siendo x *los años de vida de la empresa e* y *las pérdidas o ganancias de la empresa en millones de euros.*

(a) *Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.*

(b) *¿Pueden ser sus beneficios de 3 millones de euros en algún momento? Justifica la respuesta.*

Ejercicio 32. *Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:*

(a) $x + \sqrt{x+2} = 4$.

(b) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.

Ejercicio 33. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

(a) $ln\,2 + ln\,(11 - x^2) = 2ln\,(5 - x)$.

(b) $ln\,x = \dfrac{2 - ln\,x}{ln\,x}$.

(c) $\log_5 x + \log_x 125 = \dfrac{7}{2}$.

(d) $\dfrac{ln\,(16 - x^2)}{ln\,(3x - 4)} = 2$.

(e) $4^{2x+1} = 8^{2x}$.

Ejercicio 34. *Resuelve el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x+1}{3} & = & y+1 \\ 3 + \dfrac{x-3y}{2} & = & \dfrac{3}{2} + 2 \end{array}\right\}.$$

Ejercicio 35. *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:*

(a) $\left.\begin{array}{rcl} 3x - y^2 & = & 5 \\ 2x - y^2 & = & 2 \end{array}\right\}.$ **(b)** $\left.\begin{array}{rcl} x^2 - 3 & = & y^2 \\ y - 2x & = & 5 \end{array}\right\}.$

Ejercicio 36. *Calcula las dimensiones de un solar rectangular de superficie 1.200* m^2 *y de diagonal 50* m.

Ejercicio 37. *Un ciclista recorrió 120 Km. A la vuelta, llevando una velocidad de 5 Km/h. más, tardó 2 horas menos. Calcula el tiempo total que tardó el ciclista en completar la ida y la vuelta.*