

# TEMA 3.- LA FÍSICA MODERNA

Las distintas ramas de la Física Clásica desarrolladas, como hemos visto, hasta mediados del siglo XIX permitieron un rápido avance tecnológico durante la segunda mitad del siglo XIX. Este desarrollo permitió la planificación de nuevos experimentos o la repetición de otros de una forma más exacta que permitió el descubrimiento de nuevos fenómenos que, paradójicamente, no podían ser explicados utilizando los conocimientos de las ramas de la Física conocidos hasta la fecha.

Esto dio lugar a que, a principios del siglo XX, surgieran nuevas ramas de la Física que explicaban los nuevos fenómenos observados. Las ramas más significativas que aparecieron son la Mecánica Relativista, la Mecánica Cuántica, y la Física de partículas.

Aquí vamos a exponer que resultados dieron lugar a la ruptura entre las ramas de la Física Clásica haciendo necesario el desarrollo de las disciplinas tratadas por la Física Moderna y cuales son las leyes fundamentales de estas nuevas ramas de la Física.

# FÍSICA RELATIVISTA

Como es bien sabido, la teoría de la relatividad la debemos a Albert Einstein (1879-1955). La teoría de la relatividad consta de dos partes bien diferenciadas que responden además a la forma en la que el propio Einstein desarrolló su teoría: “Teoría Especial de la Relatividad” y “ Teoría General de la Relatividad”. Einstein publicó la teoría especial de la relatividad en 1905 y aunque ya tenía en mente las ideas básicas en la teoría general de la relatividad tardó en darles forma 10 año más publicando dicha teoría en 1915.

En la teoría especial de la relatividad, Einstein unificó los resultados obtenidos previamente por otros investigadores y le dio sentido físico a los resultados obtenidos. Como resultados más importante de esta parte de la teoría destacan la relatividad del espacio y del tiempo dependiendo del sistema de referencia del observador y la relación entre materia y energía, quizás la expresión más famosa de la Física  $E=mc^2$ .

En la teoría general de la relatividad, utilizando la relatividad del espacio-tiempo, Einstein propone que la aceleración de la gravedad que, según la mecánica clásica de Newton, aparece como consecuencia de fuerza atractiva que aparece entre cualesquiera dos masas en el espacio es en realidad la deformación del espacio-tiempo provocado por cualquier objeto con masa.

Desde un punto de vista de la educación secundaria y bachillerato, sólo los conceptos relacionados con la relatividad especial son los que se desarrollan. Por este motivo, en este curso, nos centraremos fundamentalmente en dicha parte de la teoría y trataremos de forma más cualitativa los aspectos más fundamentales de la teoría general de la relatividad.

## **Teoría especial de la relatividad**

1. Antecedentes históricos.
2. Simultaneidad de procesos y relatividad del tiempo.
3. Postulados de Einstein de la teoría de la relatividad especial.
4. Transformaciones de Lorentz.
5. Conservación de la cantidad de movimiento. Masa relativista.
6. Energía relativista:  $E=mc^2$ .

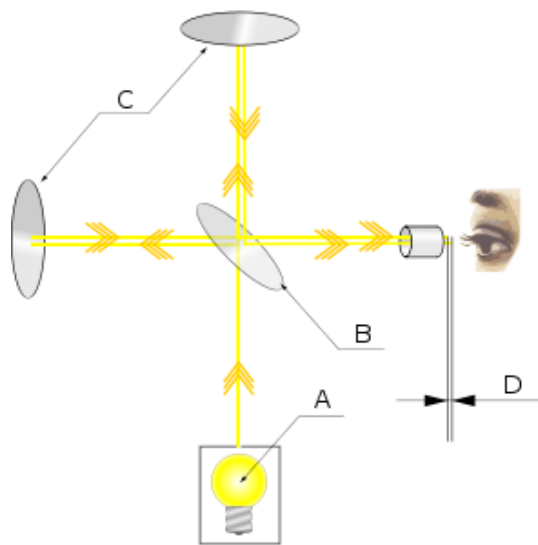
## **Teoría general de la relatividad**

1. Principio de equivalencia.
2. La teoría general de la relatividad. Comprobación experimental.
3. Actualidad en la teoría general de la relatividad.

## 1. EXPERIMENTO FALLIDO DE MICHELSON-MORLEY

Como hemos visto las ecuaciones de Maxwell predecían la existencia de ondas electromagnéticas que posteriormente demostró Hertz. Para los físicos de la época cualquier onda necesitaba un medio material para poder desplazarse puesto que entendían que todas las ondas debían de comportarse más o menos como las ondas sonoras. Sin embargo, se sabía que las ondas electromagnéticas viajaban por el espacio exterior donde no se conocía la existencia de materia. Así, se pensaba que existía un material, denominado éter, que impregnaba todo el espacio, que no podía ser detectado, y que era el que permitía la propagación de las ondas sonoras.

A finales del siglo XIX Michelson primero y después con la ayuda de Morley diseñaron un experimento para medir la velocidad de la tierra respecto a éter.

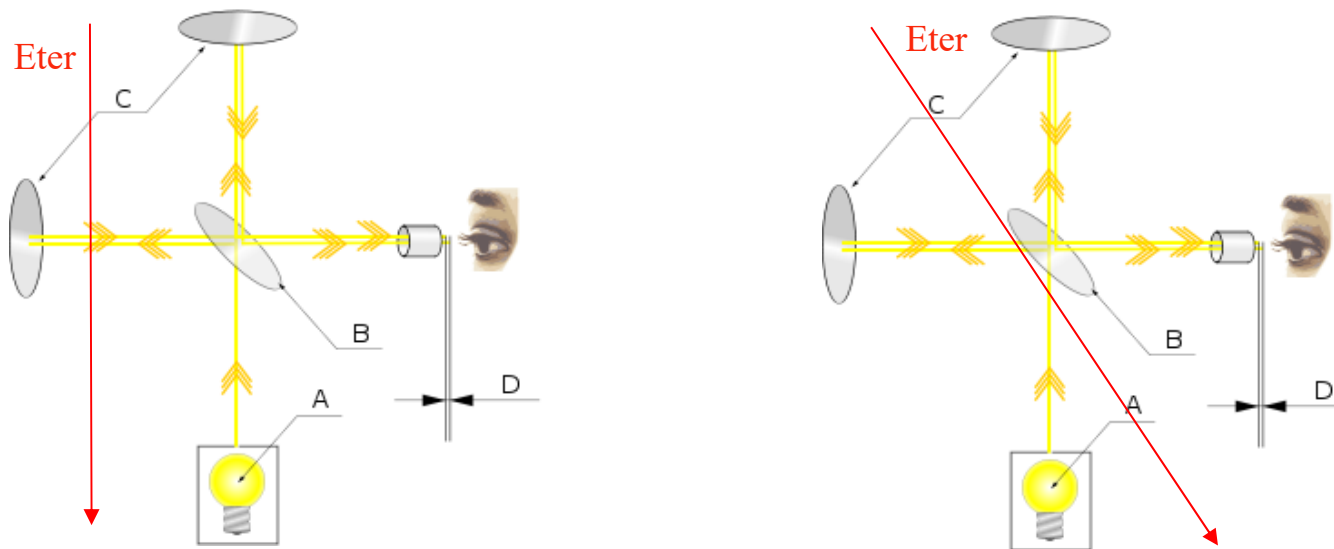


La luz que emite un foco luminoso pasa por un espejo y es dividido en dos haces, los cuales rebotan en dos espejos y se vuelven a juntar. Dado que la luz es una onda, siempre que tengamos una fuente que solo emite una longitud de onda (es decir, un color muy definido), al volver a juntarse, los dos haces interferirán produciendo máximos y mínimos de intensidad.

El patrón de interferencias que se forma depende de la diferencia de caminos que hayan recorrido los dos haces (normalmente este aparato se utiliza para medir diferencias entre las distancias de los dos espejos con exactitudes del orden de unos cientos de nanómetros). Sin embargo, también se puede lograr el mismo efecto si estas distancias permanecen fijas pero la velocidad del medio por el que viaja la luz varía en uno de los brazos

## 2. EXPERIMENTO FALLIDO DE MICHELSON-MORLEY

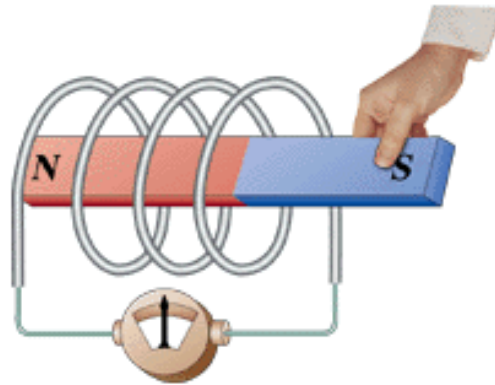
La idea era que como las ondas electromagnéticas (luz) viajaban por el éter y este se movía respecto a la tierra obtendríamos diferentes patrones de interferencias dependiendo del ángulo en el que colocásemos el interferómetro tal y como se muestra en la figura. De diferentes patrones de interferencias obtenidos sería relativamente sencillo obtener la velocidad de la tierra respecto a éter.



Los resultados fueron totalmente inesperados. Independientemente del ángulo no se obtenía diferencias en el camino recorrido por la luz, o lo que es lo mismo, que **el éter no tenía ninguna velocidad apreciable**. Es más por más que cambiaron las condiciones del experimento obtenían que **la velocidad de la luz era siempre la misma**.

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Según las experiencias de Faraday, si se introduce un imán en el interior de una espira y se mueve bien el imán bien la espira se induce una corriente eléctrica en la espira. Es decir, la experiencia deja claro que lo que importa para que se produzca el fenómeno de la inducción es que haya un movimiento relativo entre la espira e imán pero no quien se mueve.



Esto lleva inmediatamente a que las ecuaciones que determinen el fenómeno deben de ser invariantes respecto del sistema de referencia, es decir, tienen que tener la misma forma si consideramos como sistema de referencia el imán y movemos la espira o viceversa.

Resulta que las ecuaciones de Maxwell, que son las que rigen según la teoría clásica del electromagnetismo, todos los fenómenos eléctricos y magnéticos no son invariantes ante un cambio de sistema de referencia clásico. Vamos a ver que quiere decir esto.



## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Vamos, en primer lugar, a obtener las ecuaciones de las ondas electromagnéticas a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Hemos visto que las ecuaciones de Maxwell eran:

$$\begin{array}{ccc} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0} & & \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} & \text{Si consideramos una} & \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ & \text{región del espacio libre} & \\ & \text{de fuentes de campo} & \\ & \text{eléctrico y magnético} & \\ & \text{(cargas eléctricas y} & \\ & \text{corrientes)} & \\ & \longrightarrow & \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] & & \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{array}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Haciendo el rotacional de esta ecuación}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Haciendo el  
rotacional de  
esta ecuación

$$\Longrightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

Utilizando conjuntamente  
estas dos ecuaciones

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Haciendo el rotacional de esta ecuación}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Utilizando conjuntamente estas dos ecuaciones}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Tenemos en cuenta la relación vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \nabla \left( \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right) - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t)$$

La aplicamos al campo eléctrico

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= \nabla \left( \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \right) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \\ &= -\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Haciendo el rotacional de esta ecuación}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Utilizando conjuntamente estas dos ecuaciones}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Tenemos en cuenta la relación vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t)$$

La aplicamos al campo eléctrico

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \xrightarrow{\text{Utilizando conjuntamente estas dos ecuaciones}} \quad \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Haciendo el rotacional de esta ecuación}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Utilizando conjuntamente estas dos ecuaciones}} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Tenemos en cuenta la relación vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t)$$

La aplicamos al campo eléctrico

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \xrightarrow{\text{Utilizando conjuntamente estas dos ecuaciones}} \quad \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Se puede llegar a una expresión análoga para el campo magnético

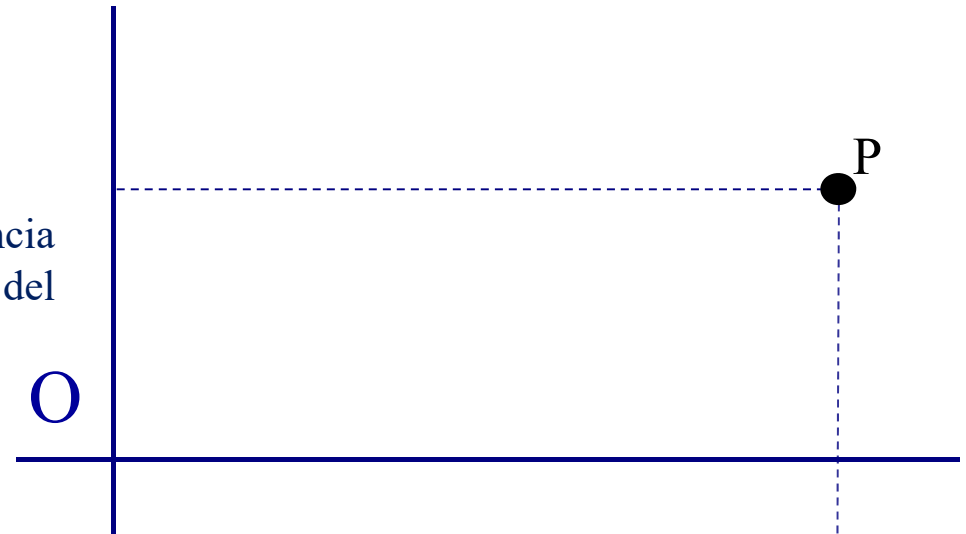
$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Hemos llegado a:  $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

Esto significa que si elegimos un sistema de referencia (ejes azules), el campo eléctrico en cualquier punto del espacio viene dado por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$



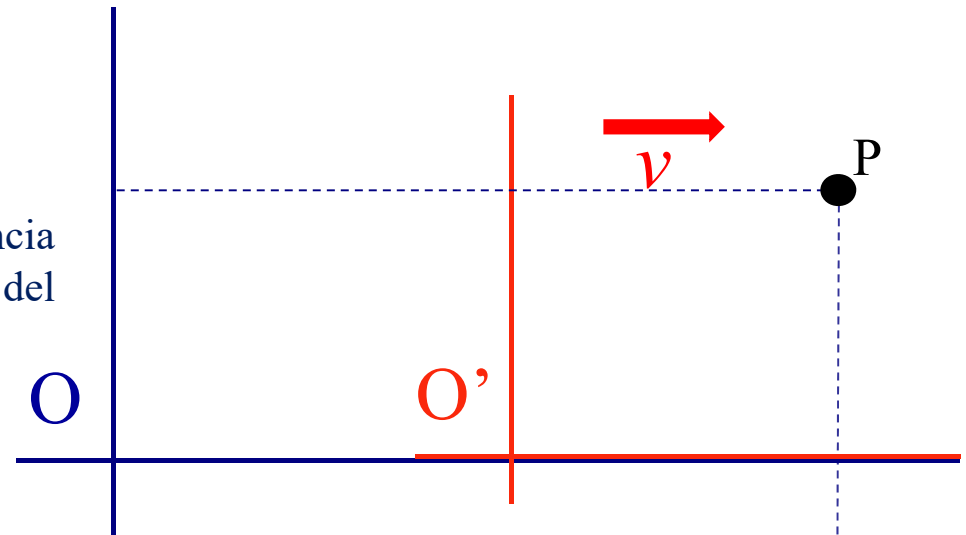


## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Hemos llegado a:  $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

Esto significa que si elegimos un sistema de referencia (ejes azules), el campo eléctrico en cualquier punto del espacio viene dado por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$



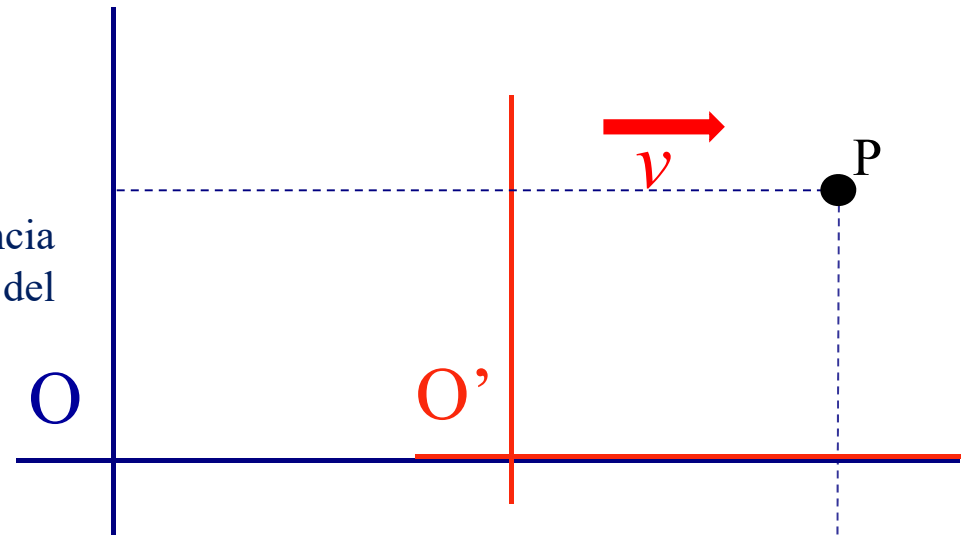
Vamos a considerar a hora otro sistema de referencia (ejes rojos), que se mueven con una velocidad  $v$  respecto al primero en la dirección indicada en la figura.

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Hemos llegado a:  $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

Esto significa que si elegimos un sistema de referencia (ejes azules), el campo eléctrico en cualquier punto del espacio viene dado por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$



Vamos a considerar a hora otro sistema de referencia (ejes rojos), que se mueven con una velocidad  $v$  respecto al primero en la dirección indicada en la figura. Para que las ecuaciones sean invariantes respecto al sistema de referencia tiene que cumplirse que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio se tendría que poder calcular como:

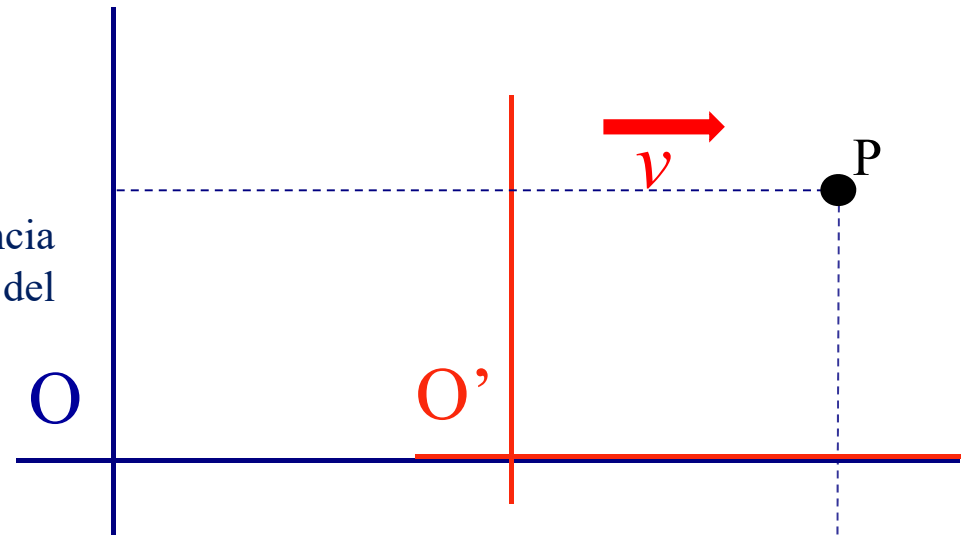
$$\nabla'^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Hemos llegado a:  $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$

Esto significa que si elegimos un sistema de referencia (ejes azules), el campo eléctrico en cualquier punto del espacio viene dado por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$



Vamos a considerar a hora otro sistema de referencia (ejes rojos), que se mueven con una velocidad  $v$  respecto al primero en la dirección indicada en la figura. Para que las ecuaciones sean invariantes respecto al sistema de referencia tiene que cumplirse que el campo eléctrico en cualquier punto del espacio se tendría que poder calcular como:

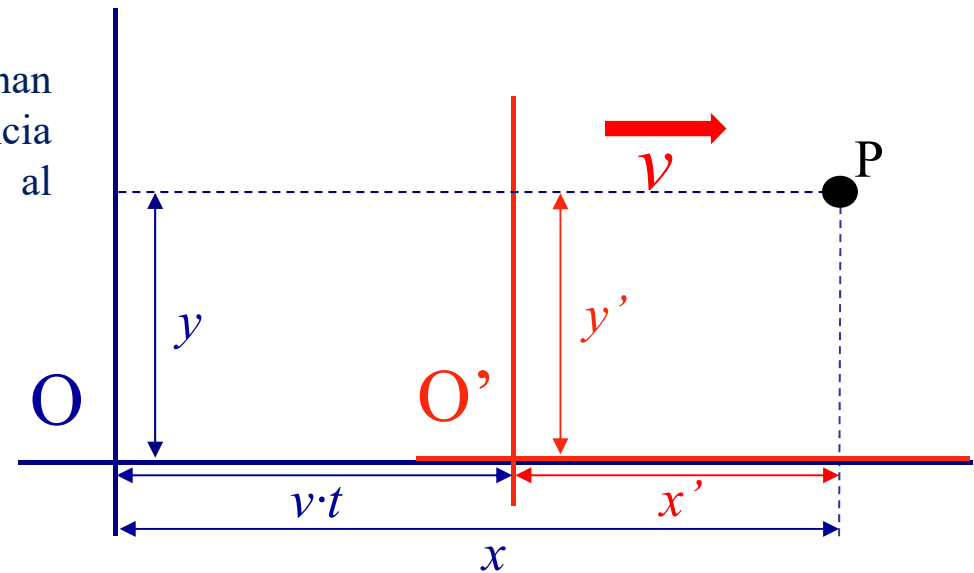
$$\nabla'^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}$$

Vamos a comprobar a continuación que esto no es así.

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Vamos a ver en primer lugar como se relacionan las coordenadas respecto al sistema de referencia O (ejes azules) con las coordenadas respecto al sistema de referencia O' (ejes rojos)

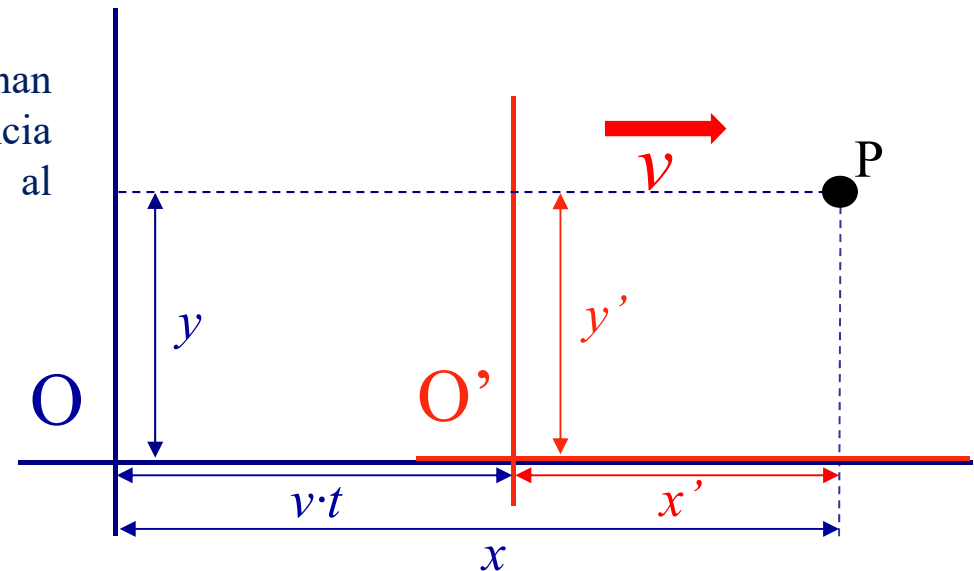
$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right|$$



## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Vamos a ver en primer lugar como se relacionan las coordenadas respecto al sistema de referencia O (ejes azules) con las coordenadas respecto al sistema de referencia O' (ejes rojos)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right|$$



A continuación, utilizando este resultado, calculamos las derivadas de las coordenadas espaciales del sistema O' respecto de las coordenadas espaciales del sistema O.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= 1; & \frac{\partial x'}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial x'}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -v \\ \frac{\partial y'}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial y'}{\partial y} &= 1; & \frac{\partial y'}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial y'}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial z'}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial z'}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial z'}{\partial z} &= 1; & \frac{\partial z'}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial t'}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial t'}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1; \end{aligned}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Utilizando la regla de la cadena calculamos las derivadas que aparecen en la expresión obtenida para el campo eléctrico

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \right|$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= 1; & \frac{\partial x'}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial x'}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -v \\ \frac{\partial y'}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial y'}{\partial y} &= 1; & \frac{\partial y'}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial y'}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial z'}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial z'}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial z'}{\partial z} &= 1; & \frac{\partial z'}{\partial t} &= 0; \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial t'}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial t'}{\partial z} &= 0; & \frac{\partial t'}{\partial t} &= 1; \end{aligned}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Utilizando la regla de la cadena calculamos las derivadas que aparecen en la expresión obtenida para el campo eléctrico

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial x'}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial x'}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \\ \frac{\partial y'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial z'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1; \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial t'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial t'}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial t'}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1; \end{array}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial \vec{E}}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} \right] = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial y} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y'} \right] = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial \vec{E}}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial z} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} \right] = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} \right] = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - v \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} \right] + \\ &\quad + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - v \frac{\partial \vec{E}}{\partial x'} \right] = -v \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} - v \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'} \end{aligned}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Reescribiendo la ecuación de partida obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -v \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} - v \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} - 2v\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'} + v^2 \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2}$$

↓

$$\nabla'^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2} - 2v\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x' \partial t'} + v^2 \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2}$$



## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

¿Hay alguna relación entre las coordenadas del sistema O y O' que hace que el cambio sistema de referencia deje invariante la ecuación de onda para el campo eléctrico?

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

¿Hay alguna relación entre las coordenadas del sistema O y O' que hace que el cambio sistema de referencia deje invariante la ecuación de onda para el campo eléctrico?

La respuesta a esta pregunta es sí. Dicha relación fue calculada por primera vez en 1900 por Hendrik Antoon Lorentz. La relación entre las variables espaciales en ambos sistemas de referencia tendrían que ser:

$$\begin{array}{l}
 x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 y' = y \\
 z' = z \\
 t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & \frac{\partial x'}{\partial y} = 0; & \frac{\partial x'}{\partial z} = 0; & \frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 \frac{\partial y'}{\partial x} = 0; & \frac{\partial y'}{\partial y} = 1; & \frac{\partial y'}{\partial z} = 0; & \frac{\partial y'}{\partial t} = 0; \\
 \frac{\partial z'}{\partial x} = 0; & \frac{\partial z'}{\partial y} = 0; & \frac{\partial z'}{\partial z} = 1; & \frac{\partial z'}{\partial t} = 0; \\
 \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & \frac{\partial t'}{\partial y} = 0; & \frac{\partial t'}{\partial z} = 0; & \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};
 \end{array}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

¿Hay alguna relación entre las coordenadas del sistema O y O' que hace que el cambio sistema de referencia deje invariante la ecuación de onda para el campo eléctrico?

La respuesta a esta pregunta es sí. Dicha relación fue calculada por primera vez en 1900 por Hendrik Antoon Lorentz. La relación entre las variables espaciales en ambos sistemas de referencia tendrían que ser:

$$\begin{array}{l}
 x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 y' = y \\
 z' = z \\
 t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{cccc}
 \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & \frac{\partial x'}{\partial y} = 0; & \frac{\partial x'}{\partial z} = 0; & \frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 \frac{\partial y'}{\partial x} = 0; & \frac{\partial y'}{\partial y} = 1; & \frac{\partial y'}{\partial z} = 0; & \frac{\partial y'}{\partial t} = 0; \\
 \frac{\partial z'}{\partial x} = 0; & \frac{\partial z'}{\partial y} = 0; & \frac{\partial z'}{\partial z} = 1; & \frac{\partial z'}{\partial t} = 0; \\
 \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & \frac{\partial t'}{\partial y} = 0; & \frac{\partial t'}{\partial z} = 0; & \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};
 \end{array}$$

Con estas transformaciones se daría que la ecuación de onda en los dos sistemas de referencia (rojo y azul) se escribirían como:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z'^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t'^2}$$

## 2. INVARIABILIDAD DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL RESPECTO AL SISTEMA DE REFERENCIA

Lorentz obtuvo sus transformaciones como un mero juego matemático carente de sentido físico. Él mismo se dio cuenta que los resultados obtenidos no tenían sentido físico con las leyes de la física que se conocían. Así, es difícil explicar el factor de diferencia que aparece en la relación entre  $x$  y  $x'$  en la forma clásica y la expresión obtenida por Lorentz.

$$x' = x - vt; \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

No obstante más inexplicable era la relación existente entre los tiempos de ambos sistemas de referencia que predicen las transformaciones de Lorentz.

$$t' = t; \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

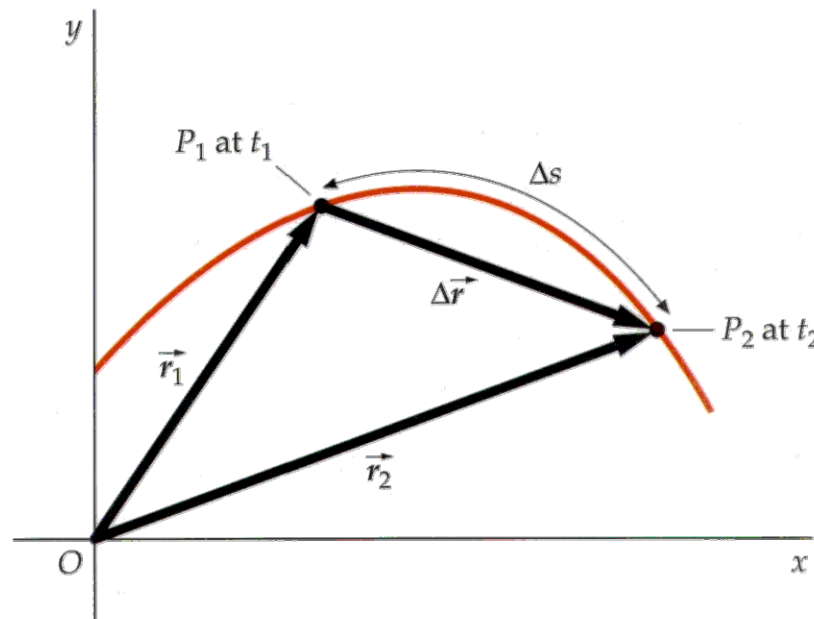
Hasta principios del siglo XX, en física (y el resto de disciplinas científicas) se suponía que el tiempo era una magnitud absoluta, es decir, el tiempo que tardaba en tener lugar un determinado proceso no dependía de las condiciones en las que se midiera. Sin embargo, la ecuación obtenida por Lorentz predecía que, si dos sistemas se movían con velocidad relativa uno respecto al otro, el tiempo que tardaba en producirse un determinado fenómeno en uno era diferente al tiempo que tardaba en producirse el mismo fenómeno en el otro. Esto rompía los esquemas de todos los físicos de principios del siglo XX y por eso fue rechazado hasta que Einstein en 1905 demostró que el tiempo tenía que ser relativo.

Como acabamos de ver las transformaciones de Lorentz implicaban que el tiempo que tardaba en producirse un mismo suceso fuese diferente si lo medíamos en un sistema de referencia dado y otro que se movía respecto a primero con velocidad constante. Eso violaba el sentido de tiempo absoluto que dominaba todas las disciplinas científicas de principios del siglo XX.

La primera contribución importante de Einstein fue darse cuenta de que efectivamente el tiempo era una magnitud relativa, es decir, depende del sistema de referencia desde el que se esté midiendo

Para demostrar esto, lo primero que hizo Einstein fue darse cuenta de que el concepto de tiempo estaba ligado al concepto de simultaneidad de procesos. A continuación demostró que dos procesos pueden ser simultáneos en un sistema de referencia y no en otro y con ello demostró que el tiempo es relativo. Vamos a profundizar más en estas ideas.

Si queremos describir el *movimiento* de una partícula, damos los valores de sus coordenadas como funciones del tiempo.

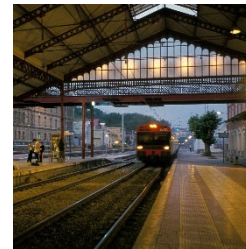


**Pero en realidad  
¿Qué es el *tiempo*?**

Todos los juicios que implican al tiempo son siempre juicios sobre *sucesos simultáneos*.

*Ejemplo:*

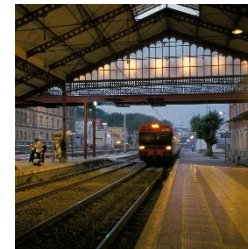
Decir «el tren llega aquí a las 9 en punto» significa «la manecilla pequeña de mi reloj apuntando a las 9 y la llegada del tren son sucesos **simultáneos**».



Todos los juicios que implican al tiempo son siempre juicios sobre *sucesos simultáneos*.

*Ejemplo:*

Decir «el tren llega aquí a las 9 en punto» significa «la manecilla pequeña de mi reloj apuntando a las 9 y la llegada del tren son sucesos **simultáneos**».



Decir que un determinado proceso tiene una duración de 7 segundos significa que cuando comienza simultáneamente el cronómetro marca cero y cuando termina simultáneamente el cronómetro marca 7 segundos.



**Inicio de  
proceso**



**Fin de  
proceso**

Si un determinado evento no es simultáneo en cualquier sistema de referencia el tiempo tiene necesariamente que ser una magnitud relativa dependiente del sistema de referencia. Veamos esto con un ejemplo.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia en los que ponemos en marcha un cronómetro cuando se inicia un determinado proceso haciendo coincidir el inicio del proceso con el cero de los cronómetros en nuestro sistemas de referencia.



**Inicio de  
proceso**



**Inicio de  
proceso**



*Física Moderna. Teoría especial de la relatividad. Simultaneidad de procesos. Relatividad del tiempo.*

Si un determinado evento no es simultáneo en cualquier sistema de referencia el tiempo tiene necesariamente que ser una magnitud relativa dependiente del sistema de referencia. Veamos esto con un ejemplo.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia en los que ponemos en marcha un cronómetro cuando se inicia un determinado proceso haciendo coincidir el inicio del proceso con el cero de los cronómetros en nuestro sistemas de referencia.

Si paramos los cronómetros cuando finaliza el proceso y este no finaliza simultáneamente en ambos sistemas de referencia, el tiempo que durará el proceso en ambos sistemas será diferente. En el ejemplo se supone que el proceso finaliza antes en el sistema de referencia azul que en el rojo.



**Inicio de proceso**



**Fin de proceso**



**Inicio de proceso**



**Fin de proceso**

*Física Moderna. Teoría especial de la relatividad. Simultaneidad de procesos. Relatividad del tiempo.*

Si un determinado evento no es simultáneo en cualquier sistema de referencia el tiempo tiene necesariamente que ser una magnitud relativa dependiente del sistema de referencia. Veamos esto con un ejemplo.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia en los que ponemos en marcha un cronómetro cuando se inicia un determinado proceso haciendo coincidir el inicio del proceso con el cero de los cronómetros en nuestro sistemas de referencia.

Si paramos los cronómetros cuando finaliza el proceso y este no finaliza simultáneamente en ambos sistema de referencia el tiempo que durará el proceso en ambos sistemas será diferente. En el ejemplo se supone que el proceso finaliza antes en el sistema de referencia azul que en el rojo.



**Inicio de proceso**



**Fin de proceso**

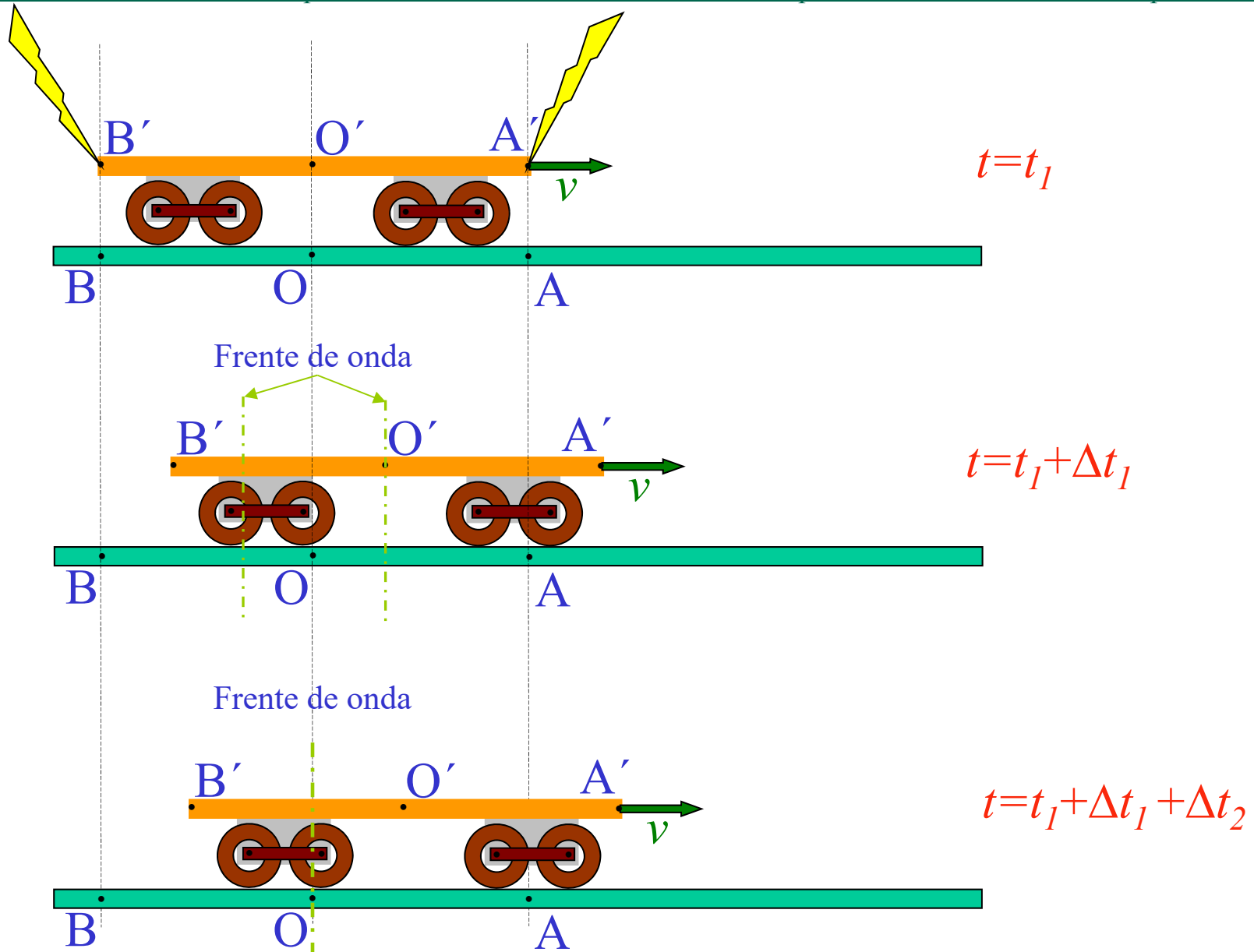


**Inicio de proceso**



**Fin de proceso**

El problema es que intuitivamente uno piensa que cualquier evento ocurre simultáneamente en cualquier sistema de referencia y en estas condiciones el tiempo es absoluto. Vamos a demostrar que esto no es así.



Por lo tanto, si el tiempo implica simultaneidad de sucesos y esta a su vez depende del sistema de referencia el tiempo debe de depender del sistema de referencia

Postulados de Einstein (“equivalentes” en dinámica clásica a las leyes de Newton, a los tres principios en Termodinámica, etc) :

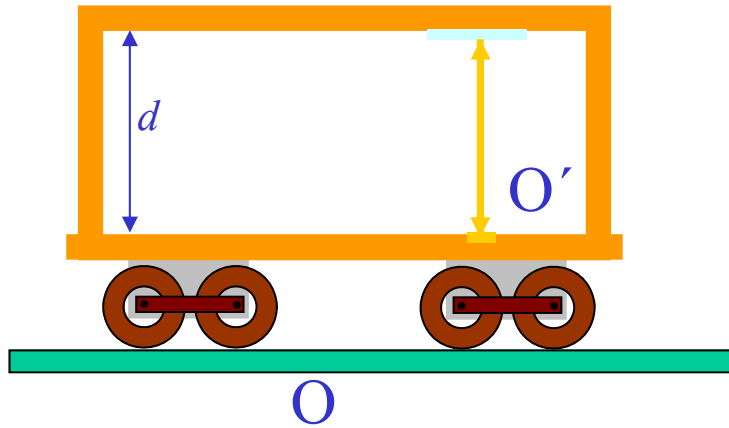
1.- Si consideramos dos sistemas de coordenadas que están en movimiento relativo de traslación paralela uniforme, las leyes de acuerdo con las cuales cambian los estados de un sistema físico no dependen de con cuál de los dos sistemas están relacionados dichos cambios.

2.- Todo rayo luminoso se mueve en el sistema de coordenadas «de reposo» con una velocidad fija  $c$ , independientemente de si este rayo luminoso es emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento. Por lo tanto,

$$c = \frac{\text{recorrido de la luz}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

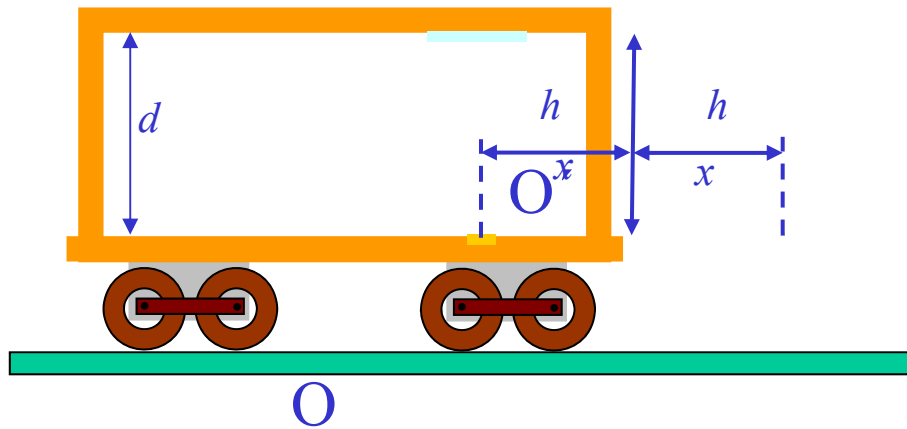
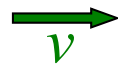
donde «intervalo de tiempo» debería entenderse en el sentido de la definición dada en el apartado anterior.

Relatividad del tiempo



$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$$

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$



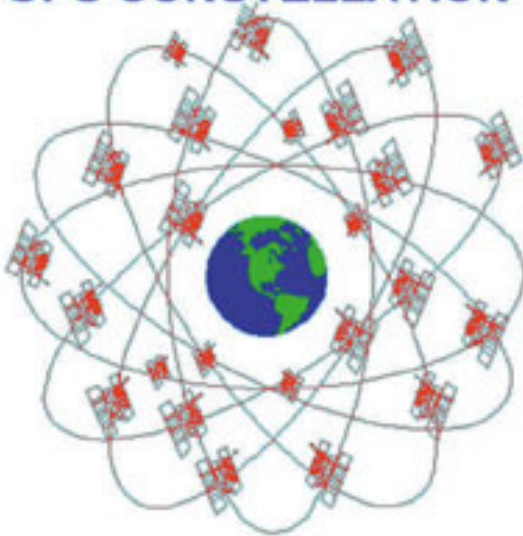
$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

**Hechos experimentales que muestran la relatividad de los intervalos temporales.**

**Satélites**

**GPS CONSTELLATION**



Des-sincronización de los relojes internos de los satélites.

## ¿QUÉ ES EL GPS (GLOBAL POSITION SYSTEM)?

El GPS es un sistema de navegación por satélite compuesto por una red de 24 satélites colocados en órbita por el Departamento de Defensa de Estados Unidos. El GPS originalmente estaba destinado a aplicaciones militares, pero en la década de 1980, el gobierno hizo que el sistema estuviera disponible para uso civil. El GPS funciona en cualquier condición climática, en cualquier parte del mundo, las 24 horas del día. No hay tarifas de suscripción ni cargos de configuración para usarlo.

## ¿CÓMO FUNCIONA EL GPS?

Los satélites del GPS circundan la tierra dos veces al día en una órbita muy exacta de la que se conoce en cada instante de tiempo su posición exacta. Cuando un receptor GPS en la tierra quiere utilizar el sistema tiene que conectar con al menos tres satélites para calcular una posición 2D (latitud y longitud) o cuatro satélites para determinar la posición 3D del usuario (latitud, longitud y altitud).

Básicamente los satélites envían una señal (onda electromagnética) que contiene el tiempo en el que se envía la señal y la posición del satélite cuando se envió la señal. El reloj de los receptores GPS situados en la tierra están sincronizados con los de los satélites, es decir, marcan siempre la misma hora.

De esta forma podemos calcular la distancia a la que se encuentran los satélites de nuestro receptor GPS y por triangulación calcular la posición en la que estamos.

A continuación vamos a ver un ejemplo.



## ¿CÓMO FUNCIONA EL GPS?

Vamos a considerar que tenemos un receptor GPS conectado a tres satélites, por lo tanto, sólo podemos conocer nuestra posición 2D (latitud y longitud). Supongamos que cuando el reloj de nuestro receptor GPS tiene un valor  $t=12\text{h } 35\text{min } 24.823476\text{ s}$  recibimos los siguientes tiempos de los satélites:

$$t_1 = 12\text{h } 35\text{min } 24.723476\text{ s}$$

$$t_2 = 12\text{h } 35\text{min } 24.723476\text{ s}$$

$$t_3 = 12\text{h } 35\text{min } 24.623476\text{ s}$$

Esto significa que los satélites están de nosotros a una distancia:

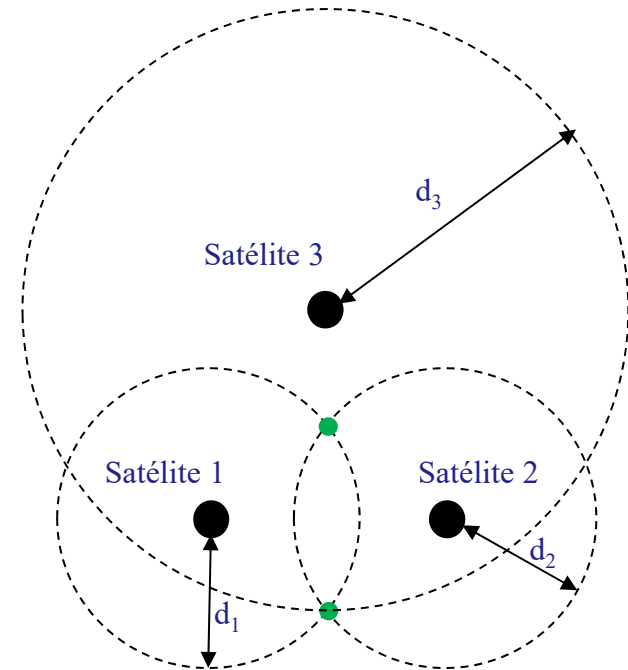
$$d_1 = c \cdot (t - t_1) = 300000\text{ km/s} \cdot 0.1\text{ s} = 30000\text{ km}$$

$$d_2 = c \cdot (t - t_2) = 300000\text{ km/s} \cdot 0.1\text{ s} = 30000\text{ km}$$

$$d_3 = c \cdot (t - t_3) = 300000\text{ km/s} \cdot 0.2\text{ s} = 60000\text{ km}$$

Suponiendo que la posición de los satélites en el instante de tiempo es la que se muestra en la figura ¿En qué posición nos encontraríamos nosotros?

- 1.- Como estamos situados a una distancia  $d_1$  del primer satélite tenemos que estar situados en alguno de los puntos de la circunferencia de radio  $d_1$  centrada en el primer satélite.
- 2.- Por el mismo motivo, a la vez tenemos que estar situados en alguno de los puntos de la circunferencia de radio  $d_2$  centrada en el segundo satélite. Por lo tanto, ya solamente podemos estar situados en dos puntos.
- 3.- El tercer satélite elimina la ambigüedad del punto que ocupo.





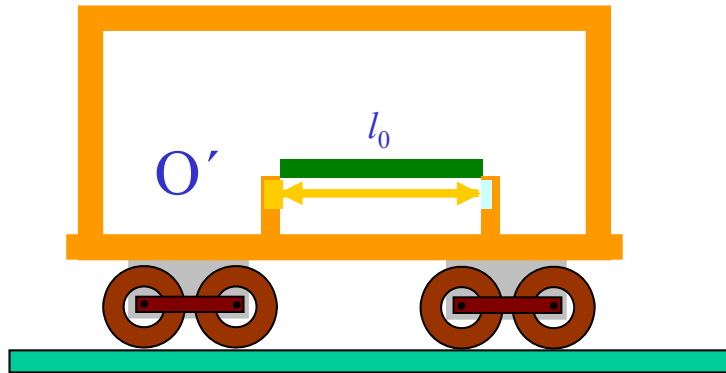
## ¿POR QUÉ ES IMPORTANTE LA RELATIVIDAD DE TIEMPOS DE EINSTEIN EN EL GPS?

Como hemos visto, debido a que la velocidad de las ondas electromagnéticas que portan la información (velocidad de la luz) es muy elevada los relojes que integran tanto los satélites como los receptores GPS tiene que tener una sincronización muy precisa (la diferencia tiene que estar por debajo de los microsegundos).

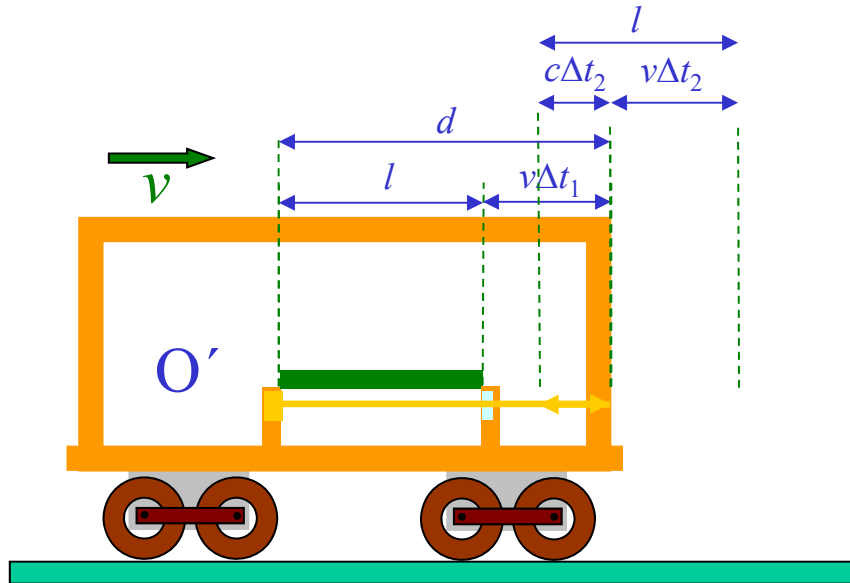
Por otro lado, los satélites del sistema GPS giran alrededor de la tierra a una altura aproximada de 20 Km con una velocidad lineal de aproximadamente 15000 km/h.

Aunque esta velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz es necesario hacer las pequeñas correcciones de tiempo que hemos visto establece la teoría de la relatividad para evitar una desincronización excesivamente rápida de los relojes que hay en los satélites y los relojes en los receptores GPS.

Relatividad de las longitudes



$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}$$

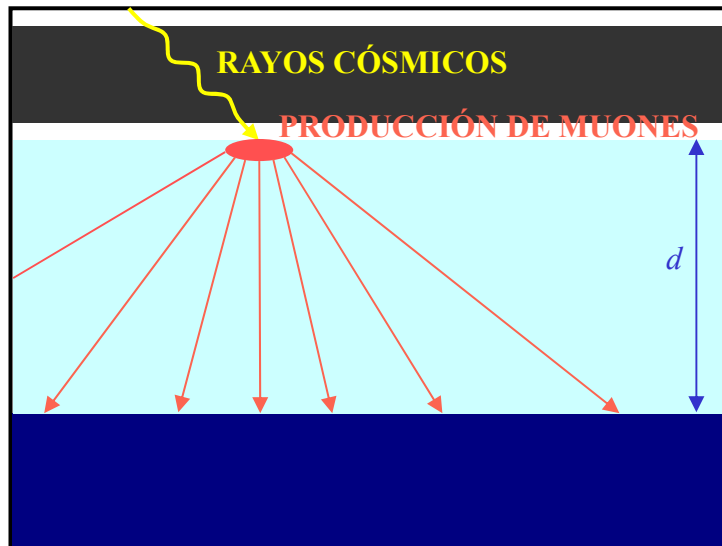


$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

O

**Hechos experimentales que muestran la contracción de las longitudes.**

**Cantidad de muones que como radiación secundaria de los rayos cósmicos llegan a la tierra**



$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\tau_{\text{muón}} = 2 \mu\text{s} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$v_{\text{muón}} = 0.9978 \cdot c$$

$$d = 9000 \text{ m}$$

$$N_0 = 10^8 \text{ muones}$$

**Hecho experimental**

Se ha observado que aproximadamente llegan a nivel del mar unos 40 millones de muones.

Si no consideramos las correcciones relativistas los muones debería recorrer una distancia de 9 km antes de llegar a la superficie de la tierra y, por lo tanto, tardarían:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{9 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

En ese tiempo se habrían desintegrado muchos muones llegando a la superficie sólo:

$$N = 10^8 \text{ muones} \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}\right) = 30.59 \text{ muones}$$

Se ha observado que aproximadamente llegan a nivel del mar unos 40 millones de muones.

Si no consideramos las correcciones relativistas los muones debería recorrer una distancia de 9 km antes de llegar a la superficie de la tierra y, por lo tanto, tardarían:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{9 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

En ese tiempo se habrían desintegrado muchos muones llegando a la superficie sólo:

$$N = 10^8 \text{ muones} \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}\right) = 30.59 \text{ muones}$$

Sin embargo, si tenemos en cuenta consideraciones relativistas los muones al moverse a velocidades cercanas a la luz sólo recorren una distancia de:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 9 \text{ km} \sqrt{1 - \frac{0.9978^2 \cdot c^2}{c^2}} \approx 0.6 \text{ km}$$

Se ha observado que aproximadamente llegan a nivel del mar unos 40 millones de muones.

Si no consideramos las correcciones relativistas los muones debería recorrer una distancia de 9 km antes de llegar a la superficie de la tierra y, por lo tanto, tardarían:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{9 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

En ese tiempo se habrían desintegrado muchos muones llegando a la superficie sólo:

$$N = 10^8 \text{ muones} \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}\right) = 30.59 \text{ muones}$$

Sin embargo, si tenemos en cuenta consideraciones relativistas los muones al moverse a velocidades cercanas a la luz sólo recorren una distancia de:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 9 \text{ km} \sqrt{1 - \frac{0.9978^2 \cdot c^2}{c^2}} \approx 0.6 \text{ km}$$

De forma que el tiempo que tardarían en llegar a la superficie de la tierra los muones sería:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{0.6 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Se ha observado que aproximadamente llegan a nivel del mar unos 40 millones de muones.

Si no consideramos las correcciones relativistas los muones debería recorrer una distancia de 9 km antes de llegar a la superficie de la tierra y, por lo tanto, tardarían:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{9 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

En ese tiempo se habrían desintegrado muchos muones llegando a la superficie sólo:

$$N = 10^8 \text{ muones} \cdot \exp\left(-\frac{3 \cdot 10^{-5} \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}\right) = 30.59 \text{ muones}$$

Sin embargo, si tenemos en cuenta consideraciones relativistas los muones al moverse a velocidades cercanas a la luz sólo recorren una distancia de:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 9 \text{ km} \sqrt{1 - \frac{0.9978^2 \cdot c^2}{c^2}} \approx 0.6 \text{ km}$$

De forma que el tiempo que tardarían en llegar a la superficie de la tierra los muones sería:

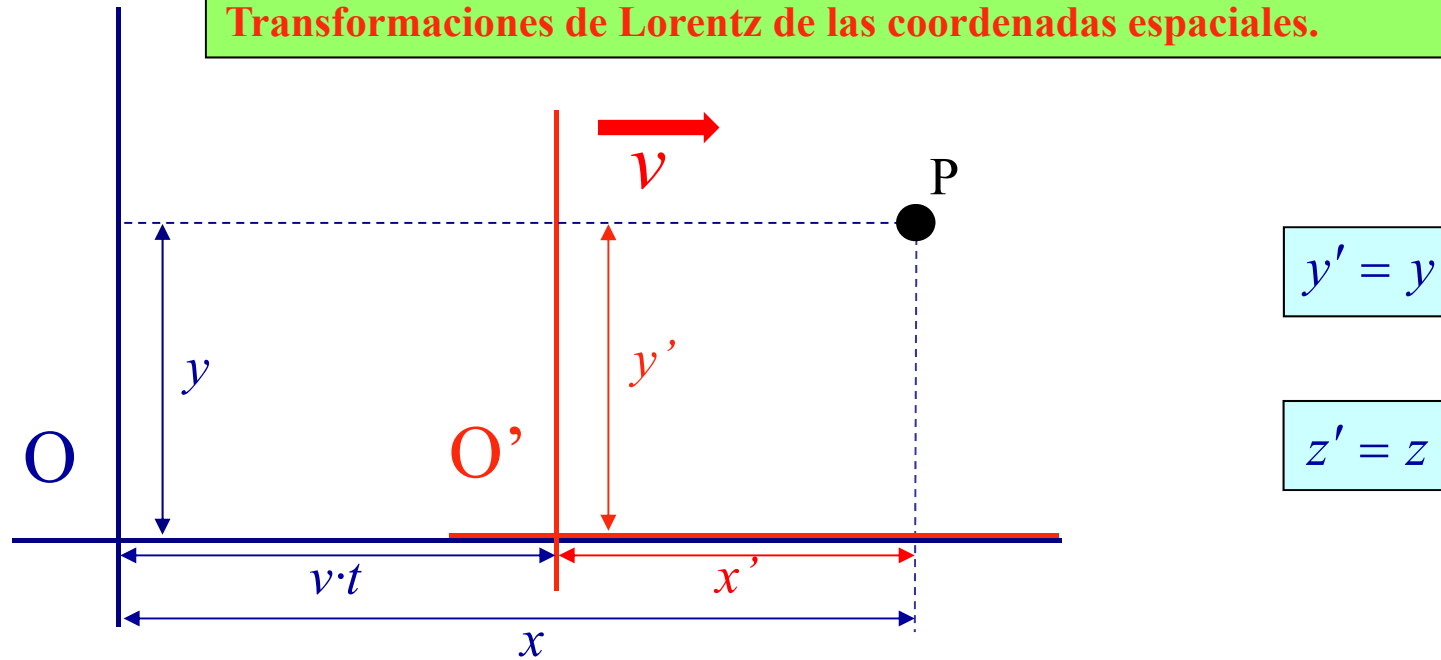
$$t = \frac{d}{c} = \frac{0.6 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

y la cantidad de muones que debería llegar a la superficie de la tierra sería:

$$N = 10^8 \text{ muones} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}\right) = 3.68 \cdot 10^7 \text{ muones}$$

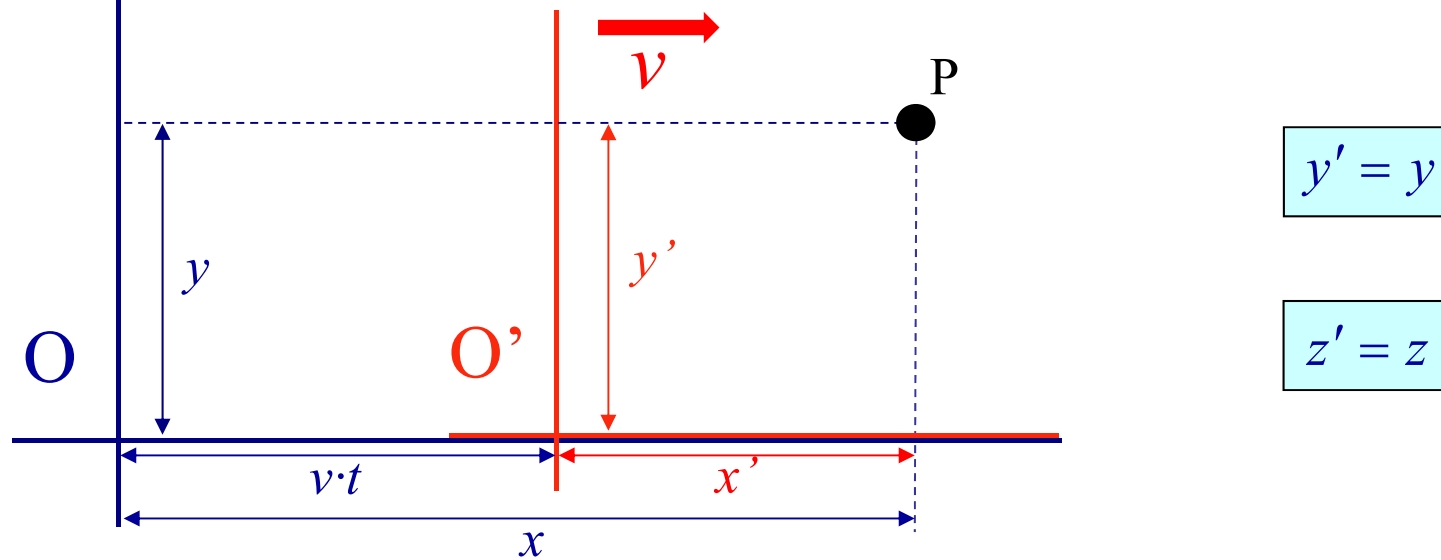
Se ha observado que aproximadamente llegan a nivel del mar unos 40 millones de muones.

**Transformaciones de Lorentz de las coordenadas espaciales.**





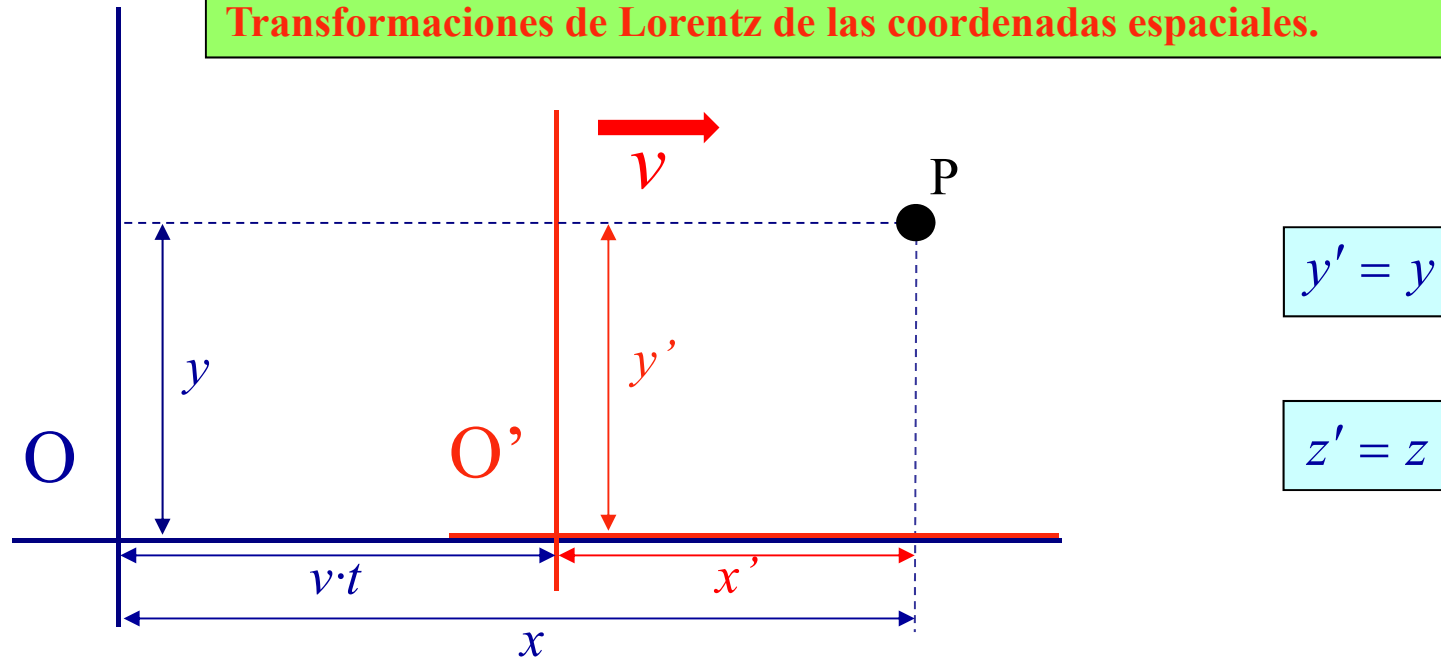
**Transformaciones de Lorentz de las coordenadas espaciales.**



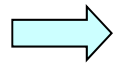
$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt'$$

Transformaciones de Lorentz de las coordenadas espaciales.



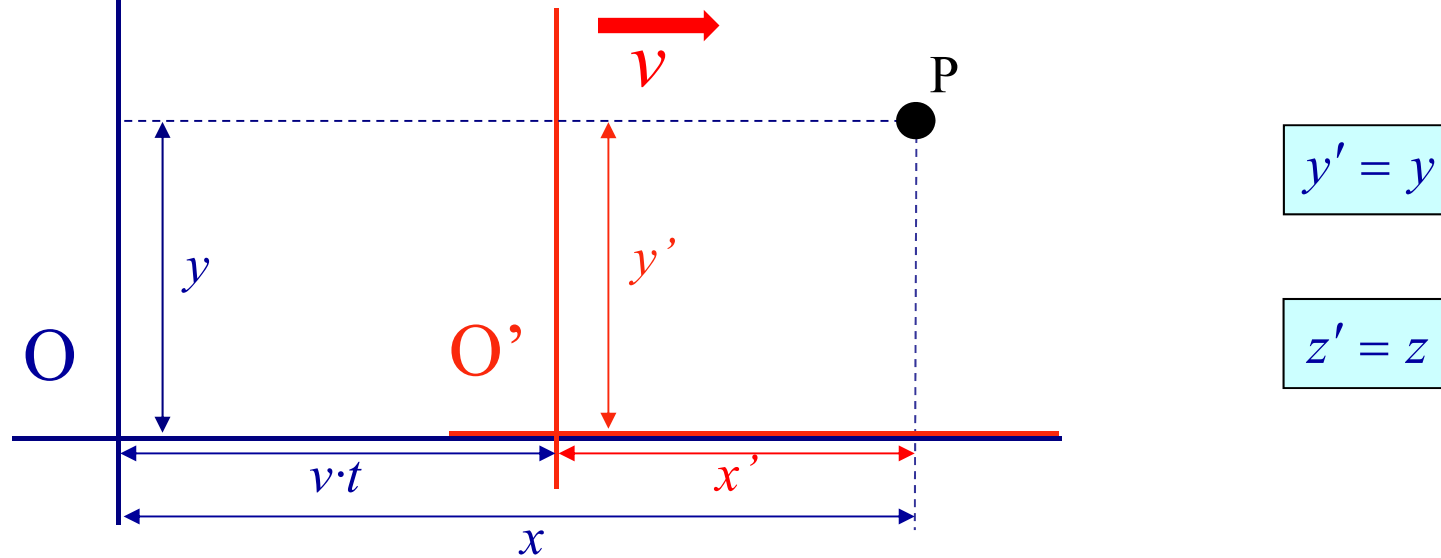
$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt'$$

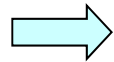
Transformaciones de Lorentz de las coordenadas espaciales.



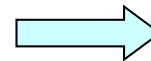
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$$



$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt'$$

Conociendo la relación entre las coordenadas de ambos sistemas de referencia podemos calcular la relación entre las velocidades que un determinado móvil tendría en ambos sistema de referencia

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}};$$

Para ello, en primer lugar, diferenciamos las expresiones obtenidas.

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz; \quad dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Conociendo la relación entre las coordenadas de ambos sistemas de referencia podemos calcular la relación entre las velocidades que un determinado móvil tendría en ambos sistema de referencia

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}};$$

Para ello, en primer lugar, diferenciamos las expresiones obtenidas.

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz; \quad dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A continuación calculamos las componentes de la velocidad en cada uno de los ejes:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \Rightarrow dx' = v'_x dt' \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v'_x dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v'_x v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx \left( 1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right) = dt (v'_x + v) \Rightarrow \frac{dx}{dt} \left( 1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right) = (v'_x + v) \Rightarrow v_x \left( 1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right) = (v'_x + v) \Rightarrow v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Conociendo la relación entre las coordenadas de ambos sistemas de referencia podemos calcular la relación entre las velocidades que un determinado móvil tendría en ambos sistema de referencia

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}};$$

Para ello, en primer lugar, diferenciamos las expresiones obtenidas.

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy' = dy; \quad dz' = dz; \quad dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

A continuación calculamos las componentes de la velocidad en cada uno de los ejes:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \Rightarrow dx' = v'_x dt' \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v'_x dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{v'_x v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx \left( 1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right) = dt (v'_x + v) \Rightarrow \frac{dx}{dt} \left( 1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right) = (v'_x + v) \Rightarrow v_x \left( 1 + \frac{v'_x v}{c^2} \right) = (v'_x + v) \Rightarrow v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Siguiendo un procedimiento parecido con las otras dos componentes llegamos a:

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Como es bien sabido, en mecánica clásica, cuando sobre un sistema no actúan fuerzas externas la cantidad de movimiento definida como la suma del producto de la masa por la velocidad de cada una de las partículas que componen el sistema se conserva, es decir:

$$\text{Si } \vec{F}_{NETA} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$$

donde

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$$

Como es bien sabido, en mecánica clásica, cuando sobre un sistema no actúan fuerzas externas la cantidad de movimiento definida como la suma del producto de la masa por la velocidad de cada una de las partículas que componen el sistema se conserva, es decir:

$$\text{Si } \vec{F}_{NETA} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$$

donde

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i$$

Demostración de lo anterior.

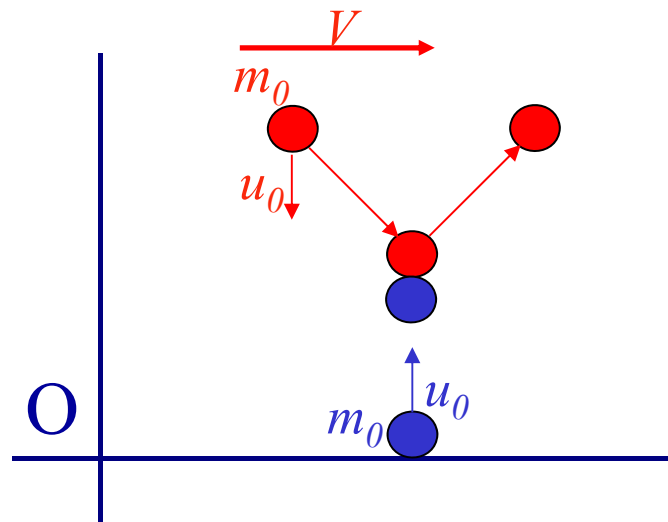
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots) = \frac{dm_1\vec{v}_1}{dt} + \frac{dm_2\vec{v}_2}{dt} + \frac{dm_3\vec{v}_3}{dt} + \dots = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} + \dots = \\ &= m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n m_i\vec{a}_i = M_T \frac{\sum_{i=1}^n m_i\vec{a}_i}{M_T} = M_T\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{NETA} \\ &\Downarrow \\ \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}_{NETA} \\ &\Downarrow \\ \vec{p} = cte &\Leftrightarrow \vec{F}_{NETA} = 0 \end{aligned}$$



La cantidad de movimiento era muy útil en el estudio de algunos fenómenos como los choques, las explosiones, etc, donde las fuerzas netas externas no existían o eran despreciables. Sin embargo, esta magnitud no se conserva con la definición relativista de velocidad que hemos visto en el apartado anterior.

Para comprobar esto supongamos dos partículas de igual masa que sufren un choque como el que se muestra en la figura. Desde un punto de vista clásico las velocidades antes y después del choque son:

$$\vec{v}_{azul} = u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}_{roja} = V \hat{i} - u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{azul} = -u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{roja} = V \hat{i} + u_0 \hat{j};$$



La cantidad de movimiento era muy útil en el estudio de algunos fenómenos como los choques, las explosiones, etc, donde las fuerzas netas externas no existían o eran despreciables. Sin embargo, esta magnitud no se conserva con la definición relativista de velocidad que hemos visto en el apartado anterior.

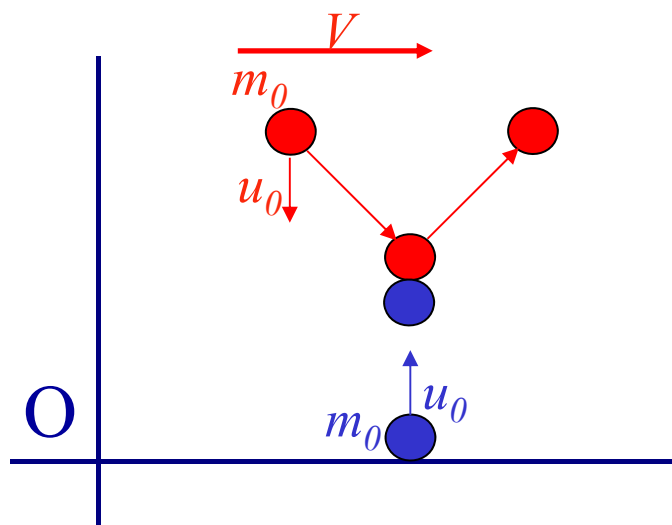
Para comprobar esto supongamos dos partículas de igual masa que sufren un choque como el que se muestra en la figura. Desde un punto de vista clásico las velocidades antes y después del choque son:

$$\vec{v}_{azul} = u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}_{roja} = V \hat{i} - u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{azul} = -u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{roja} = V \hat{i} + u_0 \hat{j};$$

y, por tanto, las cantidades de movimiento antes y después del choque se conservan:

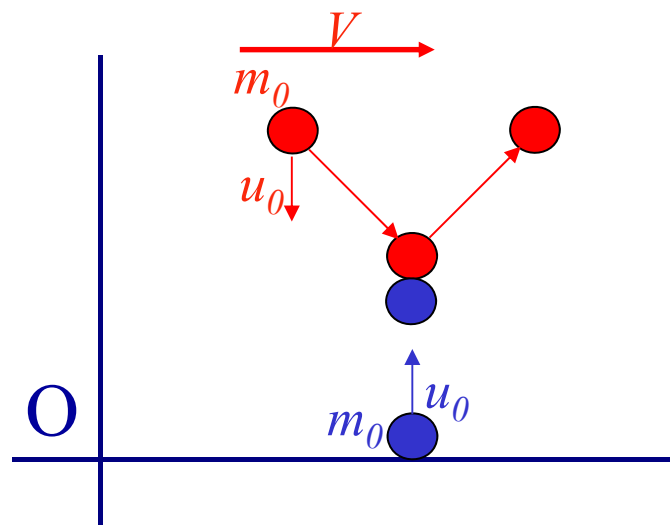
$$\vec{p} = m_0 \vec{v}_{azul} + m_0 \vec{v}_{roja} = m_0 u_0 \hat{j} + m_0 V \hat{i} - m_0 u_0 \hat{j} = m_0 V \hat{i}$$

$$\vec{p}' = m_0 \vec{v}'_{azul} + m_0 \vec{v}'_{roja} = -m_0 u_0 \hat{j} + m_0 V \hat{i} + m_0 u_0 \hat{j} = m_0 V \hat{i}$$



Si tenemos en cuenta las consideraciones relativistas las velocidades antes y después de la partícula azul serán:

$$\vec{v}_{\text{azul}} = u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{\text{azul}} = -u_0 \hat{j};$$



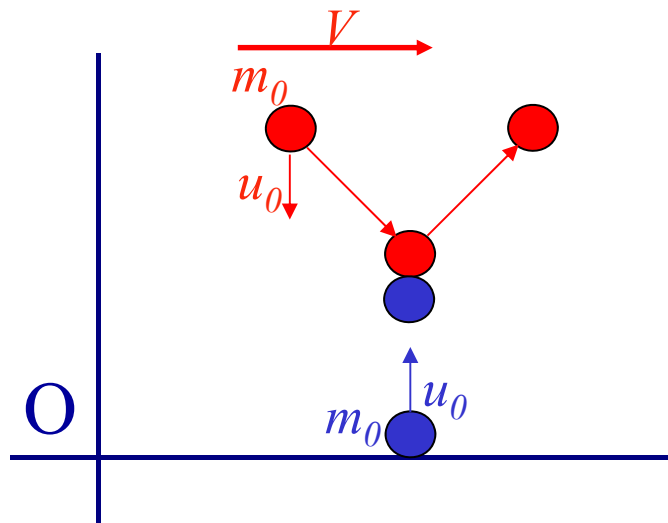
Si tenemos en cuenta las consideraciones relativistas las velocidades antes y después de la partícula azul serán:

$$\vec{v}_{azul} = u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{azul} = -u_0 \hat{j};$$

Por otro lado, las velocidades antes y después de la partícula roja serán:

### Transformaciones de Lorentz

$$v'_y = v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{roja} = V \hat{i} - u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j}; \quad \vec{v}'_{roja} = V \hat{i} + u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j};$$



Si tenemos en cuenta las consideraciones relativistas las velocidades antes y después de la partícula azul serán:

$$\vec{v}_{azul} = u_0 \hat{j}; \quad \vec{v}'_{azul} = -u_0 \hat{j};$$

Por otro lado, las velocidades antes y después de la partícula roja serán:

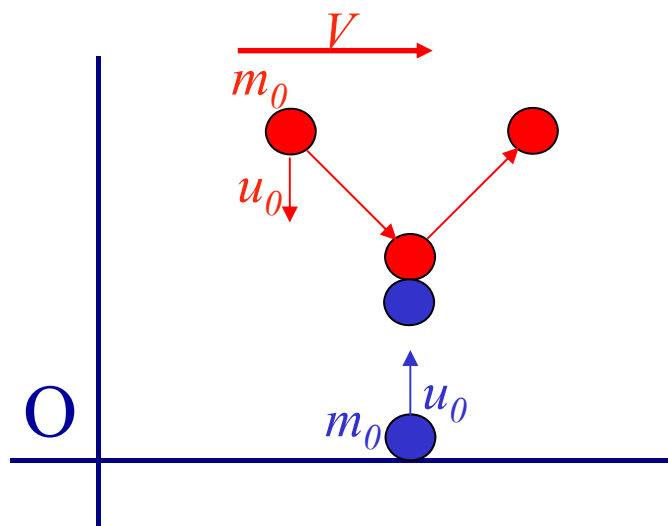
### Transformaciones de Lorentz

$$v'_y = v_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{roja} = V \hat{i} - u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j}; \quad \vec{v}'_{roja} = V \hat{i} + u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j};$$

De donde las cantidades de movimiento antes y después del choque son:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v}_{azul} + m_0 \vec{v}_{roja} = m_0 u_0 \hat{j} + m_0 V \hat{i} - m_0 u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j} = m_0 V \hat{i} + m_0 u_0 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right) \hat{j};$$

$$\vec{p}' = m_0 \vec{v}'_{azul} + m_0 \vec{v}'_{roja} = -m_0 u_0 \hat{j} + m_0 V \hat{i} + m_0 u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j} = m_0 V \hat{i} + m_0 u_0 \left( \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - 1 \right) \hat{j};$$



que son iguales si y solo si  $V=0$ .

Es decir con las consideraciones relativistas y la definición clásica de la cantidad de movimiento esta magnitud no se conserva cuando las fuerzas externas son cero. Por lo tanto habrá que definir una nueva forma de la cantidad de movimiento que se conserve teniendo en cuenta consideraciones relativistas. Indudablemente la cantidad de movimiento relativista tiene que coincidir con la clásica en el límite de velocidad 0.

Vamos a demostrar que si definimos la cantidad de movimiento como:

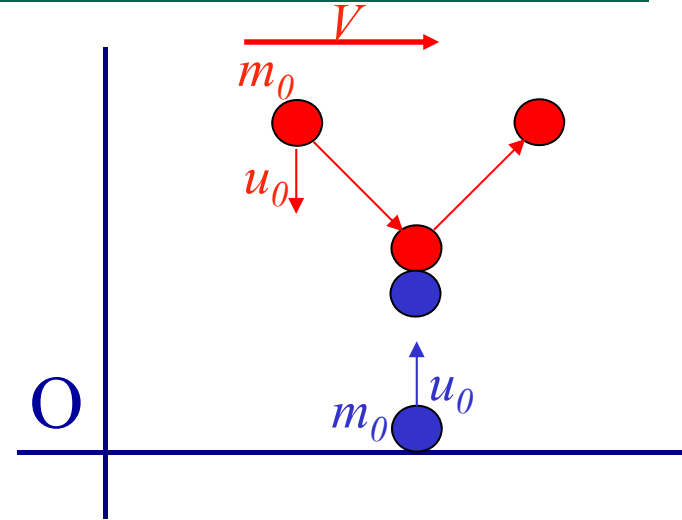
$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

esta magnitud se conserva antes y después del choque. Además, cuando  $v \rightarrow 0$  esta expresión recupera la definición clásica de cantidad de movimiento.

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La cantidad de movimiento antes y después del choque de la bola azul será:

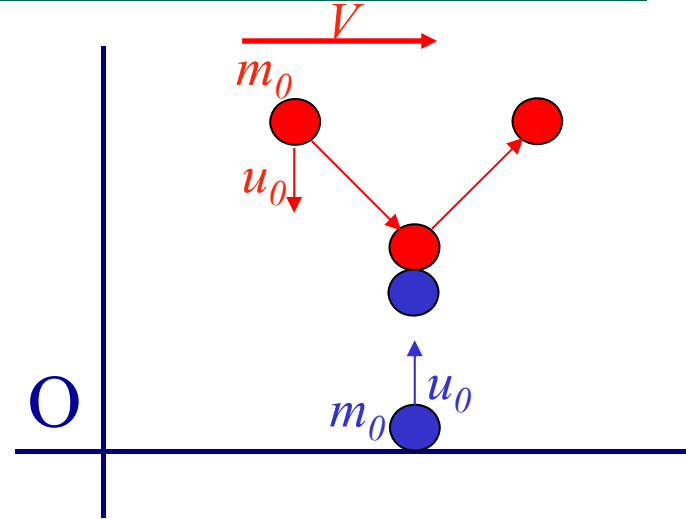
$$\vec{p}_{\text{azul}} = \frac{m_0 \vec{v}_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{azul}}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j}; \quad \vec{p}'_{\text{azul}} = \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{azul}}}{c^2}}} = -\frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j};$$



$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La cantidad de movimiento antes y después del choque de la bola azul será:

$$\vec{p}_{\text{azul}} = \frac{m_0 \vec{v}_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{azul}}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j}; \quad \vec{p}'_{\text{azul}} = \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{azul}}}{c^2}}} = -\frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j};$$



Por otro lado, la cantidad de movimiento antes y después del choque de la bola roja será:

$$\vec{p}_{\text{roja}} = \frac{m_0 \vec{v}_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{roja}}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 V \hat{i}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} - \frac{m_0 u_0 \hat{j}}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}; \quad \vec{p}'_{\text{roja}} = \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{roja}}}{c^2}}} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i} + \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j};$$

Donde se ha tenido en cuenta:

$$\vec{v}_{\text{roja}} = V \hat{i} - u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j}; \quad \vec{v}'_{\text{roja}} = V \hat{i} + u_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \hat{j};$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} + \frac{u_0^2 V^2}{c^4} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right);$$

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{u_0^2}{c^2} + \frac{u_0^2 V^2}{c^4} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right);$$



Las cantidades de movimiento inicial y final serán ahora:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{azul}}^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v}_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{roja}}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} + \frac{m_0 V \hat{i}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} - \frac{m_0 u_0 \hat{j}}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i};$$

$$\vec{p}' = \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{azul}}}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{roja}}}{c^2}}} = -\frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} + \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i} + \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i};$$

Por lo que podemos concluir que esta magnitud si se conserva en el choque.

Las cantidades de movimiento inicial y final serán ahora:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{azul}}^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v}_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{roja}}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} + \frac{m_0 V \hat{i}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} - \frac{m_0 u_0 \hat{j}}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i};$$

$$\vec{p}' = \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{azul}}}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{roja}}}{c^2}}} = -\frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} + \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i} + \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i};$$

Por lo que podemos concluir que esta magnitud si se conserva en el choque.

Si definimos la masa relativista como:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Las cantidades de movimiento inicial y final serán ahora:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{azul}}^2}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v}_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\text{roja}}^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} + \frac{m_0 V \hat{i}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} - \frac{m_0 u_0 \hat{j}}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i};$$

$$\vec{p}' = \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{azul}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{azul}}}{c^2}}} + \frac{m_0 \vec{v}'_{\text{roja}}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2_{\text{roja}}}{c^2}}} = -\frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} + \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i} + \frac{m_0 u_0}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{j} = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} \hat{i};$$

Por lo que podemos concluir que esta magnitud si se conserva en el choque.

Si definimos la masa relativista como:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La cantidad de movimiento relativista que hemos definido se sigue escribiendo igual que la forma clásica, es decir:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \vec{v}$$

*Energía relativista*

Por otro lado, como hemos visto, la variación de la energía cinética entre dos puntos viene dada por el trabajo que la fuerza neta aplicada al sistema realiza entre esos dos puntos. Por lo tanto tendremos:

$$\Delta E_c = \int \vec{F}_{NETA} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int v dp$$

*Energía relativista*

Por otro lado, como hemos visto, la variación de la energía cinética entre dos puntos viene dada por el trabajo que la fuerza neta aplicada al sistema realiza entre esos dos puntos. Por lo tanto tendremos:

$$\Delta E_c = \int \vec{F}_{NETA} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int v dp$$

Si consideramos que el sistema parte de velocidad cero tendremos la energía cinética total, es decir:

$$E_c = \int_0^v v dp$$

Energía relativista

Por otro lado, como hemos visto, la variación de la energía cinética entre dos puntos viene dada por el trabajo que la fuerza neta aplicada al sistema realiza entre esos dos puntos. Por lo tanto tendremos:

$$\Delta E_c = \int \vec{F}_{NETA} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int v dp$$

Si consideramos que el sistema parte de velocidad cero tendremos la energía cinética total, es decir:

$$E_c = \int_0^v v dp$$

Teniendo en cuenta la definición de la cantidad de movimiento relativista que acabamos de ver nos queda:

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 v}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left[ 1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \right] = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Energía relativista

Por otro lado, como hemos visto, la variación de la energía cinética entre dos puntos viene dada por el trabajo que la fuerza neta aplicada al sistema realiza entre esos dos puntos. Por lo tanto tendremos:

$$\Delta E_c = \int \vec{F}_{NETA} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int v dp$$

Si consideramos que el sistema parte de velocidad cero tendremos la energía cinética total, es decir:

$$E_c = \int_0^v v dp$$

Teniendo en cuenta la definición de la cantidad de movimiento relativista que acabamos de ver nos queda:

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 v}{2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left[ 1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \right] = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

de donde

$$E_c = \int_0^v v dp = \int_0^v \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv = m_0 c^2 \int_0^{\frac{v}{c}} \frac{\frac{v}{c}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} d\frac{v}{c} = m_0 c^2 \int_0^{\frac{v}{c}} \frac{x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}} dx$$

donde  $x=v/c$ .

Energía relativista

Finalmente, calculando la integral llegamos a:

$$E_c = m_0 c^2 \int_0^{\frac{v}{c}} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} dx = m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right]_0^{\frac{v}{c}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

El valor de la energía relativista en reposo es:

$$E_0 = m_0 c^2$$

De forma que la energía total relativista para cualquier velocidad la podemos escribir como:

$$E = E_c + E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

o bien

$$E = mc^2$$

si tenemos en cuenta la definición de masa relativista que hemos realizado anteriormente.



Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta

Cadenas de desintegraciones nucleares naturales

Serie del Torio

| Núclido | Modo de desintegración              | Periodo de semidesintegración | Energía desprendida (MeV) | Producto de desintegración |
|---------|-------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Th 232  | $\alpha$                            | $1,405 \cdot 10^{10}$ a       | 4,081                     | Ra 228                     |
| Ra 228  | $\beta^-$                           | 5,75 a                        | 0,046                     | Ac 228                     |
| Ac 228  | $\beta^-$                           | 6,25 h                        | 2,124                     | Th 228                     |
| Th 228  | $\alpha$                            | 1,9116 a                      | 5,520                     | Ra 224                     |
| Ra 224  | $\alpha$                            | 3,6319 d                      | 5,789                     | Rn 220                     |
| Rn 220  | $\alpha$                            | 55,6 s                        | 6,404                     | Po 216                     |
| Po 216  | $\alpha$                            | 0,145 s                       | 6,906                     | Pb 212                     |
| Pb 212  | $\beta^-$                           | 10,64 h                       | 0,570                     | Bi 212                     |
| Bi 212  | $\beta^-$ 64.06%<br>$\alpha$ 35.94% | 60,55 min                     | 2,252<br>6.208            | Po 212<br>Tl 208           |
| Po 212  | $\alpha$                            | 299 ns                        | 8,955                     | Pb 208                     |
| Tl 208  | $\beta^-$                           | 3,053 min                     | 4,999                     | Pb 208                     |
| Pb 208  | .                                   | estable                       | .                         | .                          |

*Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta*

*Cadenas de desintegraciones nucleares naturales*

*Serie del Uranio*

| Núclido | Modo de desintegración                   | Periodo de semidesintegración | Energía desprendida (MeV) | Producto de desintegración |
|---------|------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| U 238   | $\alpha$                                 | $4.468 \cdot 10^9$ a          | 4,270                     | Th 234                     |
| Th 234  | $\beta^-$                                | 24,10 d                       | 0,273                     | Pa 234                     |
| Pa 234  | $\beta^-$                                | 6,70 h                        | 2,197                     | U 234                      |
| U 234   | $\alpha$                                 | 245500 a                      | 4,859                     | Th 230                     |
| Th 230  | $\alpha$                                 | 75380 a                       | 4,770                     | Ra 226                     |
| Ra 226  | $\alpha$                                 | 1602 a                        | 4,871                     | Rn 222                     |
| Rn 222  | $\alpha$                                 | 3,8235 d                      | 5,590                     | Po 218                     |
| Po 218  | $\alpha$ 99.98 %<br>$\beta^-$ 0.02 %     | 3,10 min                      | 6,115<br>0,265            | Pb 214<br>At 218           |
| At 218  | $\alpha$ 99.90 %<br>$\beta^-$ 0.10 %     | 1,5 s                         | 6.874<br>2.883            | Bi 214<br>Rn 218           |
| Rn 218  | $\alpha$                                 | 35 ms                         | 7.263                     | Po 214                     |
| Pb 214  | $\beta^-$                                | 26.8 min                      | 1.024                     | Bi 214                     |
| Bi 214  | $\beta^-$ 99.98 %<br>$\alpha$ 0.02 %     | 19.9 min                      | 3.272<br>5.617            | Po 214<br>Tl 210           |
| Po 214  | $\alpha$                                 | 0.1643 ms                     | 7.883                     | Pb 210                     |
| Tl 210  | $\beta^-$                                | 1.30 min                      | 5.484                     | Pb 210                     |
| Pb 210  | $\beta^-$                                | 22.3 a                        | 0.064                     | Bi 210                     |
| Bi 210  | $\beta^-$ 99.99987%<br>$\alpha$ 0.00013% | 5.013 d                       | 1.426<br>5.982            | Po 210<br>Tl 206           |
| Po 210  | $\alpha$                                 | 138.376 d                     | 5.407                     | Pb 206                     |
| Tl 206  | $\beta^-$                                | 4.199 min                     | 1.533                     | Pb 206                     |
| Pb 206  | -                                        | estable                       | -                         | -                          |

Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta

Cadenas de desintegraciones nucleares naturales

Serie del Actinio

| Núclido | Modo de desintegración                   | Periodo de semidesintegración | Energía desprendida (MeV) | Producto de desintegración |
|---------|------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Pu 239  | $\alpha$                                 | $2.41 \cdot 10^4$ a           | 5.244                     | U 235                      |
| U 235   | $\alpha$                                 | $7.04 \cdot 10^8$ a           | 4.678                     | Th 231                     |
| Th 231  | $\beta^-$                                | 25.52 h                       | 0.391                     | Pa 231                     |
| Pa 231  | $\alpha$                                 | 32760 a                       | 5.150                     | Ac 227                     |
| Ac 227  | $\beta^-$ 98.62%<br>$\alpha$ 1.38%       | 21.772 a                      | 0.045<br>5.042            | Th 227<br>Fr 223           |
| Th 227  | $\alpha$                                 | 18.68 d                       | 6.147                     | Ra 223                     |
| Fr 223  | $\beta^-$                                | 22.00 min                     | 1.149                     | Ra 223                     |
| Ra 223  | $\alpha$                                 | 11.43 d                       | 5.979                     | Rn 219                     |
| Rn 219  | $\alpha$                                 | 3.96 s                        | 6.946                     | Po 215                     |
| Po 215  | $\alpha$ 99.99977%<br>$\beta^-$ 0.00023% | 1.781 ms                      | 7.527<br>0.715            | Pb 211<br>At 215           |
| At 215  | $\alpha$                                 | 0.1 ms                        | 8.178                     | Bi 211                     |
| Pb 211  | $\beta^-$                                | 36.1 m                        | 1.367                     | Bi 211                     |
| Bi 211  | $\alpha$ 99.724%<br>$\beta^-$ 0.276%     | 2.14 min                      | 6.751<br>0.575            | Tl 207<br>Po 211           |
| Po 211  | $\alpha$                                 | 516 ms                        | 7.595                     | Pb 207                     |
| Tl 207  | $\beta^-$                                | 4.77 min                      | 1.418                     | Pb 207                     |
| Pb 207  | .                                        | estable                       | .                         | .                          |

*Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta*

*Cadenas de desintegraciones nucleares naturales*

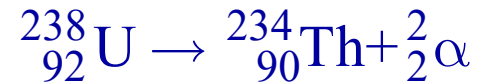
*Serie del Neptunio*

| Núclido | Modo de desintegración | Periodo de semidesintegración | Energía desprendida (MeV) | Producto de desintegración |
|---------|------------------------|-------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| Pu 241  | $\beta^-$              | 14,4 a                        | 0,021                     | Am 241                     |
| Am 241  | $\alpha$               | 432,7 a                       | 5,638                     | Np 237                     |
| Np 237  | $\alpha$               | $2,14 \cdot 10^6$ a           | 4,959                     | Pa 233                     |
| Pa 233  | $\beta^-$              | 27,0 d                        | 0,571                     | U 233                      |
| U 233   | $\alpha$               | $1,592 \cdot 10^5$ a          | 4,909                     | Th 229                     |
| Th 229  | $\alpha$               | $7,54 \cdot 10^4$ a           | 5,168                     | Ra 225                     |
| Ra 225  | $\beta^-$              | 14,9 d                        | 0,36                      | Ac 225                     |
| Ac 225  | $\alpha$               | 10,0 d                        | 5,935                     | Fr 221                     |
| Fr 221  | $\alpha$               | 4,8 m                         | 6,3                       | At 217                     |
| At 217  | $\alpha$               | 32 ms                         | 7,0                       | Bi 213                     |
| Bi 213  | $\alpha$               | 46,5 m                        | 5,87                      | Tl 209                     |
| Tl 209  | $\beta^-$              | 2,2 min                       | 3,99                      | Pb 209                     |
| Pb 209  | $\beta^-$              | 3,25 h                        | 0,644                     | Bi 209                     |
| Bi 209  | $\alpha$               | $1,9 \cdot 10^{19}$ a         | 3,14                      | Tl 205                     |
| Tl 205  | .                      | estable                       | .                         | .                          |

*Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta*

*Cadenas de desintegraciones nucleares naturales*

Consideremos, por ejemplo, de la serie del Uranio la desintegración del Uranio 238 en Torio 234 más una partícula alfa y una energía de  $6.84 \cdot 10^{-13}$  J.



$$\begin{aligned} m_{\text{U}} &= 3.9525626937820611 \cdot 10^{-25} \text{ Kg} \\ m_{\text{Th}} &= 3.8856866792420611 \cdot 10^{-25} \text{ Kg} \\ m_{\alpha} &= 6.68 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\text{Th}} + m_{\alpha} &= 3.9524866792420611 \cdot 10^{-25} \text{ Kg} \\ \Delta m &= m_{\text{U}} - m_{\text{Th}} + m_{\alpha} = 7.601454 \cdot 10^{-30} \text{ Kg} \end{aligned}$$

$$E = mc^2 = 6.8413086 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Número de átomos en 1 kg de Uranio 238 =  $2.5 \cdot 10^{24}$  átomos



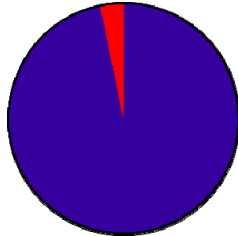
Energía radiactiva en 1 kg de Uranio 238 =  $1.731 \cdot 10^{12}$  J

Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta

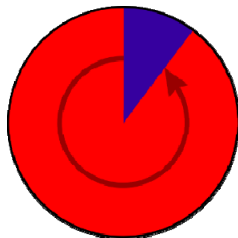
Fisión nuclear



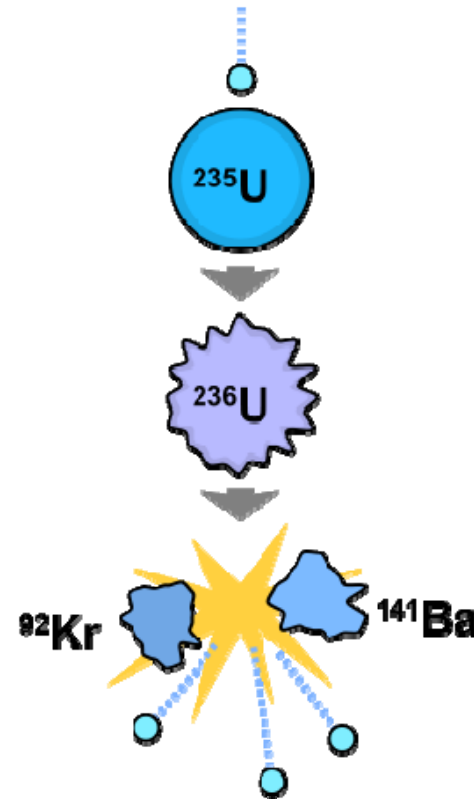
Uranio natural  
> 99.2% U-238  
0.72% U-235



Uranio de bajo enriquecimiento  
(nivel para reactor)  
3-4% U-235



Uranio altamente enriquecido  
(nivel para armas)  
90% U-235

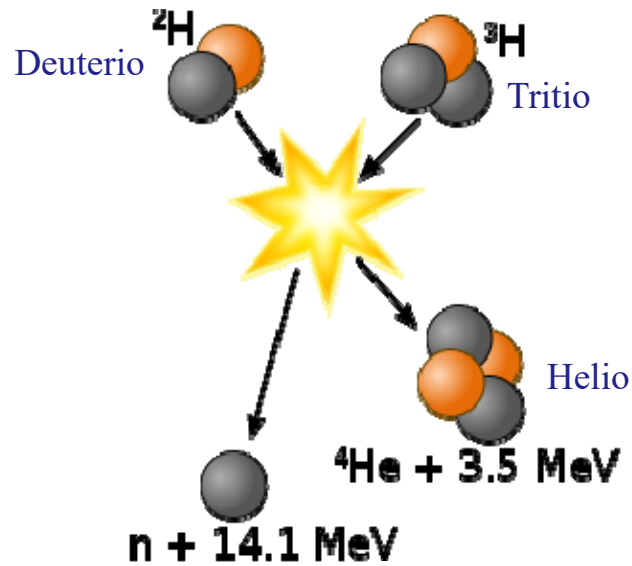


La fisión de un átomo de  $^{235}\text{U}$  genera  $3,2 \cdot 10^{-11}$  J, es decir,  $77 \cdot 10^{12}$  J/kg.

La combustión de un kg de Gasoil genera  $40 \cdot 10^6$  J, es decir,  $40 \cdot 10^6$  J/kg.

Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta

Fusión nuclear



La fusión de 1 kg de hidrógeno genera  $2.6 \cdot 10^{14}$  J, es decir,  $2.6 \cdot 10^{14}$  J/kg.

La fisión de un átomo de  ${}^{235}\text{U}$  genera  $3,2 \cdot 10^{-11}$  J, es decir,  $77 \cdot 10^{12}$  J/kg.

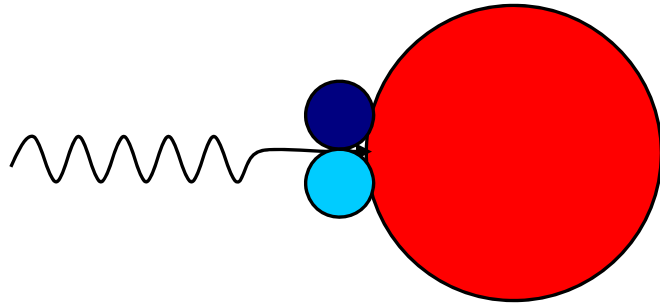
La combustión de un kg de Gasoil genera  $40 \cdot 10^6$  J, es decir,  $40 \cdot 10^6$  J/kg.

Ejemplos de situaciones en las que se comprueba que la expresión de la energía relativista es correcta

Creación de pares

La producción de pares es un ejemplo excelente de la conversión de energía radiante en energía de masa en reposo y energía cinética.

En este proceso un fotón de alta frecuencia pierde toda su energía en una colisión con un núcleo creando un electrón y un positrón (el par) y proporcionándoles energía cinética.



Un positrón es una partícula que es idéntica a en todas sus propiedades a un electrón, excepto en el signo de su carga (y en su momento magnético) que es opuesta a la del electrón; un positrón es, por tanto, un electrón cargado positivamente.

En la producción de pares la energía que toma el retroceso del núcleo es despreciable debido a que es muy masivo y por lo tanto el balance de la energía relativista total en el proceso es simplemente:

$$E = hf = E_- + E_+ = (m_0c^2 + K_-) + (m_0c^2 + K_+) = K_- + K_+ + 2m_0c^2$$



## **Teoría general de la relatividad**

1. Principio de equivalencia.
2. La teoría general de la relatividad. Comprobación experimental.
3. Actualidad en la teoría general de la relatividad.

## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

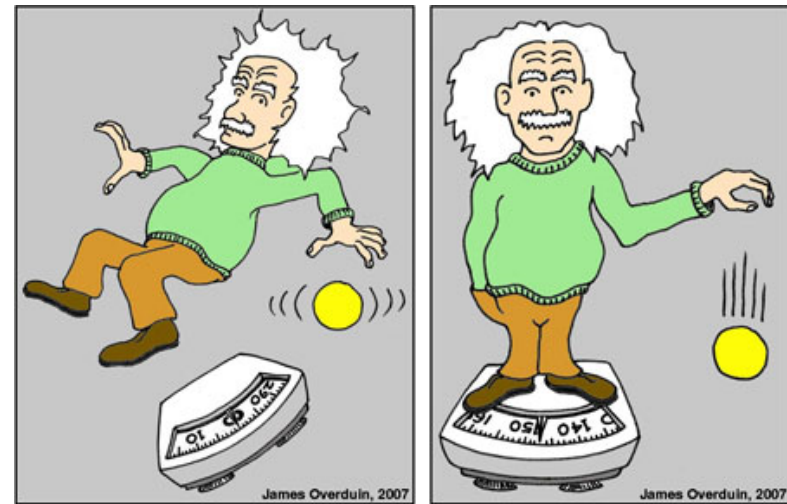
Einstein publicó su “*Teoría Especial de la Relatividad*” en el año 1905. Sus resultados eran tan innovadores que prácticamente ningún físico de la época le dio crédito. De hecho Einstein no fue contratado por ningún Centro de Investigación y siguió trabajando en la Oficina de Patentes de Berna.

No obstante, en 1907, a partir de un problema mental que él mismo se planteo, empezó a desarrollar su “*Teoría General de la Relatividad*” que incluía como un caso particular a la primera. La “*Teoría de la Relatividad Especial*” le habría colocado ya en el top 10 en la historia de la Física, pero la “*Teoría General de la Relatividad*” lo situó en el Olimpo de los físicos.

### *Idea de partida*

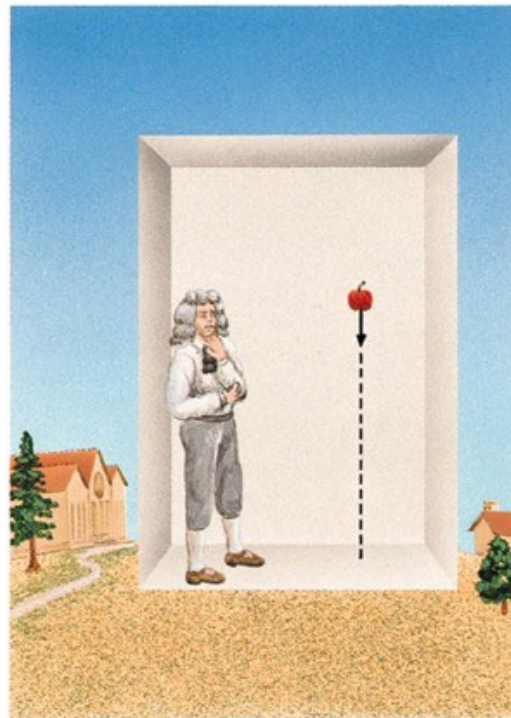
Según él mismo cuenta, "estaba sentado en una silla de la Oficina de Patentes de Berna. De repente me asaltó un pensamiento: **si un hombre cayera libremente, no sentiría su peso**". La idea le obsesionó. No podía dejar de imaginar todo tipo de objetos y personas cayendo.

Por ejemplo: si alguien se encuentra encerrado en un ascensor con objetos en el suelo y la cabina se descuelga y empieza a caer sin freno, el desgraciado que está dentro dejará de sentir la gravedad y los objetos que están a su alrededor flotarán igual que si estuvieran en el espacio vacío.



## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

Einstein imaginó otro supuesto. Si ese mismo ascensor lo dejamos flotar en el espacio, sin gravedad, y lo enganchamos a una nave espacial que lo remolque hacia arriba acelerando enormemente, **el ocupante del ascensor sentirá una fuerza que le pega al suelo.** Y lo que es más, si soltara objetos desde su mano, caerían al suelo del ascensor. Nuestro experimentador no podría distinguir si está encerrado en una cabina posada sobre la superficie de la tierra, sin moverse, o si viaja arrastrado por una nave de viaje por galaxias infinitas, que es lo que está pasando realmente.



## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

Estos ejemplos mentales llevaron a Einstein a plantearse lo que se conoce con el nombre de principio de equivalencia.

*Principio de equivalencia: Un sistema inmerso en un campo gravitatorio es localmente indistinguible de un sistema no inercial acelerado.*

La consecuencia del principio de equivalencia deducido a partir de este experimento mental fue trascendental para Einstein: **¡la relatividad es válida también para movimientos acelerados!**

### *Desarrollo de la teoría*

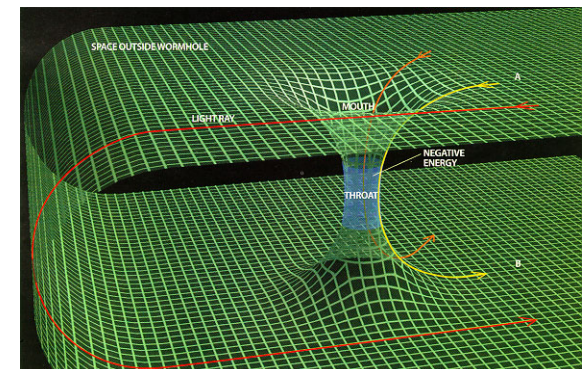
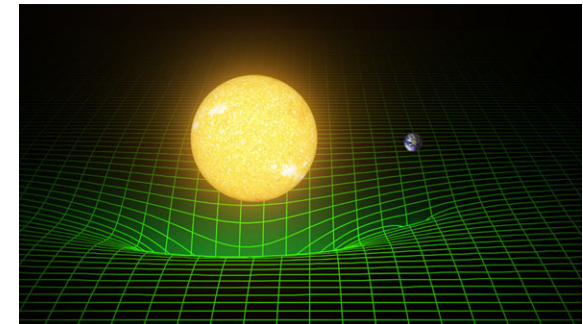
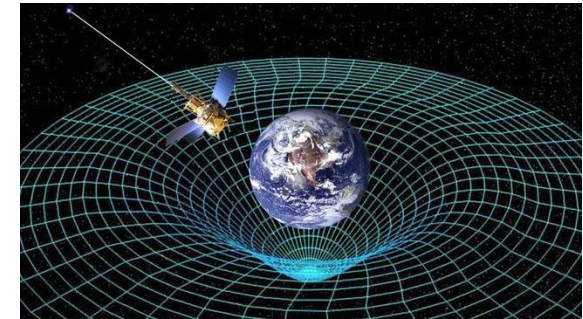
Una vez enunciado su principio de equivalencia la cuestión era calcular la deformaciones espacio temporales que producirían un movimiento uniformemente acelerado basándose en los mismos postulados que utilizó para la teoría de la relatividad especial, es decir, velocidad de la luz constante e invariabilidad de las leyes de la Física con el sistema de referencia.

Este desarrollo matemático es muy complicado y le llevo a Einstein prácticamente 7 años.

Dicho desarrollo predice que **la gravedad** no es en realidad consecuencia de la atracción entre objetos con masa como se postulaba en la teoría gravitatoria de Newton sino que era **consecuencia de la deformación espacio temporal que producían los objetos con mucha masa** en sus proximidades.

## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

De esta forma la trayectorias que siguen los planetas alrededor del sol se pueden explicar en base a esa deformación.





## **TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

### *Hechos observados que permitía explicar*

La teoría de la gravitación permitía predecir, cuando fue publicada en 1687, con mucha precisión el movimiento de los planetas que podían observarse con los telescopios de la época. Incluso predijo la existencia de Neptuno, descubierto en 1846, necesario en la teoría de Newton para explicar la trayectoria exhibida por Urano, descubierto en 1781. Esto hizo que la teoría de la gravitación de Newton fuera con mucha probabilidad la teoría más sólida sobre el funcionamiento de la naturaleza que había a principios del siglo XX.

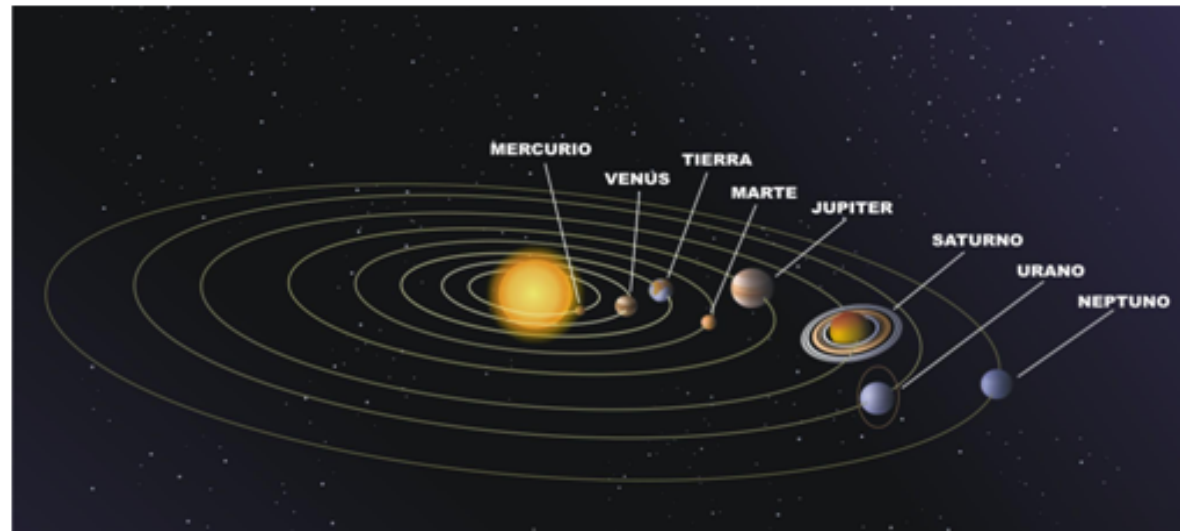
Sin embargo, el movimiento de Mercurio alrededor del sol era el “pero” de dicha teoría. Cuando los astrónomos usaron la teoría de Newton para calcular su órbita alrededor del Sol y compararon esos cálculos con las observaciones, encontraron que eran casi iguales, pero había una pequeña diferencia en la posición real de Mercurio: cada año parecía cambiar su posición un ángulo muy pequeño, de 5,75 segundos de arco (el ángulo con el que se vería una moneda de 1 Euro a un km de distancia). Aunque el error era ciertamente muy pequeño los aparatos usados eran lo suficientemente exactos como para no poder admitirlo. La explicación que le dieron a dicha discrepancia era que en los cálculos no se había tenido en cuenta la atracción que ejercen el resto de planetas del sistema solar (Venus, la Tierra, etc). Introduciendo este efecto en los cálculos encontraron que, de los 5,75" de error anual, podían explicar 5,32" por la influencia gravitatoria de los otros planetas. Esto era casi perfecto... pero aún no era exacto. La diferencia (0,43"/año) entre la posición calculada para Mercurio y la observada era ahora *más pequeña* (el ángulo con el que se vería la moneda de 1 Euro a 12 km) pero ahí estaba. Era un error pequeño pero inquietante: ¿por qué no funcionaba *exactamente* la teoría de Newton con Mercurio, cuando sí parecía funcionar con todos los demás planetas?

## **TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

### *Hechos observados que permitía explicar*

La teoría General de la Relatividad de Einstein contenía como un caso particular a la Teoría de la gravitación de Newton en el caso en el que las velocidades entre los sistemas fueran pequeñas comparadas con la velocidad de la luz y las masas de los sistemas fueran pequeñas comparadas con las masas típicas de una estrella. Por eso, lejos del sol las dos teorías predecían el mismo comportamiento y explicaban perfectamente el movimiento de todos los planetas del sistema solar.

Sin embargo, debido a la cercanía al sol, la deformación espacio-tiempo que predecía la teoría de Einstein en la posición ocupada por Mercurio hacía que se alejase del comportamiento de la teoría de la Gravitación de Newton. Lo mejor del caso era que permitía explicar con una exactitud total los datos observados por los astrónomos.



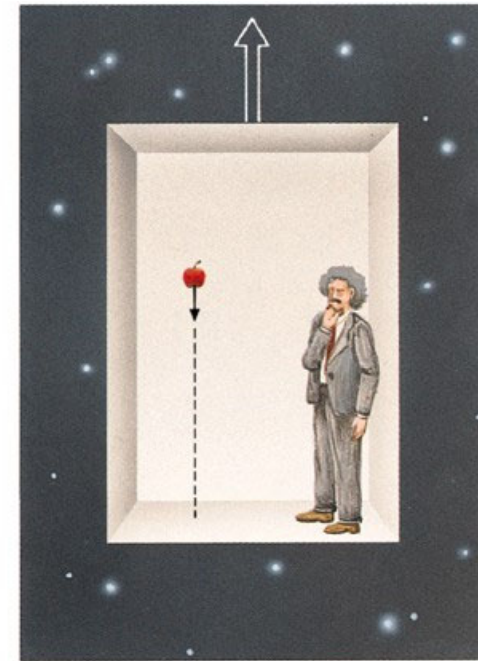
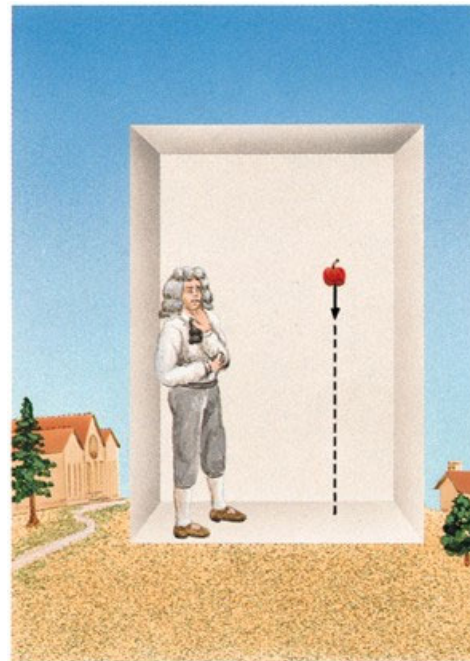
## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

### *Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

#### *Desviación de la luz*

Hemos visto que la teoría de la Relatividad explicaba igual de bien que la teoría de la Gravitación el movimiento de todos los planetas externos del sistema solar pero además era capaz de explicar el movimiento de Mercurio con una exactitud total con los datos observados por los astrónomos. Pero esto no fue suficiente para la mayoría de los Físicos de la época dado los conceptos tan innovadores que había que asumir para aceptar la teoría de la relatividad (tiempos relativos, etc). Se necesitaban, por tanto, más pruebas en las que la teoría de Einstein se mostrara más fiable que la de Newton. El propio Einstein propuso un experimento mental que sería el que daría la razón a una u otra teoría.

Según hemos visto el principio de equivalencia no permite distinguir a una persona encerrada dentro de un ascensor si el aceleración que siente es debida a que un cohete tira del ascensor o debido a la atracción de la tierra.





## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

*Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

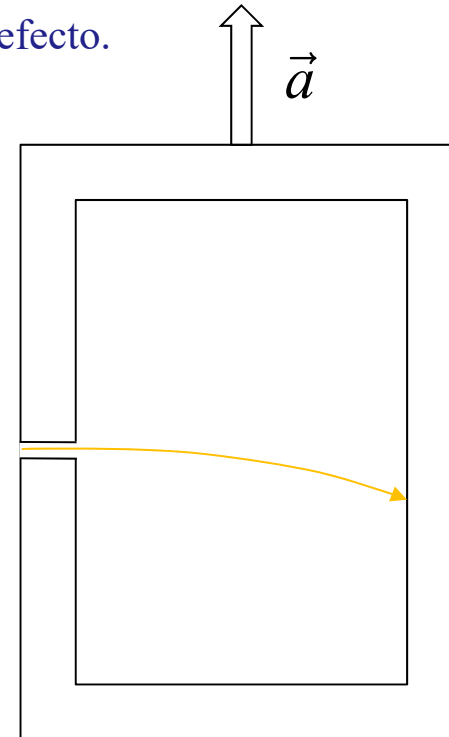
*Desviación de la luz*

El experimento mental que se le ocurrió a Einstein fue el siguiente:

¿Qué ocurriría si abrimos un diminuto agujero en una de las paredes y **un rayo de luz penetra en la cabina del ascensor?**

Si consideramos que el ascensor está siendo tirado por una nave con una determinada aceleración la teoría de la Relatividad y las leyes de Newton predicen el mismo efecto.

En el tiempo que el rayo tarda en llegar a la pared de enfrente, la cabina se mueve ligeramente hacia arriba, ya que está siendo acelerada con fuerza por la nave. Así, cuando finalmente la luz llega a la pared opuesta, lo hace en un punto ligeramente inferior al que habría impactado si la cabina estuviera quieta.



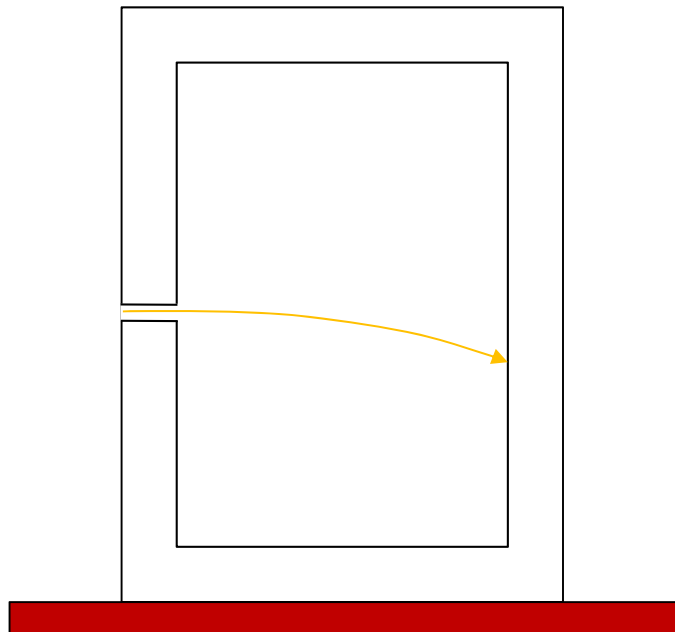
## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

*Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

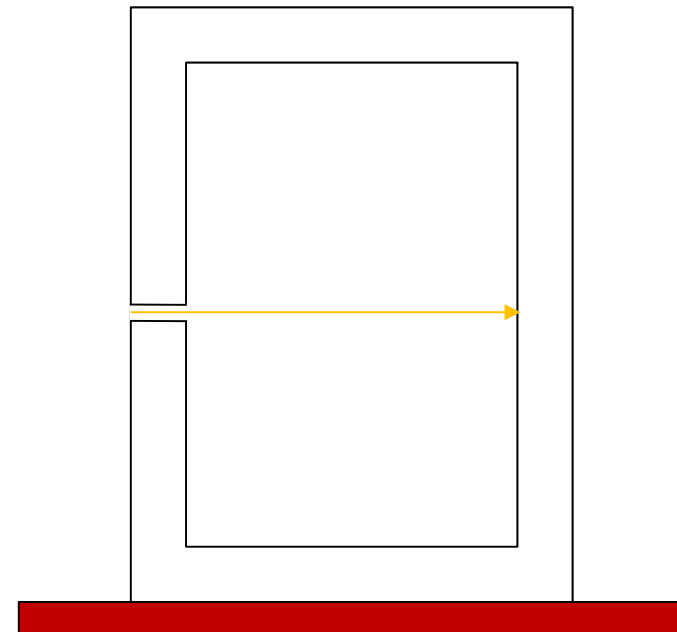
*Desviación de la luz*

Sin embargo el comportamiento que predicen ambas teorías es diferente si consideramos el ascensor apoyado sobre la tierra.

Así la teoría de la Gravedad de Newton predice que en esa situación el rayo no debería desviarse mientras que la teoría de la Relatividad de Einstein predice el mismo comportamiento que en el caso anterior (principio de equivalencia).



Teoría de la relatividad de Einstein



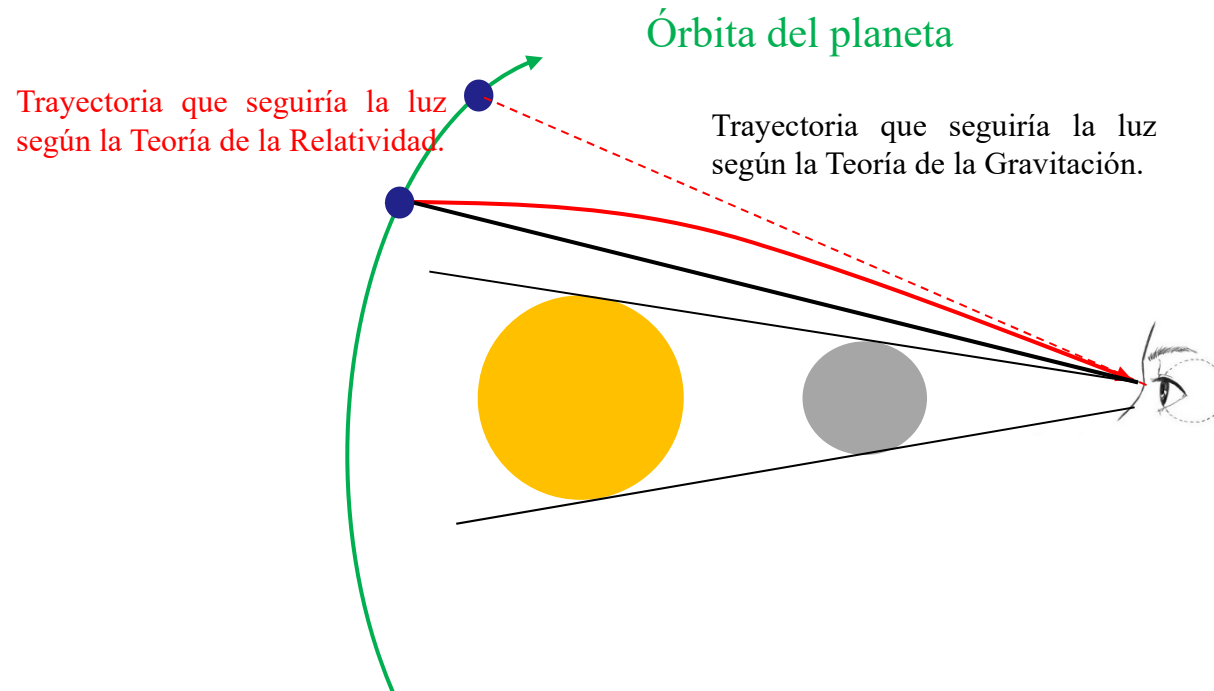
Teoría de la gravitación de Newton

## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

*Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

*Desviación de la luz*

Einstein sugirió además que podían comprobar esto aprovechando un eclipse de sol para ver si los rayos que pasan cerca del sol se desvían debido a la deformación espacio tiempo tan grande que se produce en sus proximidades.

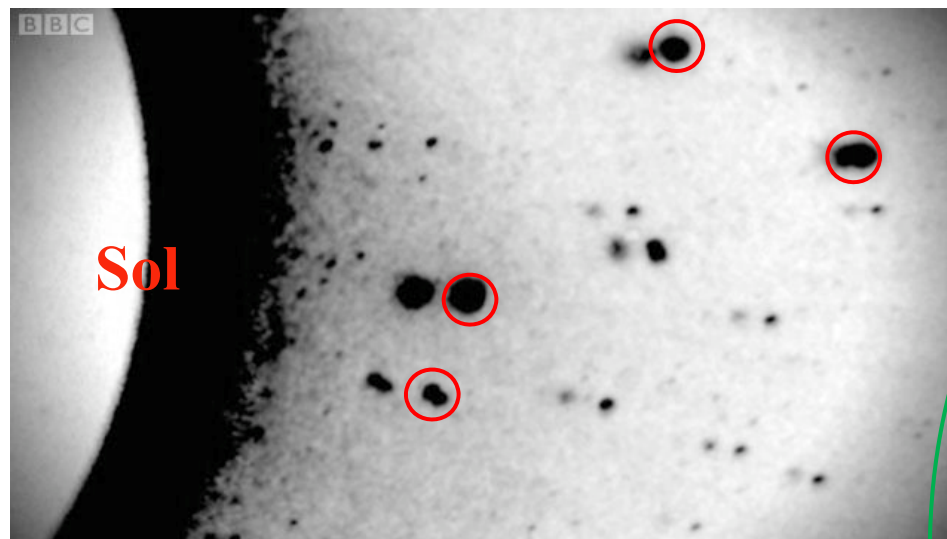


## TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

*Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

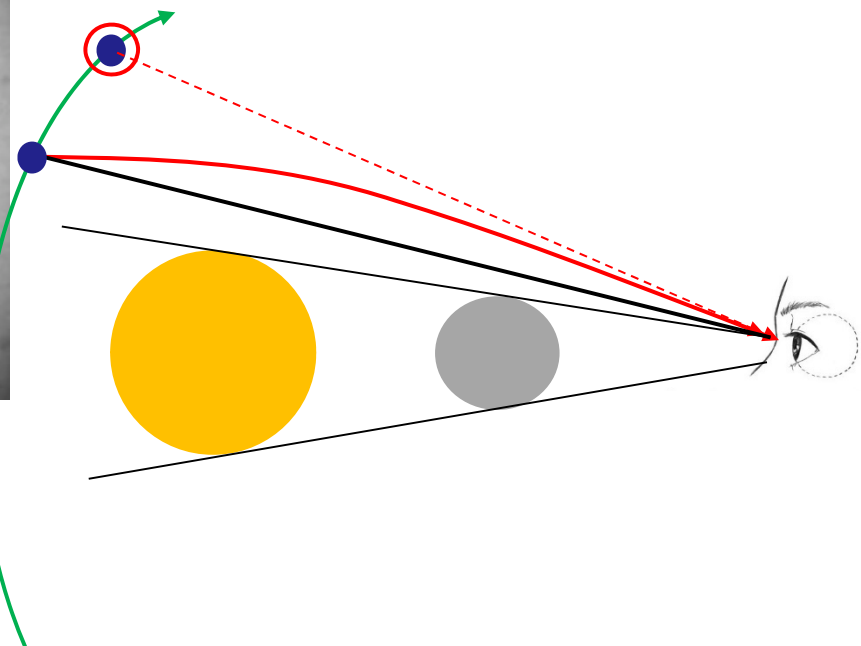
*Desviación de la luz*

Esto fue comprobado experimentalmente por primera vez en 1919 por Arthur Stanley Eddington. Para ello aprovechó un eclipse de sol para fotografiar la posición relativa de algunos planetas y comparó dicha foto con otra realizada en las mismas condiciones cuando el sol no ocupaba esa región del espacio. Si la teoría de Einstein era cierta se tenía que producir un desplazamiento entre ambas fotografías. En caso contrario la teoría correcta sería la de Newton.



Resultados obtenidos por Eddington

— Nueva posición de los planetas



## **TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

*Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

*Tiempo de desplazamiento del efecto gravitatorio (ondas gravitacionales)*



## **TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

*Nuevos fenómenos (Relatividad vs Gravitación)*

*Tiempo de desplazamiento del efecto gravitatorio (ondas gravitacionales)*

La observación de las ondas gravitacionales predichas por la teoría de la relatividad de Einstein fueron observadas por primera vez en 2015 debido a la colisión de dos agujeros negros. El proyecto LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) ha sido el que se ha encargado del montaje experimental necesario para esta detección comenzando en el año 1984 y que ha costado 365 millones de dólares.

## **TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD**

### *La teoría general de la relatividad hoy en día*

Aunque, como acabamos de comentar, hace poco se han observado las ondas gravitacionales que predijo hace un siglo Einstein con la teoría general de la relatividad hay observaciones astronómicas que no pueden ser explicadas mediante dicha teoría.

La mejora tecnológica en el desarrollo de telescopios ha permitido hacer observaciones más detalladas del Universo. Dichas observaciones han permitido describir el movimiento de muchos sistemas solares, galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Sin embargo, se obtienen fuertes desviaciones entre lo observado experimentalmente y lo que predice la teoría de la relatividad que debería ocurrir. Esto ha llevado a los Astrofísicos de hoy en día a tratar de explicar estas observaciones desde dos puntos de vista diferente:

- 1.- Proponer nuevas teorías que expliquen los movimientos observados.
- 2.- Aplicar la Teoría General de la Relatividad de Einstein suponiendo que hay materia y energía donde es necesario para que el movimiento que predice la teoría coincida con lo observado experimentalmente. Esto presenta principalmente dos problemas:
  - a).- La materia y energía necesaria para explicar las observaciones presenta propiedades especiales frente a la radiación electromagnética lo que la hace invisible a los telescopios actuales (materia y energía oscura).
  - b).- Aproximadamente el 95% del Universo estaría compuesto por materia y energía oscura y sólo el 5% serían los planetas y los objetos cósmicos que observamos.





# MECÁNICA CUÁNTICA

En una reunión de la Sociedad Alemana de Física, el 14 de diciembre de 1900, Max Planck leyó un trabajo titulado "La teoría de la ley de distribución de energías del espectro normal". Este trabajo que en un principio atrajo poca atención, fue el precursor de una revolución en la física. La fecha de su presentación se considera como el nacimiento de la **física cuántica**, a pesar de que no fue hasta un cuarto de siglo después, cuando Schrödinger y otros desarrollaron la mecánica cuántica moderna, base del conocimiento actual.

Veremos que la necesidad de la mecánica cuántica, se manifestará por la contradicción sistemática de las leyes clásicas respecto a diferentes fenómenos y la solución a esos conflictos en base a ideas cuánticas.

Como en el caso de la relatividad, la física cuántica representa una generalización de la física clásica, que incluye a las leyes clásicas como casos particulares. Así como la relatividad extiende el campo de aplicación de las leyes de la física a la región de altas velocidades, la física cuántica lo extiende a la región de dimensiones pequeñas; y así como la relatividad se caracteriza por una constante universal de significado fundamental, la velocidad de la luz  $c$ , así mismo la física cuántica se caracteriza por una constante universal de significado fundamental, que hoy se llama constante de Planck  $h$ .

- 1.- Introducción**
- 2.- Radiación térmica.**
- 3.- Leyes de la radiación.**
- 4.- El efecto fotoeléctrico.**
- 5.- El efecto Compton.**

Se llama radiación térmica, a la radiación electromagnética emitida por un cuerpo como consecuencia de su temperatura.

Todos los cuerpos están en todo momento emitiendo y absorbiendo radiación térmica.

Si, en un principio, el cuerpo está más caliente que su alrededor, se enfriará, ya que la rapidez con que emite energía excederá la rapidez con que la absorbe. Cuando se alcanza el equilibrio térmico la rapidez de emisión y la de absorción de energía serán iguales.

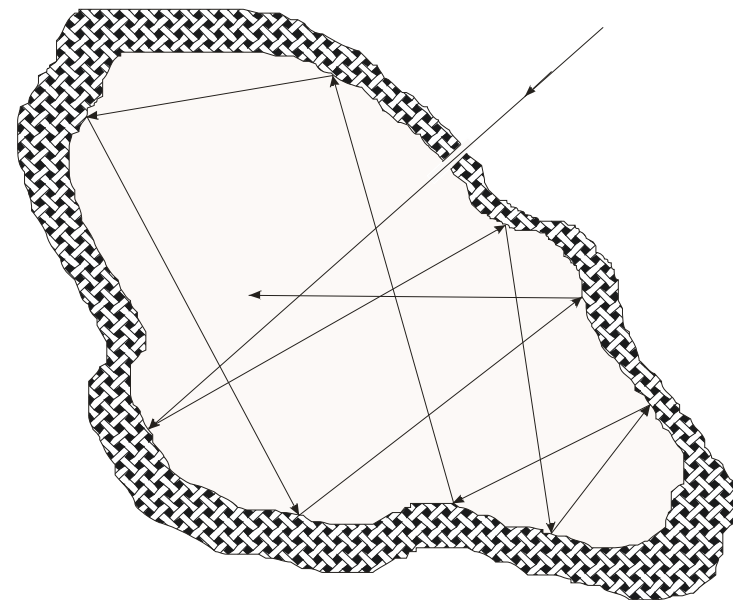
La materia en un estado condensado (es decir, sólido o líquido) emite un espectro de radiación continuo, es decir, existe emisión de ondas electromagnéticas de todas las frecuencias, mientras que los gases poseen espectros discretos.

Los detalles del espectro son casi independientes del material particular del cual se compone el cuerpo, pero dependen fuertemente de la temperatura. A temperaturas ordinarias, la mayoría de los cuerpos son visibles no por la luz que emiten sino por la luz que reflejan, ya que si no se hace incidir luz sobre ellos no es posible verlos. Sin embargo, a muy altas temperaturas, los cuerpos son luminosos por sí mismos. Por lo tanto, los cuerpos luminosos por sí mismos están muy calientes.

Se llama cuerpos negros a aquellos sistemas cuyas superficies absorben toda la radiación térmica que incide sobre ellos. El nombre resulta apropiado puesto que dichos cuerpos no reflejan luz, por tanto, se ven negros.

Independientemente de los detalles de su composición, todos los cuerpos negros a la misma temperatura emiten radiación térmica con el mismo espectro, y esta propiedad los hacen objeto de un interés teórico especial de tal manera que durante mucho tiempo los físicos trataron de encontrar una explicación a las características específicas de su espectro.

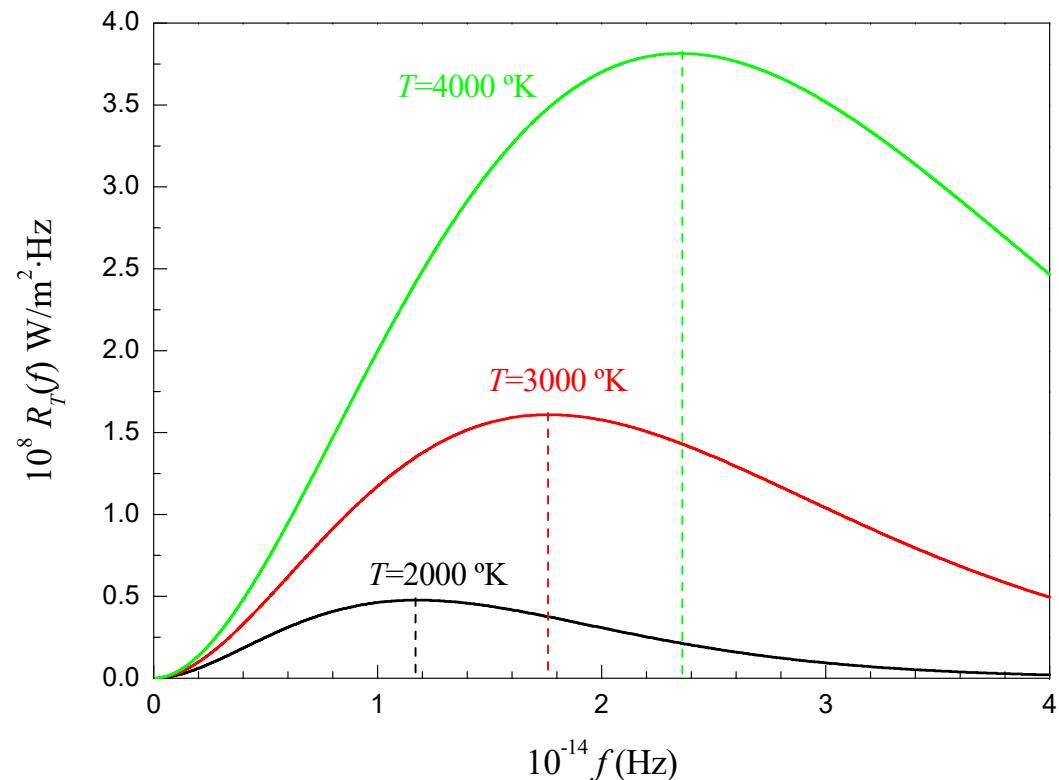
Un ejemplo de un (casi) cuerpo negro, sería cualquier objeto cubierto con una capa difusa de pigmento negro, como negro-bismuto o negro-humo. Otro ejemplo de un cuerpo negro consiste en un objeto que contiene una cavidad y que se comunica con el exterior por medio de un pequeño agujero. El agujero absorbe la radiación como un cuerpo negro. Asimismo, la radiación emitida por el agujero coincide con la emitida por un cuerpo negro.

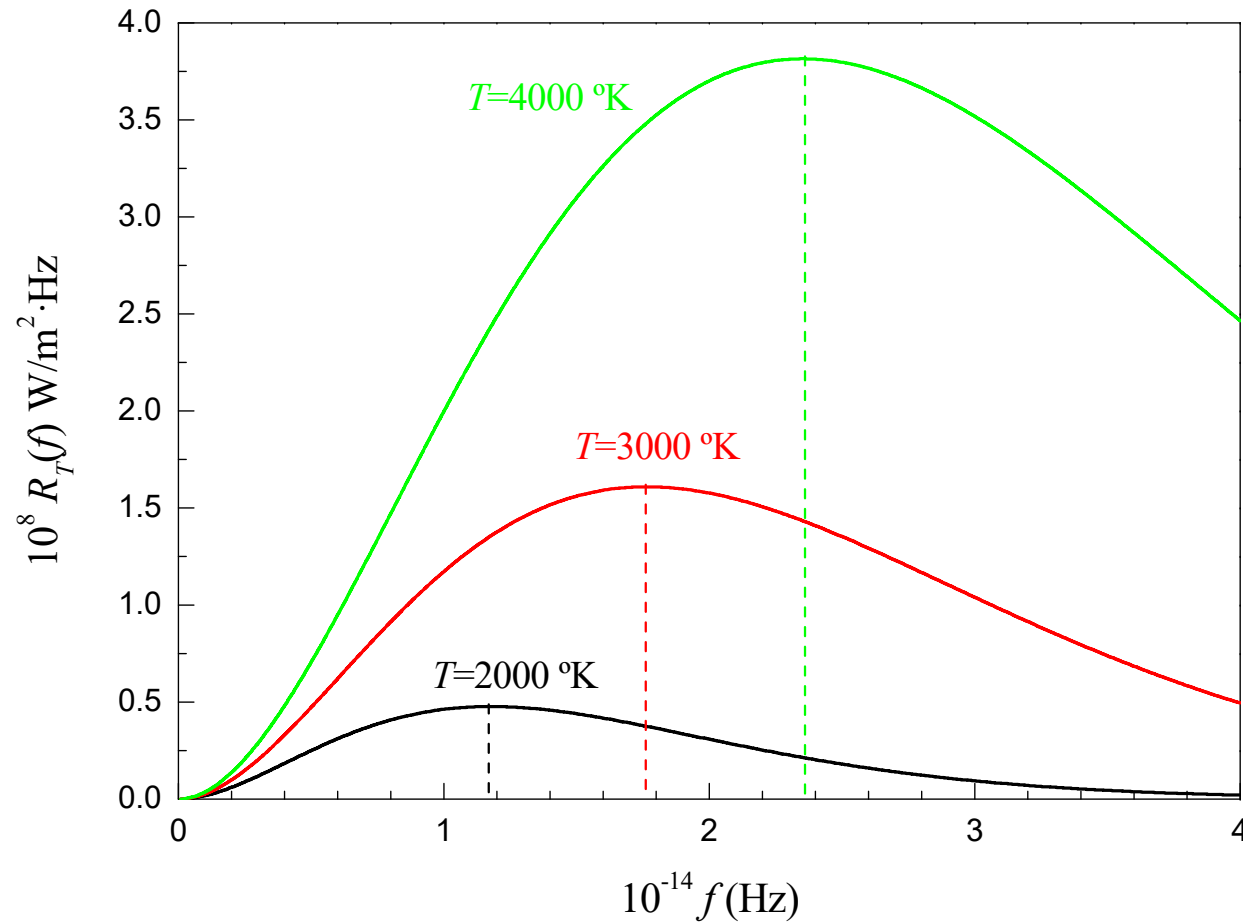


La distribución espectral de la radiación de un cuerpo negro se especifica por la cantidad  $R_T(f)$ , llamada radiancia espectral, definida tal que  $R_T(f) df$  es igual a la energía emitida en forma de radiación en el intervalo entre  $f$  y  $f+df$  de un área unitaria de la superficie y por unidad de tiempo.

También es habitual utilizar la radiancia espectral en función de la longitud de onda,  $R_T(\lambda)$ . En este caso la radiancia espectral estaría definida de forma que  $R_T(\lambda)d\lambda$  nos diese la energía emitida por el cuerpo por unidad de superficie y tiempo con longitudes de onda comprendidas entre  $\lambda$  y  $\lambda+d\lambda$ .

En 1899, Lummer y Pringsheim realizaron una de las primeras mediciones precisas de esta cantidad, utilizando un instrumento similar a los espectrómetros de prismas utilizados para medir espectros ópticos.





La potencia total radiada a una temperatura particular,  $R_T$ , se obtiene sencillamente del área bajo la curva correspondiente a esa temperatura

6).- La potencia total radiada, en todas las frecuencias, aumenta conforme la temperatura aumenta, pero más rápidamente que en forma lineal.

$$R_T = \int_0^\infty R_T(f) df$$

El aumento rápido de la radiación emitida con la temperatura del cuerpo negro se conoce como ley de Stefan, y fue enunciada por primera vez en 1879, en forma de una ecuación empírica:

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

El resultado experimental que muestra que el espectro se desplaza hacia frecuencias mayores a medida que  $T$  aumenta se conoce como ley del desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{\text{max}} T = \text{constante}$$

$$\text{constante} = 2.7455 \cdot 10^{-3} \text{ m}^\circ\text{K}$$

### **Aplicación**

La temperatura de la fotosfera solar es de 5780 °K y según la ley de Wien el pico de emisión se produce a 475 nm. Como el rango visible se extiende desde 400-7400 nm, esta longitud de onda cae dentro del espectro visible siendo de un tono verde. Sin embargo, debido a la difusión de Rayleigh de la luz azul por la atmósfera la componente azul se separa distribuyéndose por la bóveda celeste y el sol aparece amarillento.



A finales del siglo XIX, Rayleigh y Jeans hicieron cálculos de la densidad de energía de la radiación en una cavidad o cuerpo negro, que mostraban un claro conflicto entre la física clásica y los resultados experimentales.

En vez de calcular directamente la radianza espectral  $R_T(f)$  de la superficie del cuerpo negro, estos autores utilizaron el espectro de la radiación dentro de la cavidad, llamada radiación de la cavidad, en términos de una densidad de energía,  $\rho_T(f)$ , que se define como la energía electromagnética contenida en una unidad de volumen de la cavidad a temperatura  $T$ , en el intervalo de frecuencia entre  $f$  y  $f+df$ . Es evidente que estas cantidades deben ser proporcionales entre sí, es decir

$$\rho_T(f) \propto R_T(f)$$

Lo primero que estos autores obtuvieron fue la distribución de la densidad de ondas electromagnéticas  $N(f)$  en el interior de la cavidad:

$$N(f) = \frac{8\pi}{c^3} f^2$$

Una vez calculado la cantidad de ondas que hay en el interior de la cavidad para cada frecuencia el siguiente paso sería calcular la energía de cada una de estas ondas. Para un sistema de este tipo la física estadística clásica hace una predicción definitiva de los valores promedios de las energías de las ondas electromagnéticas (ley de equipartición)

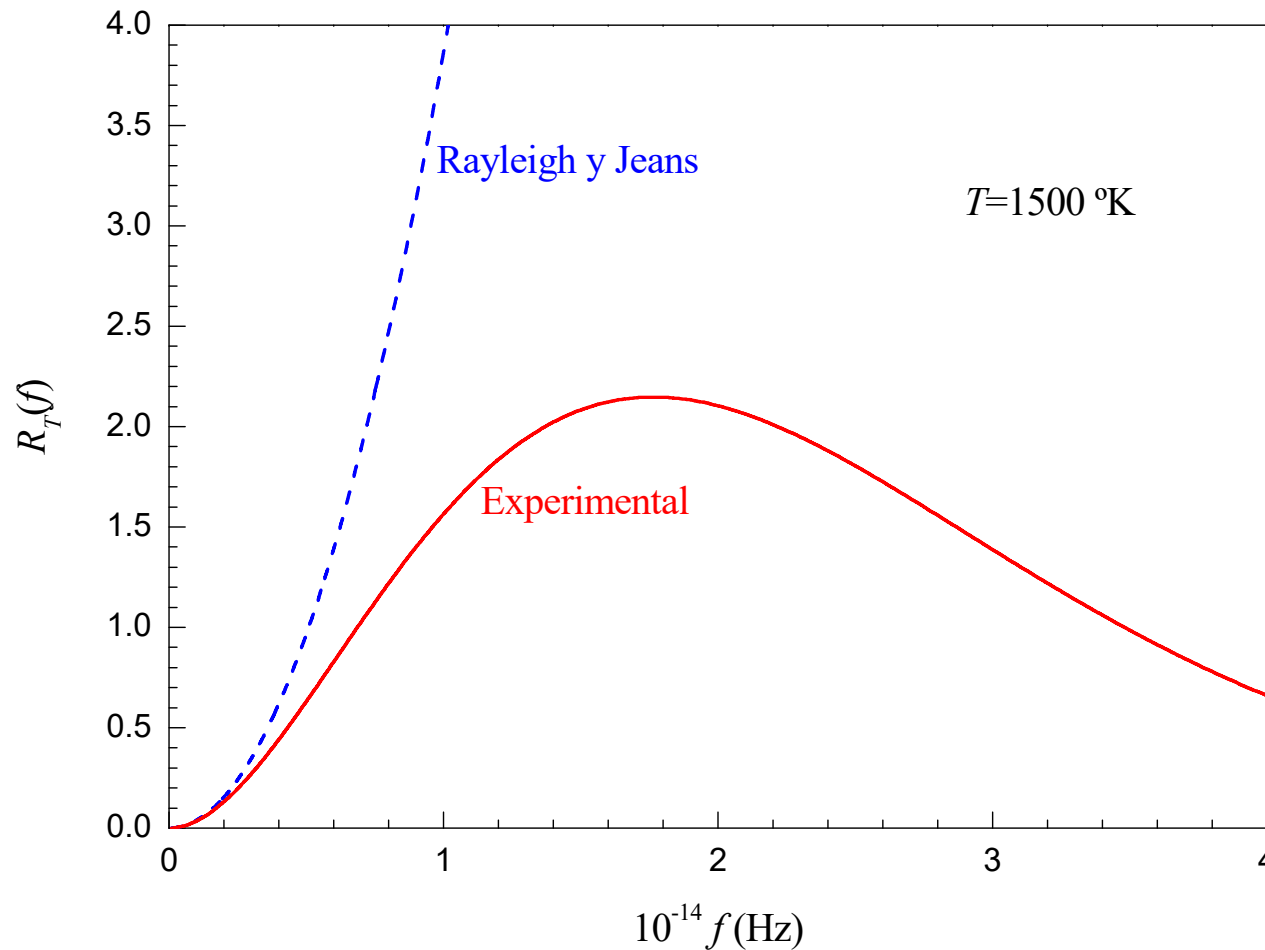
$$\bar{E} = kT$$

Nótese que la física clásica predice la misma energía total promedio, para todas las ondas estacionarias de la cavidad, independientemente de sus frecuencias.

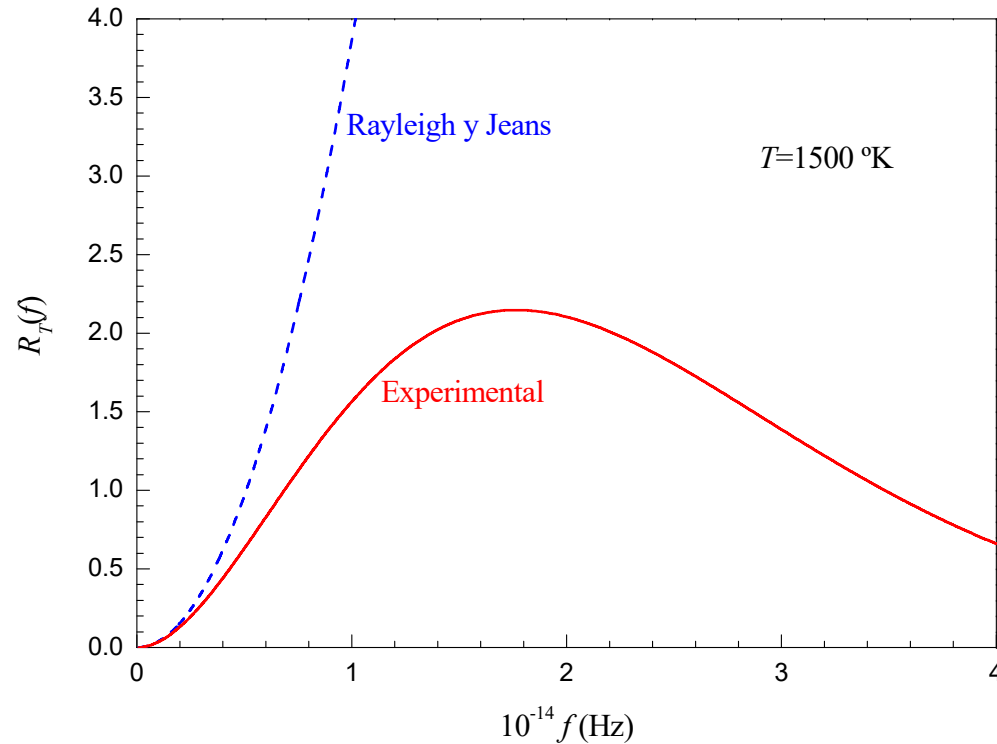
La energía por unidad de volumen en el intervalo de frecuencias entre  $f$  y  $f+df$  del espectro de cuerpo negro de una cavidad a temperatura  $T$  vendrá dada por:

$$\rho_T(f)df = \frac{8\pi}{c^3} f^2 kTdf$$

**Comparación de la teoría de Rayleigh y Jeans y los resultados experimentales (Catástrofe ultravioleta).**



Planck consideró que el problema de los cálculos realizados por Rayleigh y Jeans se encontraba en la ley de equipartición de la energía en la que se basaba su teoría y trató de sustituir el valor medio de la energía que daba dicha ley por otro que explicara los resultados experimentales.



La teoría proporcionaba resultados satisfactorios a bajas frecuencias. Por lo tanto, Planck supuso que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{E} = kT$$

Por otro lado, Planck se dio cuenta de que la discrepancia a frecuencias altas se eliminaba si, por alguna razón, existía un corte, de modo que:

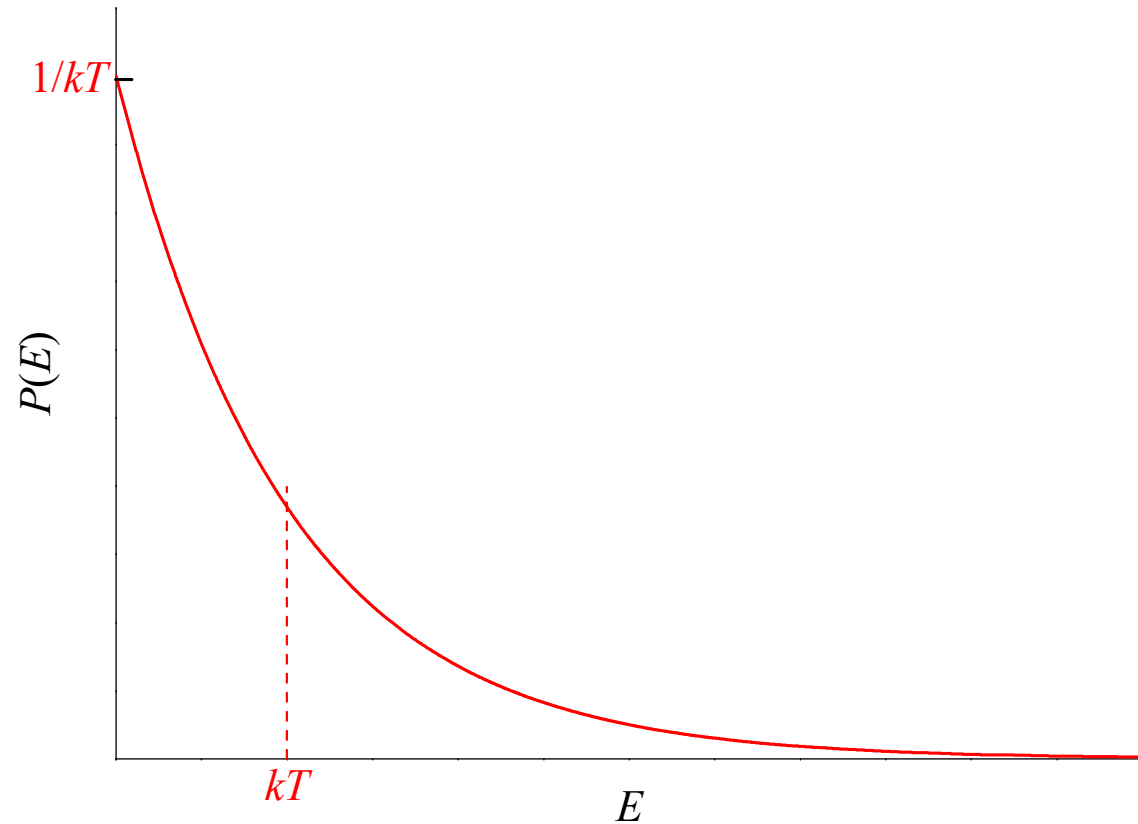
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{E} = 0$$

Planck pensó que, dadas las circunstancias que prevalecen en el caso de la radiación del cuerpo negro, la energía promedio de una onda estacionaria es función de la frecuencia.

## Ley de equipartición.

Se obtiene de un resultado más general de la física estadística llamado distribución de Boltzmann. ¿Qué es una distribución de Boltzmann? La distribución de Boltzmann es una función de distribución, definida como

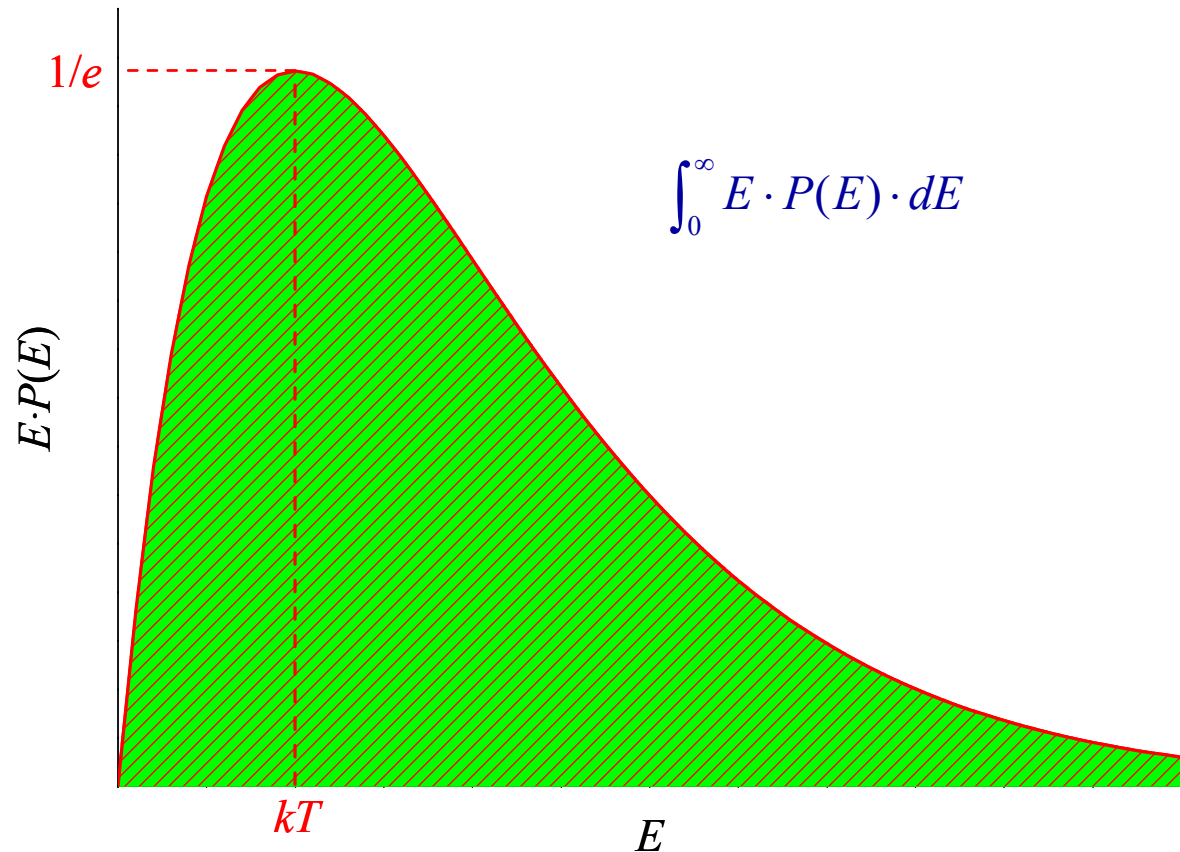
$$P(E) = \frac{\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)}{kT}$$



### Ley de equipartición.

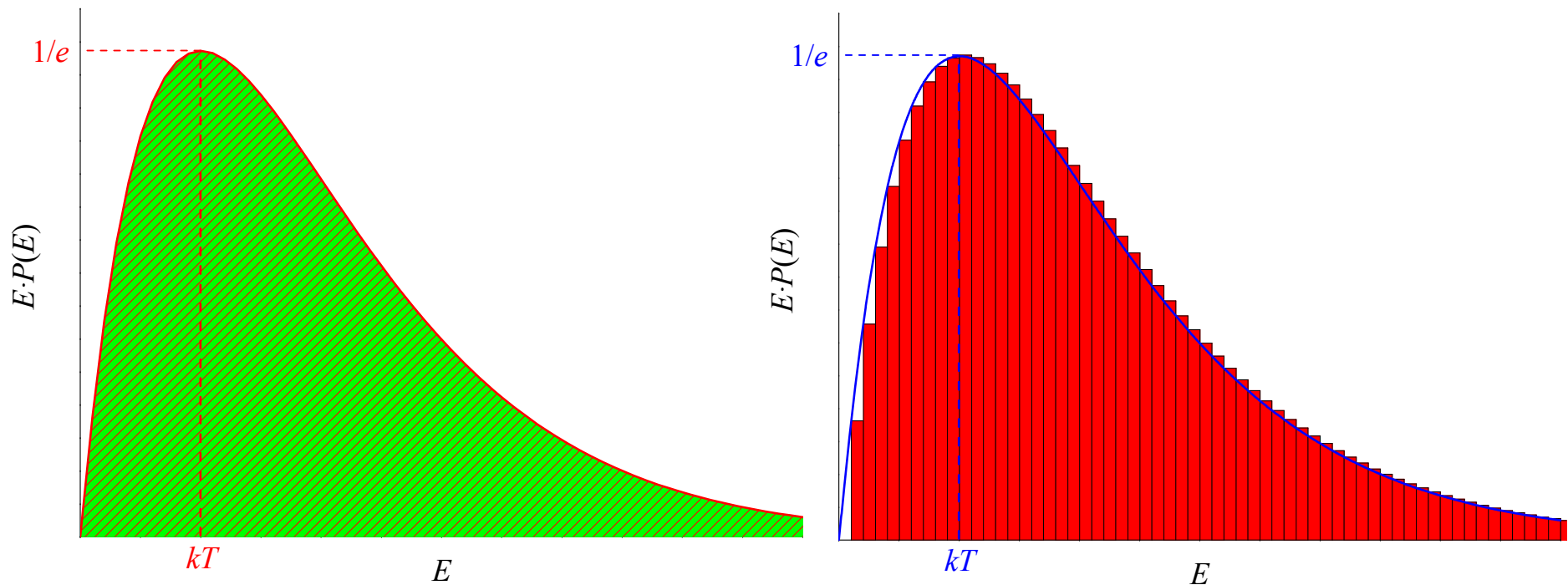
La distribución de Boltzmann proporciona una información completa acerca de las energías de los entes del sistema, incluyendo desde luego, el valor promedio de las energías. Esta última cantidad puede obtenerse utilizando la expresión:

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot P(E) \cdot dE}{\int_0^{\infty} P(E) \cdot dE}$$



## Hipótesis de Planck

La gran contribución de Planck surgió cuando se dio cuenta de que podía lograr el corte requerido si trataba  $E$  como una variable discreta en lugar de cómo una variable continua.

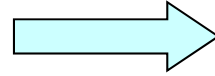


$$\int_0^{\infty} E \cdot P(E) \cdot dE$$

$$\Delta E \sum_{i=0}^{\infty} E_i P(E_i) \quad \text{con } E_i = i \cdot \Delta E$$

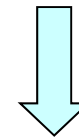
### Hipótesis de Planck

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot P(E) \cdot dE}{\int_0^{\infty} P(E) \cdot dE}$$



$$\bar{E} = \frac{\Delta E \sum_{i=0}^{\infty} E_i P(E_i)}{\Delta E \sum_{i=0}^{\infty} P(E_i)} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} E_i P(E_i)}{\sum_{i=0}^{\infty} P(E_i)} \quad \text{con } E_i = i \cdot \Delta E$$

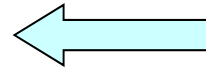
$$P(E) = \frac{\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)}{kT}$$



$$\bar{E} = \frac{\Delta E}{\exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right) - 1}$$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \bar{E} = kT$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{E} = 0$$



$$\Delta E = hf$$

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

**Hipótesis de Planck**

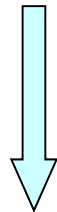
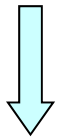
$$\bar{E} = kT \quad \longrightarrow \quad \rho_T(f) df = \frac{8\pi}{c^3} f^2 kT df$$

$$\bar{E} = \frac{\Delta E}{\exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right) - 1}$$

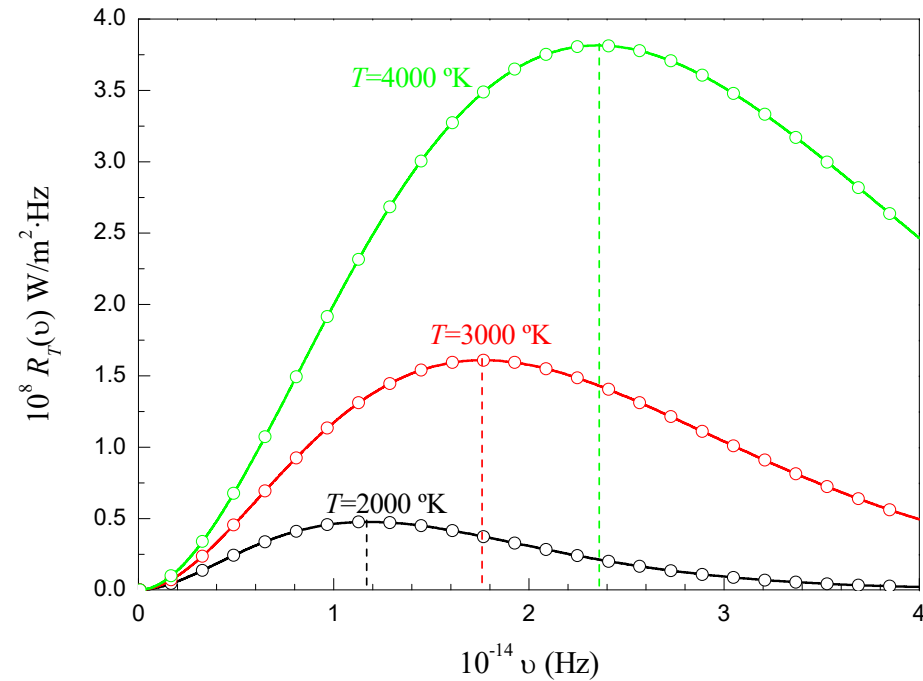


$$\rho_T(f) df = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \frac{\Delta E}{\exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right) - 1} df$$

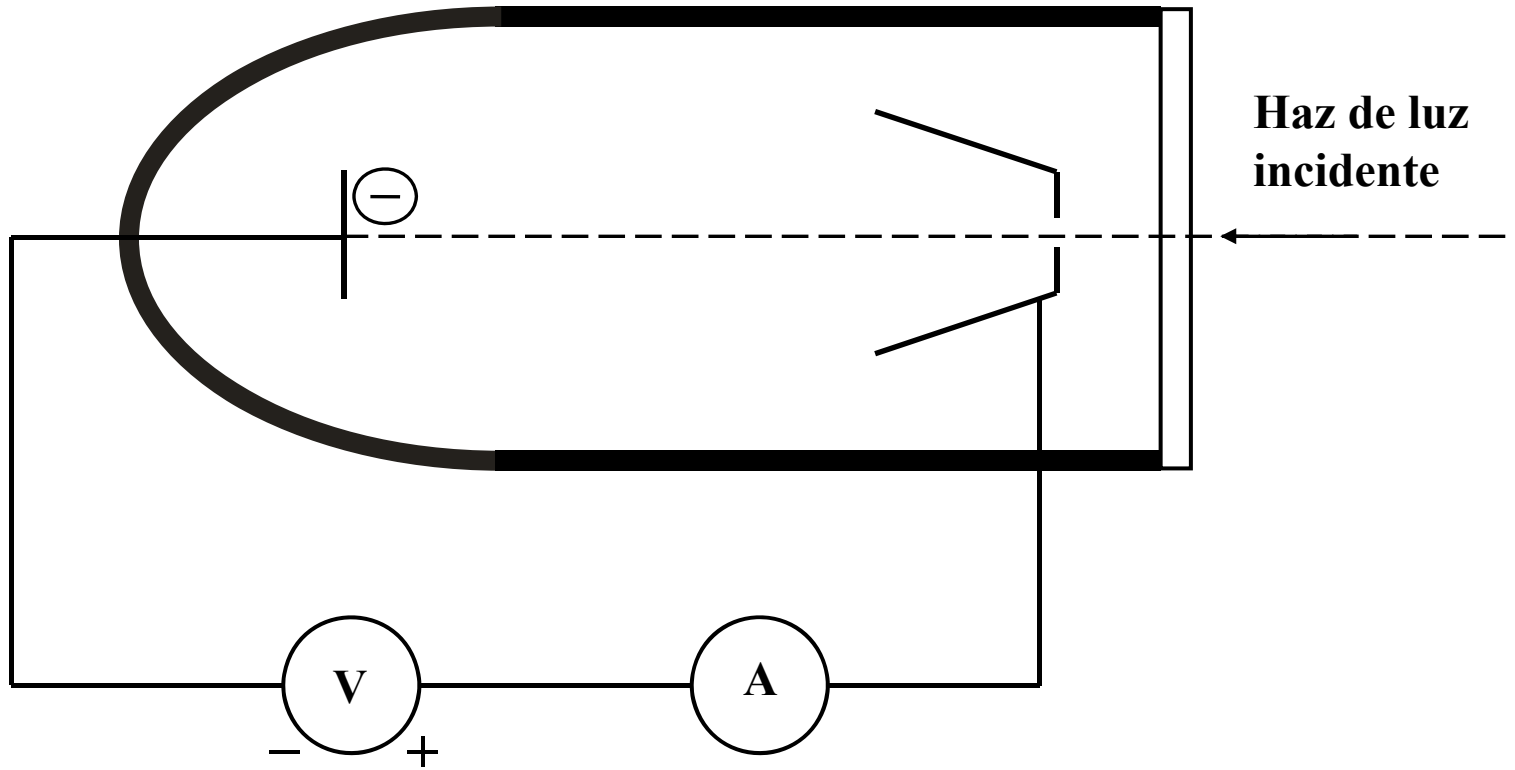
$$\Delta E = hf$$

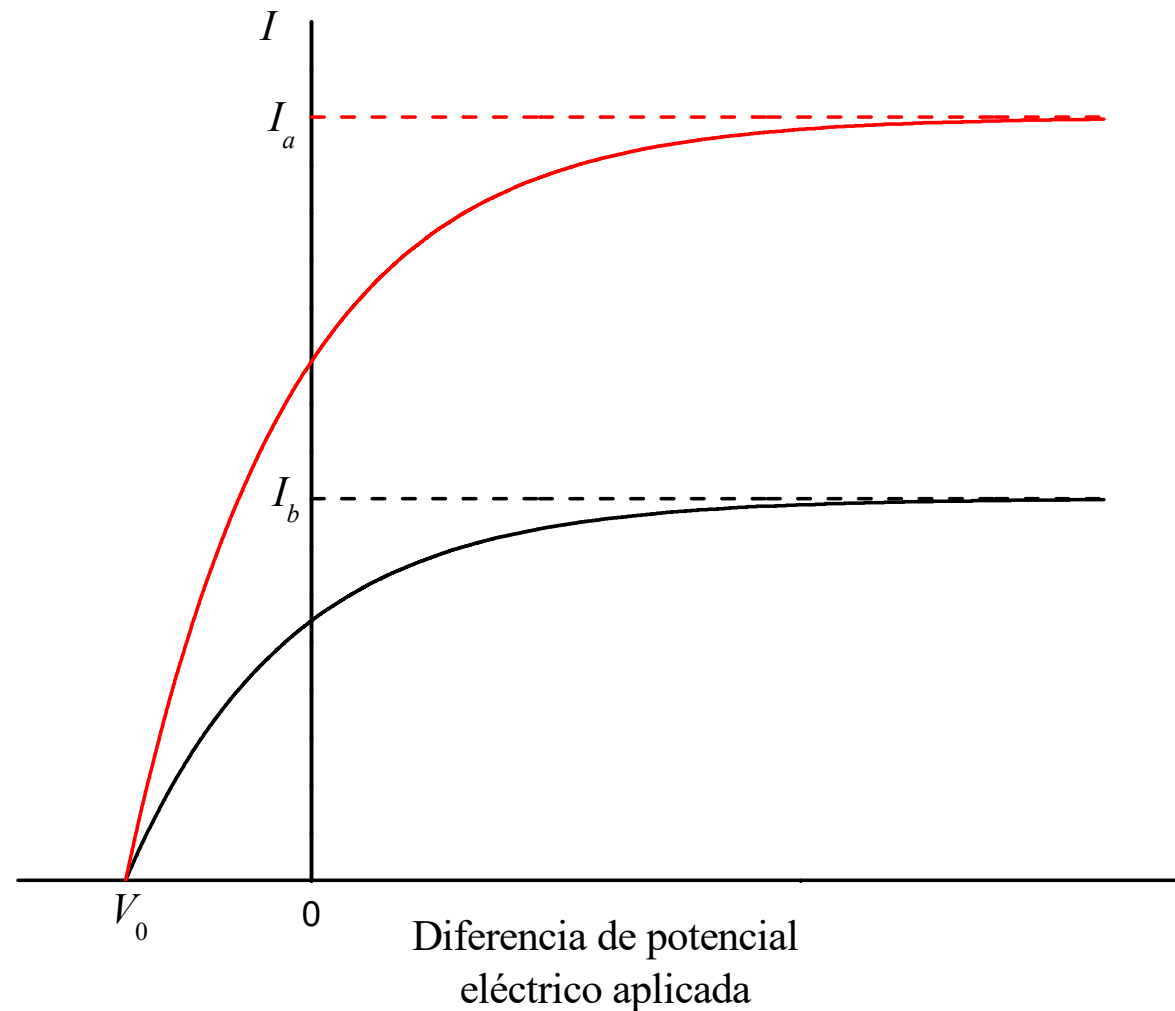


$$\rho_T(f) df = \frac{8\pi}{c^3} f^2 \frac{hf}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} df$$

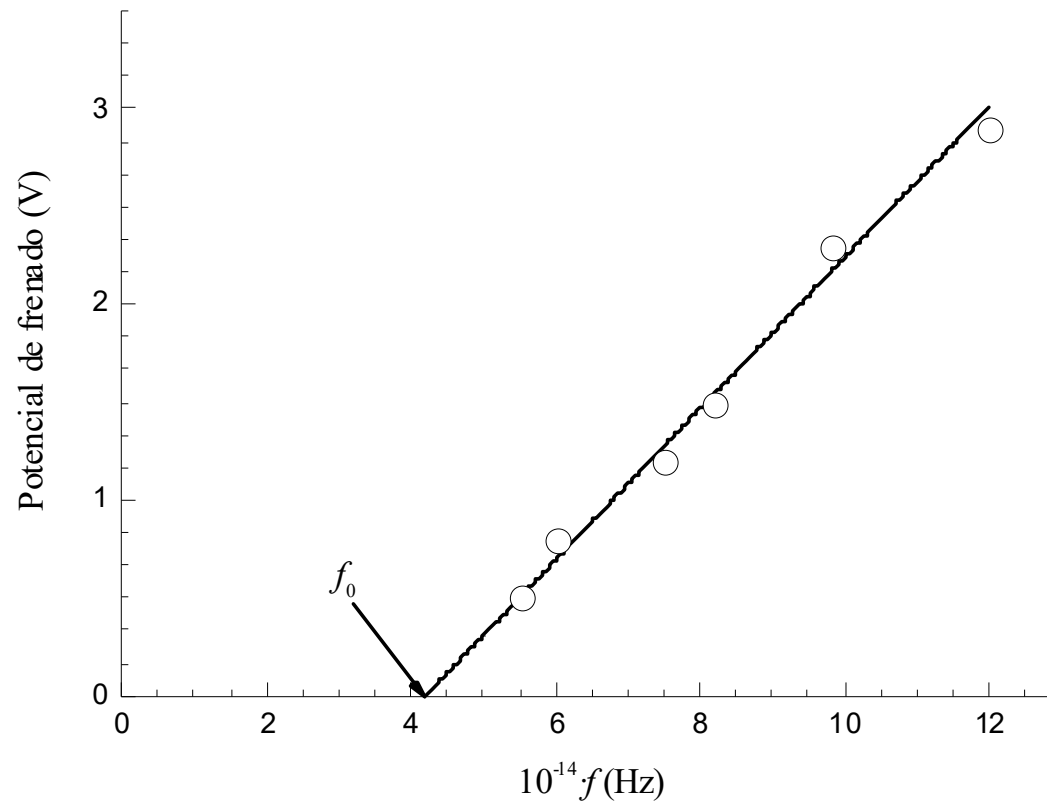








1.- La teoría ondulatoria exige que la amplitud del campo eléctrico de la onda luminosa aumente con la intensidad del haz luminoso y por tanto  $V_0$  debería de ser función de la intensidad luminosa.



Gráfica de las medidas realizadas por Milikan para el potencial de frenado en función de la frecuencia para el caso del sodio. La frecuencia de corte es  $f_0 = 4.39 \cdot 10^{14}$  Hz.

2.- El efecto fotoeléctrico debería ocurrir para cualquier frecuencia tomando en cuenta solo que la intensidad de la luz sea suficientemente grande como para emitir los fotoelectrones.

3.- Si el haz de luz fuese suficientemente débil, debería de existir un tiempo de retraso mensurable entre el instante en el que el haz de luz empieza a incidir sobre la superficie y la expulsión del foto electrón.

- 1.- En 1905 Einstein puso en duda la teoría clásica de la luz.
- 2.- Einstein propuso que la energía radiante estaba cuantizada en paquetes concentrados de energía a los cuales, posteriormente, se les llamó fotones.
- 3.- Los fotones viajan de un lado a otro como ondas clásicas.
- 4.- Einstein centró su interés no en como viajan los fotones sino que primero pensó en como se emiten y como se absorben dichos fotones. Pensó que el requisito de Planck de que la energía contenida en las ondas electromagnéticas de frecuencia  $f$  sólo podía ser  $0, hf, 2hf, \dots$  implicaba necesariamente que en el proceso de ir de un estado de energía  $nhf$  a otro  $(n-1)hf$  la fuente debería emitir pulsos de energía electromagnética discretos con contenido energético  $hf$ . Además supuso que en el efecto fotoeléctrico un fotón debía de ser completamente absorbido por un electrón.

$$E = hf$$

- 5.- Cuando se emite un electrón desde la superficie del metal su energía cinética es:

$$E_c = hf - w \quad \Rightarrow \quad E_c^{\max} = hf - w_0 \quad \longleftarrow \text{Función de trabajo}$$

1.- La teoría ondulatoria exige que la amplitud del campo eléctrico de la onda luminosa aumente con la intensidad del haz luminoso y por tanto  $V_0$  debería de ser función de la intensidad luminosa.

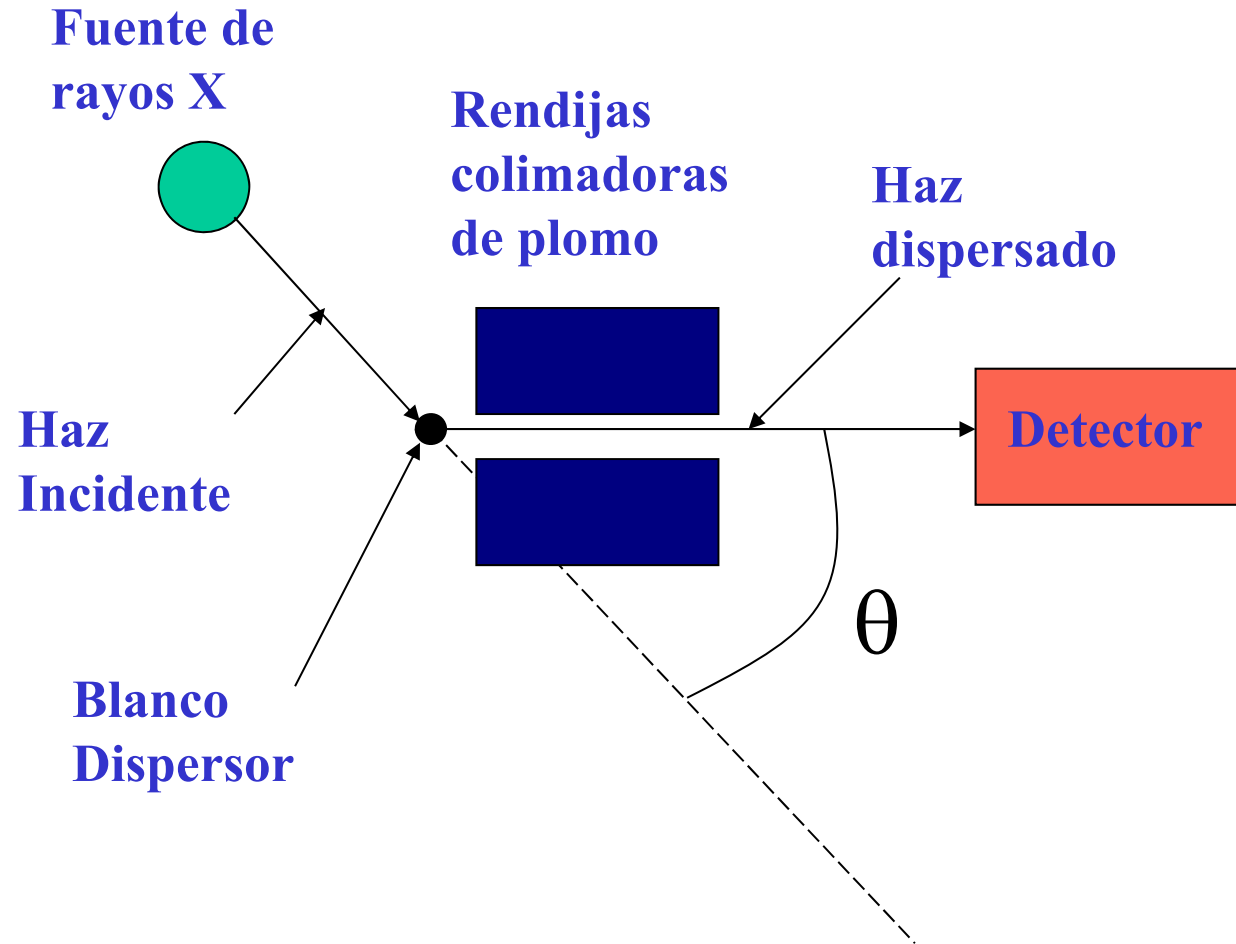
Duplicando la intensidad de luz simplemente se duplica el número de fotones y por tanto la corriente fotoeléctrica. Sin embargo, esto no cambia la energía de los fotones individuales.

2.- El efecto fotoeléctrico debería ocurrir para cualquier frecuencia tomando en cuenta solo que la intensidad de la luz sea suficientemente grande como para emitir los fotoelectrones.

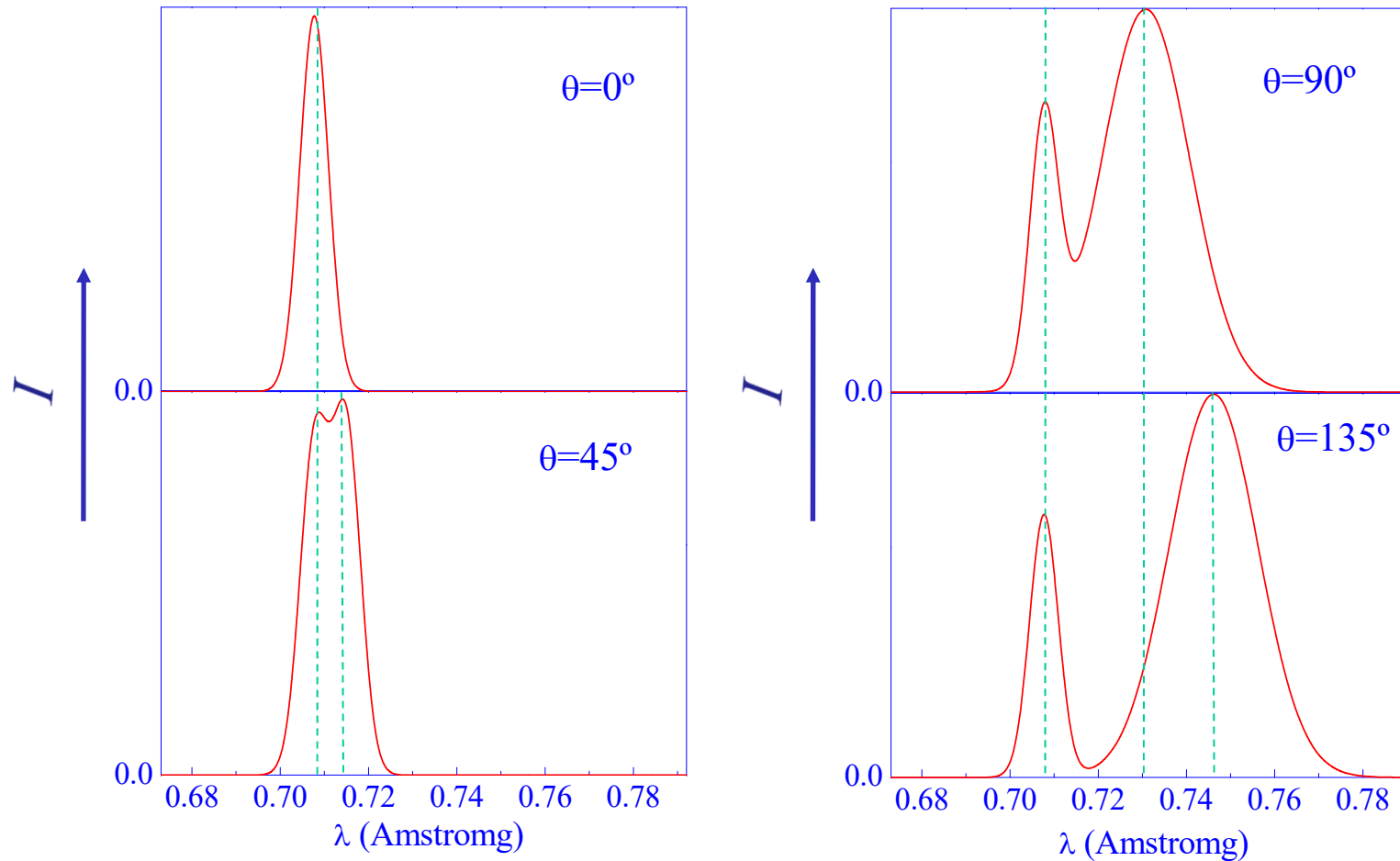
$$hf_0 = w_0$$

$$V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{w_0}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{e} = 3.9 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

3.- Si el haz de luz fuese suficientemente débil, debería de existir un tiempo de retraso mensurable entre el instante en el que el haz de luz empieza a incidir sobre la superficie y la expulsión del fotoelectrón.

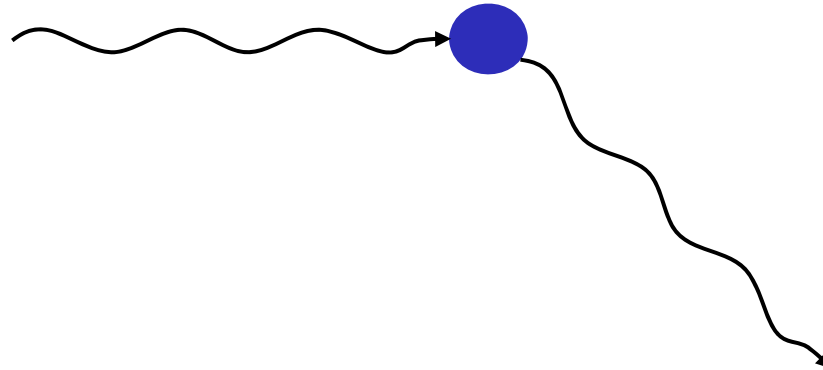


Resultados experimentales



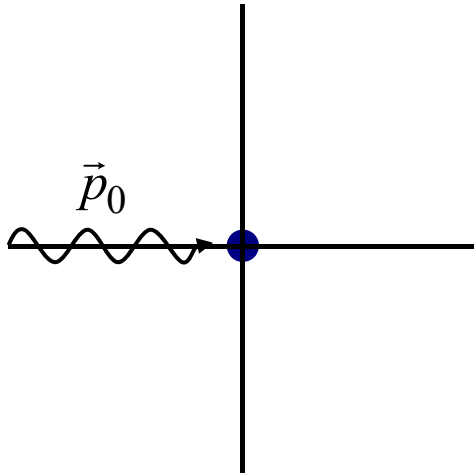
Mediante la Física Clásica no puede explicarse el corrimiento de la longitud de onda que se observa en la frecuencia de mayor intensidad de emisión del haz disperso.

Sin embargo si consideramos que la luz interacciona con la materia como si fuesen partículas con una determinada energía  $hf$  vamos a ver que se reproducen los resultados experimentales.

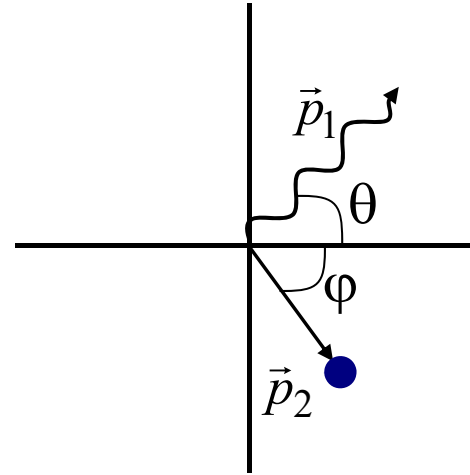




ANTES DEL CHOQUE



DESPUES DEL CHOQUE

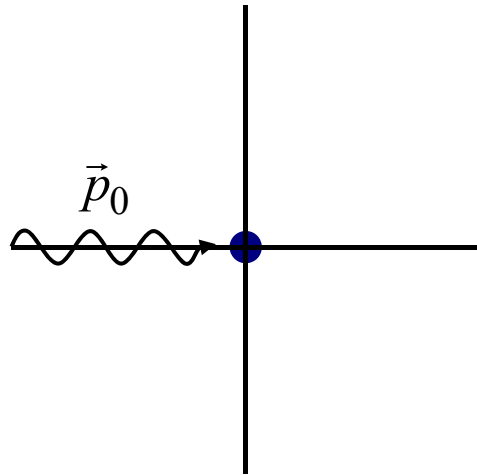


Conservación de la cantidad de movimiento

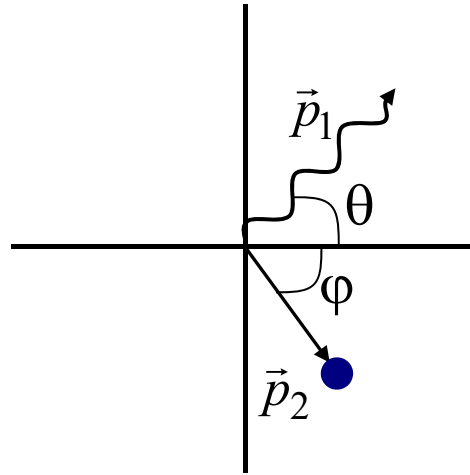
$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \Rightarrow \begin{cases} p_0 = p_1 \cos(\theta) + p_2 \cos(\varphi) \\ p_1 \sin(\theta) = p_2 \sin(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [p_0 - p_1 \cos(\theta)]^2 = [p_2 \cos(\varphi)]^2 \\ [p_1 \sin(\theta)]^2 = [p_2 \sin(\varphi)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0^2 + p_1^2 \cos^2(\theta) - 2p_0 p_1 \cos(\theta) = p_2^2 \cos^2(\varphi) \\ p_1^2 \sin^2(\theta) = p_2^2 \sin^2(\varphi) \end{cases} \Rightarrow p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos(\theta) = p_2^2$$

ANTES DEL CHOQUE



DESPUES DEL CHOQUE



Conservación de la cantidad de movimiento

$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos(\theta) = p_2^2$$

Conservación de la energía

$$E_{\text{Antes del choque}} = E_{\text{Después del choque}} \Rightarrow E_0 + E_{re} = E_1 + E_{re} + K$$

Energía relativista:  $E^2 = p^2c^2 + (m_0c^2)^2$

Energía relativista para un fotón:  $E^2 = p^2c^2 \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Cálculo de la energía cinética a partir de la expresión relativista

$$E^2 = p_2^2c^2 + (m_e c^2)^2 \Rightarrow (K + m_e c^2)^2 = K^2 + (m_e c^2)^2 + 2Km_e c^2 = p_2^2c^2 + (m_e c^2)^2$$

$$\Downarrow$$

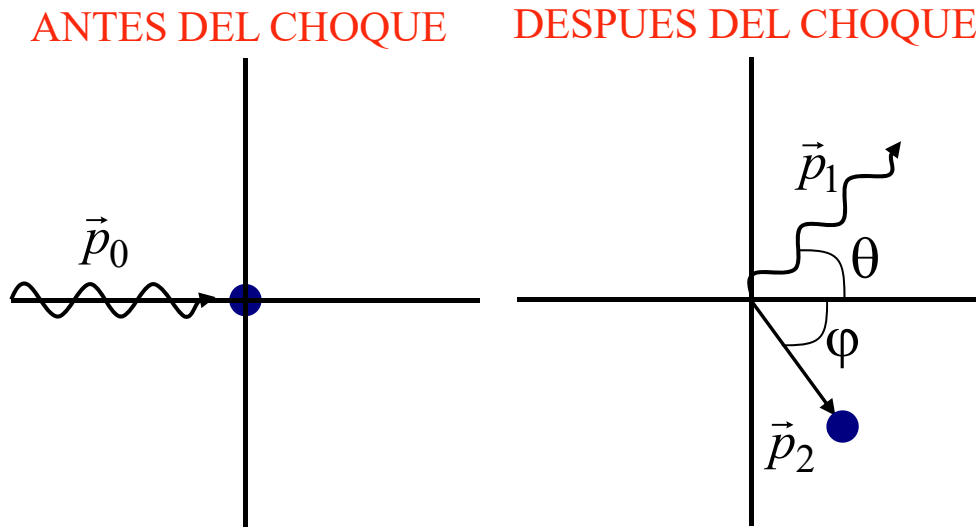
$$K^2 + 2Km_e c^2 = p_2^2c^2$$

$$E = K + m_e c^2$$

$$(p_0 - p_1)^2 + 2(p_0 - p_1)cm_e = p_2^2$$

⇓

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 + 2(p_0 - p_1)cm_e$$



Conservación de la cantidad de movimiento

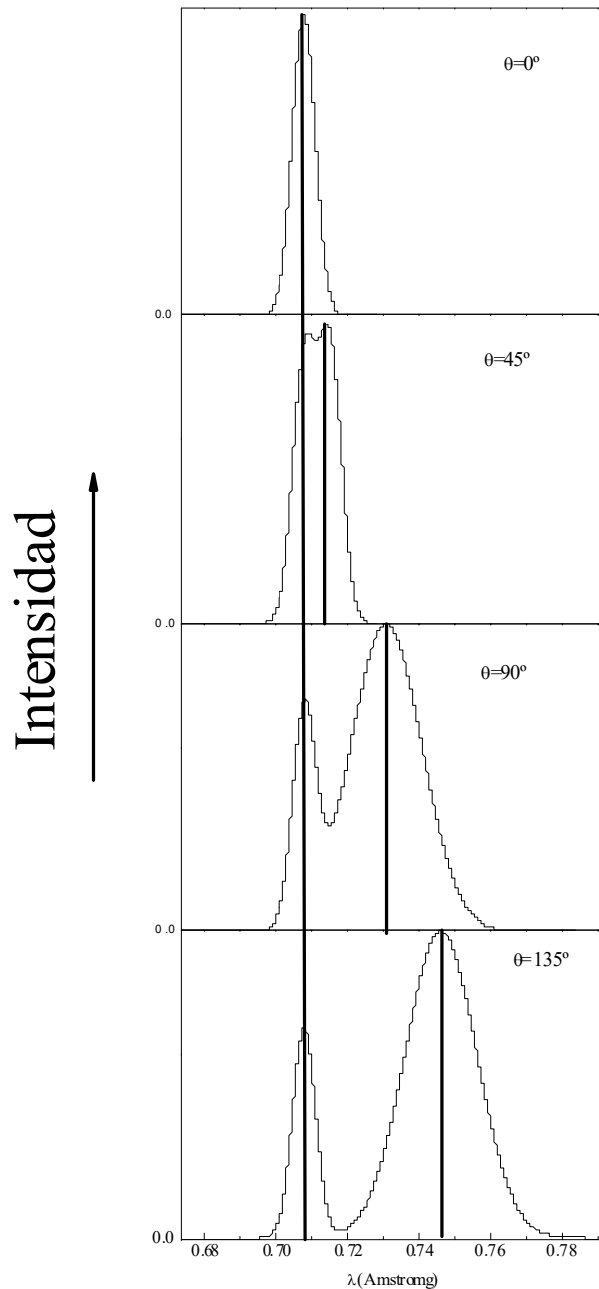
$$p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos(\theta) = p_2^2$$

Conservación de la energía

$$p_2^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 + 2(p_0 - p_1)cm_e$$

$$p_0p_1 [1 - \cos(\theta)] = (p_0 - p_1)cm_e \Rightarrow \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} = \frac{[1 - \cos(\theta)]}{cm_e}$$

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \Delta\lambda = \frac{h[1 - \cos(\theta)]}{cm_e}$$



1.- La expresión obtenida explica que para  $\theta = 0$  no haya corrimiento del haz dispersado.

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \Delta\lambda = \frac{h[1 - \cos(0)]}{cm_e} = 0$$

2.- La expresión obtenida explica que para otros ángulos se observe un pico en longitudes de onda superiores.

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{h[1 - \cos(\theta)]}{cm_e}$$

3.- La expresión obtenida explica que aparezca un pico con igual longitud de onda que el haz incidente.

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \frac{h[1 - \cos(\theta)]}{cm_{\text{núcleo}}} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \lambda_1 \approx \lambda_0$$

$$m_{\text{núcleo}} \uparrow\uparrow\uparrow \Rightarrow \frac{h}{cm_{\text{núcleo}}} < \lambda_0$$

Hasta aquí hemos visto que la radiación electromagnética que se comporta como onda una para transportarse de un sitio a otro y como un corpúsculo para interaccionar con la materia. Además se sabía que los niveles energéticos en los átomos estaban cuantizados (átomo de Born y posteriores).

En 1924, Louis de Broglie propuso, por simetría, la existencia de ondas de materia en la tesis doctoral que presentó en la Universidad de París. Lo original y concienzudo de su tesis fue reconocido inmediatamente, sin embargo, sus ideas fueron consideradas como carentes de realidad física por su aparente falta de evidencias experimentales. Fue Albert Einstein quien reconoció su importancia y validez y atrajo hacia ella la atención de otros físicos. Cinco años después, de Broglie obtuvo el premio Nobel en física, cuando sus ideas fueron experimentalmente confirmadas en forma dramática.

La hipótesis de de Broglie consistía en extender los descubrimientos que se habían realizado en relación con la radiación electromagnética a las partículas materiales, es decir, extender el comportamiento dual onda-partícula exhibido por la radiación electromagnética a la materia. De acuerdo con de Broglie, tanto para la materia como para la radiación, la energía total de un ente  $E$  se relaciona con la frecuencia  $f$  de la onda asociada a su movimiento por medio de la ecuación:

$$E = hf$$

y el impulso  $p$  del ente se relaciona con la longitud de onda  $\lambda$  de la onda asociada por la ecuación:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

¿Cuál será la longitud de onda de una pelota de béisbol de 1 kg que se mueve a 10 m/s?

$$h=6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

¿Cuál será la longitud de onda de un electrón cuya energía cinética es 100 eV?

$$m_e=9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$$

¿Cuál será la longitud de onda de una pelota de béisbol de 1 kg que se mueve a 10 m/s?

$$h=6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \qquad \lambda=6.6 \cdot 10^{-25} \text{ \AA}$$

¿Cuál será la longitud de onda de un electrón cuya energía cinética es 100 eV?

$$m_e=9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$$

¿Cuál será la longitud de onda de una pelota de béisbol de 1 kg que se mueve a 10 m/s?

$$h=6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \qquad \lambda=6.6 \cdot 10^{-25} \text{ \AA}$$

¿Cuál será la longitud de onda de un electrón cuya energía cinética es 100 eV?

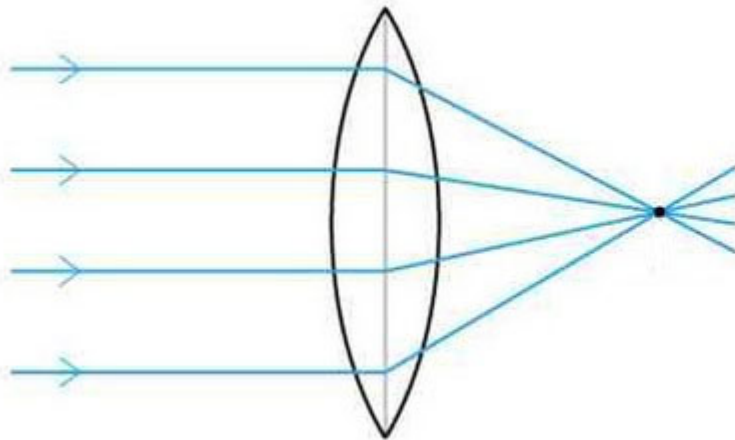
$$m_e=9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \qquad \lambda=1.2 \text{ \AA}$$



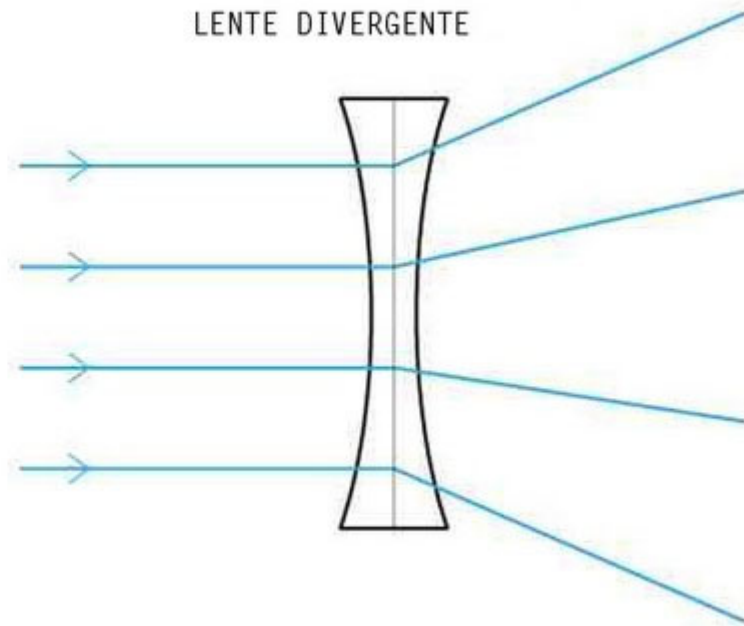


En los experimentos de óptica geométrica, no se manifiesta la naturaleza ondulatoria de la propagación de la luz, ya que, las dimensiones importantes de los aparatos utilizados son muy grandes comparadas con la longitud de onda de la luz. Si se representa por  $a$  una dimensión característica de un aparato óptico (es decir, la amplitud de una lente; espejo o rendija) y  $\lambda$  es la longitud de la onda de la luz que pasa por el aparato, se está en el dominio de la óptica geométrica siempre que  $\lambda / a \rightarrow 0$ . Obsérvese que la óptica geométrica implica la propagación de rayos, que son similares a las trayectorias del movimiento de partículas clásicas.

LENTE CONVERGENTE

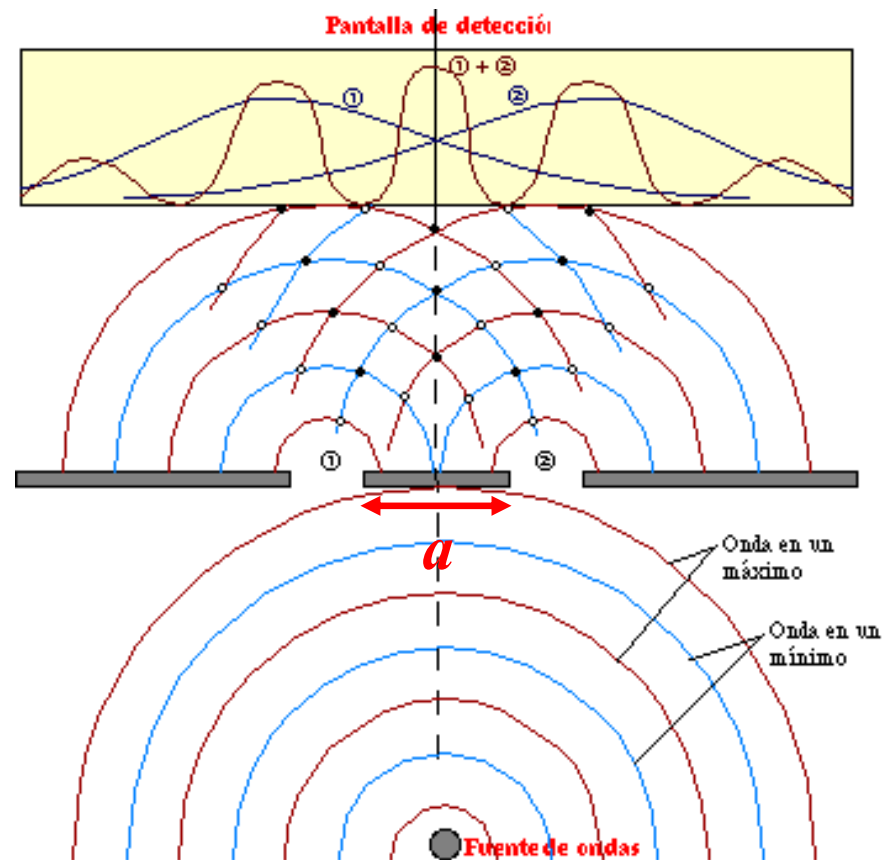


LENTE DIVERGENTE





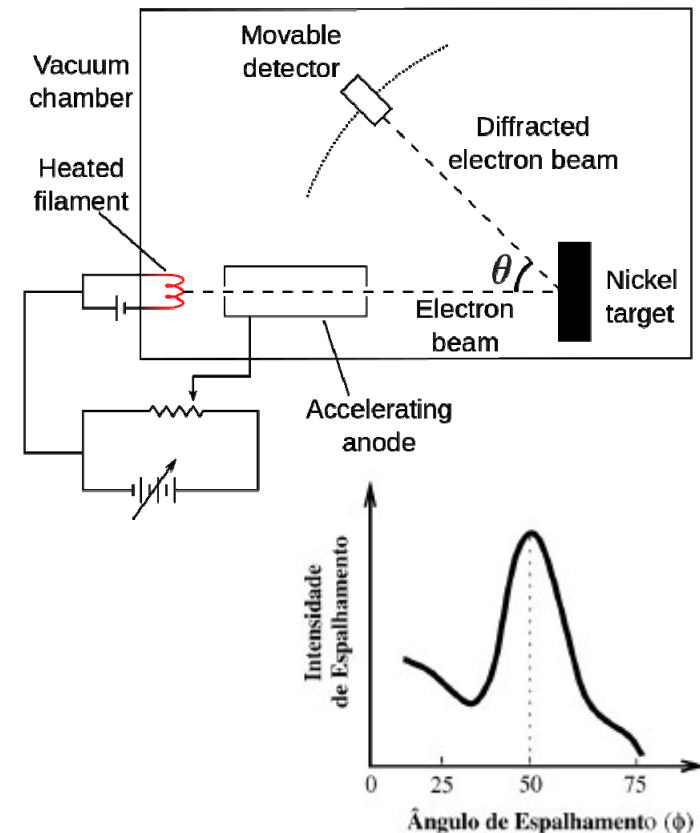
Sin embargo, cuando la dimensión característica de un aparato óptico  $a$  se vuelve comparable con, o menor que, la longitud de onda  $\lambda$  de la luz que pasa por él, se está en el dominio de la óptica física. En este caso  $\lambda/a > 1$ , y el ángulo de difracción  $\theta = \lambda/a$  es suficientemente grande como para que los efectos de difracción sean fácilmente observables y la naturaleza ondulatoria de la luz resulta aparente.





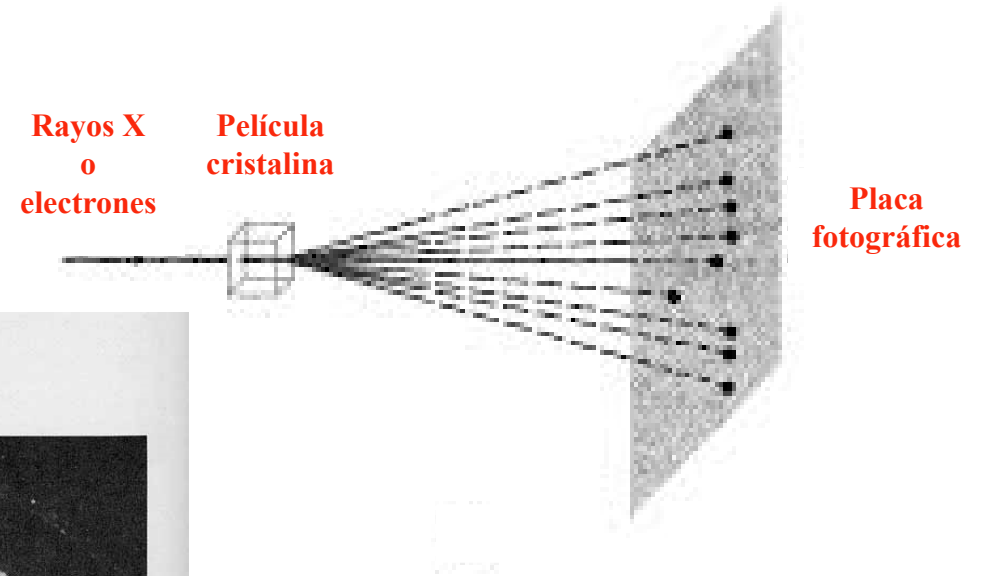
Por lo tanto, para observar características ondulatorias, en el movimiento de materia, se requieren sistemas con aperturas u obstáculos adecuadamente pequeños. Los sistemas de aperturas, en la escala más fina, de que disponían los experimentadores contemporáneos de de Broglie, los constituían los espacios entre planos de átomos adyacentes en un sólido, donde  $a \approx 1 \text{ \AA}$  (en la actualidad se dispone de sistemas que involucran dimensiones nucleares a  $\approx 10^{-4} \text{ \AA}$ ). Es obvio, por tanto, que no podemos esperar detectar ningún comportamiento ondulatorio en el movimiento de un objeto de tamaño normal, donde  $\lambda/a \approx 10^{-25}$ . Sin embargo, para una partícula material con muy poca masa el impulso se reduce y la longitud de onda de de Broglie crece lo suficiente como para que puedan observarse los efectos de difracción.

En 1926, Elsasser propuso que la naturaleza ondulatoria de la materia podía ser probada del mismo modo como inicialmente se probó la naturaleza de los rayos X, a saber, haciendo incidir un haz de electrones, con la energía adecuada, sobre un sólido cristalino. Los átomos del cristal son utilizados como un arreglo tridimensional de centros dispersores para la onda electrónica y, por lo tanto, deberán dispersar fuertemente a los electrones en ciertas direcciones características, de igual forma que en la difracción de rayos X. Esta idea fue confirmada experimentalmente inicialmente por Davisson y Germer en Estados Unidos.

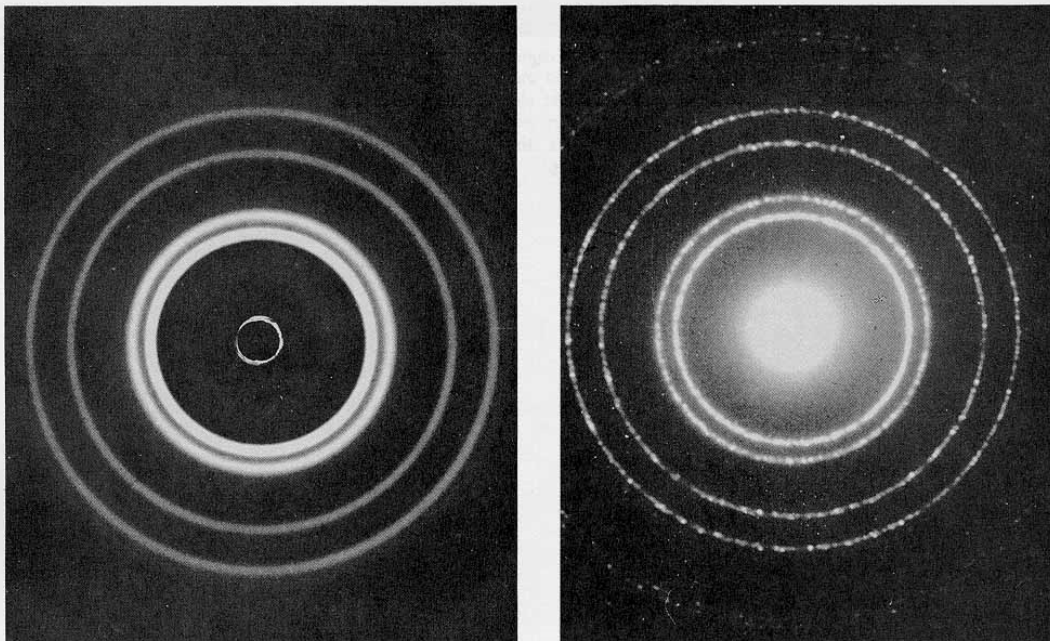




Posteriormente en 1927 G.P. Thomson en Escocia demostró la difracción de haces electrónicos que pasan a través de películas delgadas, confirmando independientemente y en detalle, la relación de de Broglie  $\lambda = h/p$ .



The diffraction pattern on the left was made by a beam of x rays passing through thin aluminum foil. The diffraction pattern on the right was made by a beam of electrons passing through the same foil.





## **RESUMEN DE LO VISTO HASTA EL MOMENTO**

Física clásica:

La energía puede ser transportada por partículas y ondas y, por tanto, cualquier ente observable debe ser una cosa u otra.

Física cuántica:

Cualquier ente observable presenta un comportamiento dual: se transporta como una onda e interacciona como un corpúsculo.

La comprobación de la naturaleza ondulatoria imposibilita probar la naturaleza corpuscular y viceversa => Principio de incertidumbre de Heisenberg (Gato de Schrodinger).



## RESUMEN DE LO VISTO HASTA EL MOMENTO

Por un lado, la naturaleza corpuscular de la materia es clara y la naturaleza corpuscular de las ondas electromagnéticas ha quedado también determinada con la inclusión del concepto de fotón.

Por otro, la naturaleza ondulatoria de las ondas electromagnéticas viene dada por las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$$

Sin embargo, todavía no hemos cuantificado la naturaleza ondulatoria de la materia, es decir, todavía no tenemos una ecuación que nos permita obtener una ecuación de onda que contenga toda la información del movimiento de un sistema material.



Es cierto que los experimentos considerados (tales como partículas libres u osciladores armónicos simples, etc.) se pueden analizar con procedimientos sencillos (que involucran la aplicación directa del postulado de de Broglie, postulado de Planck, etc.). Pero ciertamente es deseable el estar preparado para tratar los casos más complicados que ocurren en la naturaleza (en concreto nosotros estamos interesados en conocer el modelo cuántico de un sólido cristalino). Para hacer esto se deberá tener un procedimiento más general que se pueda utilizar para tratar el comportamiento de las partículas de cualquier sistema microscópico. La teoría de Schrödinger de la mecánica cuántica proporciona tal procedimiento.

Esta teoría especifica las leyes del movimiento ondulatorio que obedecen las partículas de cualquier sistema microscópico. Lo cual se hace especificando, para cada sistema, la ecuación que controla el comportamiento de la función de onda y especificando también la conexión entre el comportamiento de la función de onda y el comportamiento de la partícula. La teoría es una extensión del postulado de la hipótesis de Broglie. Más aún, existe una estrecha relación entre ella y la teoría de Newton del movimiento de partículas en sistemas macroscópicos. La teoría de Schrödinger es una generalización que incluye a la teoría de Newton como caso especial (en el límite macroscópico), de la misma manera que la teoría de Einstein de la relatividad es una generalización que incluye a la teoría de Newton como un caso especial (en el límite de velocidades bajas).



El primer problema que se presenta no es cómo resolver cierta ecuación diferencial; sino que el problema es cómo encontrar la ecuación. Esto es, se está en la posición de Newton cuando estaba buscando la ecuación diferencial:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

que es la ecuación básica de la mecánica clásica, o de Maxwell cuando buscaba las ecuaciones diferenciales

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_e}$$

que forman la base del electromagnetismo clásico.

La ecuación de onda para una cuerda tensa se puede derivar de la ley de Newton y la ecuación de onda electromagnética se puede derivar de las ecuaciones de Maxwell; pero no se puede esperar ser capaces de derivar la ecuación de onda de la mecánica cuántica de ninguna de las ecuaciones de la física clásica. Sin embargo, se puede esperar alguna ayuda de los postulados de de Broglie-Einstein.

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad f = \frac{E}{h};$$





Esto es, se buscará que la ecuación de onda de la mecánica cuántica sea congruente con estos postulados y se utilizará este requisito de coincidencia en esta investigación. Las ecuaciones anteriores más otras que se tendrán razones para aceptar, desembocarán en un argumento que está planeado para hacer que la ecuación de onda mecánico-cuántica parezca posible, pero deberá hacerse énfasis que este argumento de plausibilidad no constituye una derivación. En el análisis final, la ecuación de onda mecánico cuántica deberá obtenerse de un postulado, cuya justificación no es el que haya sido deducida por completo a partir de la información experimental ya conocida, sino que predice correctamente los resultados que se pueden verificar experimentalmente.



## ARGUMENTOS DE PARTIDA

1.- Deberá ser coincidente con los postulados de de Broglie-Einstein.

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad f = \frac{E}{h};$$

2.- Deberá ser coincidente con la ecuación

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

que relaciona la energía total E de una partícula de masa m con su energía cinética  $p^2/(2m)$  y su energía potencial V.

3.- Deberá ser lineal en  $\Psi(x,t)$ . Esto es, si  $\Psi_1(x,t)$  y  $\Psi_2(x,t)$  son dos soluciones diferentes a la ecuación para una energía potencial dada V, entonces cualquier combinación lineal arbitraria de estas soluciones también debe de serlo.

4.- La energía potencial V generalmente es una función de x y posiblemente de t. Sin embargo, existe un caso especial importante cuando  $V(x,t) = V_0$  que es justamente el caso de una partícula libre ya que la fuerza que actúa sobre la partícula está dada por

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}, t) \Rightarrow F_x = -\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}$$

lo cual produce una fuerza nula si el potencial es constante.



En este caso la ley de Newton del movimiento afirma que el impulso lineal  $p$  de la partícula será constante y también se sabe que su energía total  $E$  será constante. Aquí se tiene la situación de una partícula libre con valores constantes de  $\lambda = h/p$  y  $f = E/h$ , y se supondrá que la ecuación diferencial deseada tendrá como soluciones ondas sinusoidales viajeras de longitud y frecuencia constantes del tipo

$$\Psi(x, t) = \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - f \cdot t \right) \right]$$

Utilizando las relaciones de de Broglie-Einstein de la suposición 1, para escribir la ecuación de energía de la suposición 2 en términos de  $\lambda$  y  $f$ , se obtiene

$$h \cdot f = \frac{h^2}{2m\lambda^2} + V$$

Antes de continuar resulta conveniente introducir las cantidades

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \omega = 2\pi f$$

A la cantidad  $k$  se le denomina número de onda y a la cantidad  $\omega$  frecuencia angular. Introduciéndolas se obtiene

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V; \quad \text{con} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$



Para satisfacer la suposición de linealidad es necesario que cada término en la ecuación diferencial sea lineal en  $\Psi(x,t)$ , es decir, sea proporcional a la primera potencia de  $\Psi(x,t)$ . Obsérvese que cualquier derivada de  $\Psi(x,t)$  tiene esta propiedad. Por ejemplo, si se considera el cambio en la magnitud de  $\partial^2\Psi(x,t)/\partial x^2$  que resulta de cambiar la magnitud de  $\Psi(x,t)$ , digamos por un factor  $c$ , se ve que la derivada aumenta por el mismo factor y por lo tanto es proporcional a la primera potencia de la función. Lo cual es cierto ya que

$$\frac{\partial^2 [c\Psi(x,t)]}{\partial x^2} = c \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

donde  $c$  es cualquier constante. Para que la ecuación diferencial misma sea lineal en  $\Psi(x,t)$  no deberá contener ningún término que sea independiente de  $\Psi(x,t)$ , es decir, que sea proporcional a  $[\Psi(x,t)]^0$ , o proporcional a  $[\Psi(x,t)]^2$  o a cualquier potencia superior. Después de obtener la ecuación se demostrará explícitamente que ésta es lineal en  $\Psi(x,t)$ , y en este proceso será evidente la validez de estas suposiciones.



A continuación se utilizará la suposición 4 que trata con la forma de la solución de la partícula libre; como se sugiere, primero se tratará de escribir una ecuación que contenga una función de onda sinusoidal y/o derivadas de la función de onda.

Si evaluamos algunas de las derivadas de la función sinusoidal

$$\Psi(x, t) = \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - f \cdot t \right) \right] = \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \sin(kx - \omega t)}{\partial x} = k \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial k \cos(kx - \omega t)}{\partial x} = -k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 \Psi(x, t)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \sin(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega \cos(kx - \omega t)$$



Observándolas se ve que el efecto de tomar la segunda derivada del espacio es introducir un factor  $-k^2$  y el efecto de tomar la primera derivada en el tiempo es introducir un factor  $-\omega$ . Ya que se espera que la ecuación diferencial sea consistente según las dos primeras hipótesis con

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V$$
$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\omega \cos(kx - \omega t)$$

que contiene un factor  $k^2$  en un término y un factor  $\omega$  en otro, se sugiere que la ecuación diferencial deberá contener una segunda derivada espacial de  $\Psi(x,t)$  y una primera derivada temporal de  $\Psi(x,t)$ . Pero también deberá haber un término que contenga un factor de  $V(x,t)$  ya que éste aparece en la anterior expresión. Para asegurar la linealidad, este término deberá contener un factor de  $\Psi(x,t)$ . Uniendo todas estas ideas se intentará la siguiente forma para la ecuación diferencial:

$$\alpha \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = \beta \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  tienen valores a determinar y se utilizan para dar la flexibilidad que, se supone, será necesaria para que la ecuación anterior satisfaga los distintos requisitos.



En general la forma de la ecuación obtenida parece razonable, pero ¿funcionará en detalle? Para responderlo vamos a considerar el caso de un potencial constante  $V(x,t) = V_0$ , y evaluar  $\Psi(x,t)$  y sus derivadas. Si hacemos esto obtenemos,

$$-\alpha k^2 \sin(kx - \omega t) + V_0 \sin(kx - \omega t) = -\beta \omega \cos(kx - \omega t)$$

A pesar de que las constantes están a nuestra disposición, no es posible satisfacer la ecuación y las suposiciones excepto para combinaciones especiales de las variables independientes  $x$  y  $t$  para las cuales  $\sin(kx - \omega t) = \cos(kx - \omega t)$ .

La dificultad surge debido a los cambios de cosenos en senos y viceversa provenientes de la diferenciación. Este hecho sugiere que para la función de onda de la partícula libre se utilice en vez de la sinusoidal simple, la combinación

$$\Psi(x,t) = \cos(kx - \omega t) + \gamma \sin(kx - \omega t)$$

donde  $\gamma$  es una constante de valor indeterminado por el momento y que se introduce con el propósito de proporcionar una flexibilidad adicional. Se espera encontrar la mezcla apropiada de cosenos y senos que eliminen la dificultad. Evaluando las derivadas necesarias se obtiene:

$$[\beta \gamma \omega + V_0 - \alpha k^2] \cos(kx - \omega t) + [V_0 \gamma - \gamma \alpha k^2 - \beta \omega] \sin(kx - \omega t) = 0$$



Para que la ecuación anterior tenga solución para cualesquiera valores de  $x$  y  $t$  los coeficientes que acompañan al seno y al coseno se tienen que anular, es decir

$$-\alpha k^2 + V_0 = -\beta\gamma\omega$$

$$-\alpha k^2 + V_0 = \frac{\beta\omega}{\gamma}$$

Restando ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{\beta\omega}{\gamma} + \beta\gamma\omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} + \gamma = 0 \Rightarrow 1 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Sustituyendo en la primera ecuación llegamos a:

$$-\alpha k^2 + V_0 = \mp\beta i\omega$$

que se puede comparar directamente con:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega$$

para obtener:

$$\alpha = -\frac{\hbar^2}{2m}; \quad \beta = \mp\frac{\hbar}{i} = \pm i\hbar$$

La elección que se haga del signo en la anterior expresión no es importante por lo que se seguirá la convención de escoger el signo más.





Sustituyendo el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  en la ecuación inicial llegamos a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Esta ecuación diferencial satisface las cuatro suposiciones hechas para la ecuación de onda mecánico-cuántica y se conoce como ecuación de Schrödinger en una dimensión.

Deben de hacerse una serie de consideraciones sobre la ecuación de onda obtenida:

1.- Hemos llegado a la ecuación tratando un caso especial: el caso de una partícula libre. La comprobación de que esta ecuación es válida para cualquier potencial pero escapa al nivel introductorio que nos hemos propuesto del tema.

2.- Ni que decir tiene que Schrödinger llegó a su ecuación mediante un argumento diferente a éste (y más esotérico) aunque en esencia utiliza las ideas que hemos expuesto aquí. Además la ecuación la obtuvo para la situación tridimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r},t) \right] \Psi(\vec{r},t) = H\Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t}$$



3.- La ecuación de Schrödinger no es válida cuando se aplica a partículas que se mueven a velocidades relativistas. Esto es así, ya que la ecuación se obtuvo a partir de la definición clásica de la energía que es correcta para velocidades comparables con la velocidad de la luz. En 1928 Dirac desarrolló una teoría relativista de la mecánica cuántica utilizando esencialmente los mismos postulados de la teoría de Schrödinger, excepto que substituyó la definición de energía por su análogo relativista

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2} + V$$



En mecánica clásica se definen de inicio lo que se conoce como magnitudes cinemáticas (vectores posición, velocidad, y aceleración fundamentalmente) que permiten describir el movimiento de cualquier sistema y, posteriormente, la dinámica trata de establecer las ecuaciones (fundamentalmente las leyes de Newton) que permiten calcular dichas magnitudes.

En mecánica cuántica se siguió un proceso inverso. Primero se determinó que todos los entes observables en la naturaleza presentaban una dualidad onda-corpúsculo y a continuación se estableció (como acabamos de ver) la ecuación de onda fundamental (ecuación de Schrödinger) para una partícula material. Sin embargo todavía nos queda relacionar la función de onda para cualquier sistema de partículas, que nos da la ecuación de Schrödinger, con el movimiento de la misma.

Esto supone, quizás, el cambio de mentalidad más grande que hay que asumir para pasar de la mecánica clásica a la mecánica cuántica.

Para desarrollar este apartado de una forma estricta habría que haber tratado de forma mucho mas profunda el principio de incertidumbre. Vamos simplemente a dar una visión conceptual del significado de la función de onda y su interpretación.



Como vimos de forma cualitativa, el principio de incertidumbre de Heisenberg parte del hecho experimental de no poder observar a la vez la naturaleza ondulatoria y corpuscular de cualquier ente de la naturaleza. Puesto que para poder comprobar la naturaleza ondulatoria habría que interaccionar con el sistema y dicha interacción sería de tipo corpuscular y viceversa. Esto, desde un punto de vista práctico se traduce en que no podemos medir con precisión a la vez la posición y la energía de un sistema.

Esta falta de precisión en la posición que ocupa en cada instante de tiempo el sistema hace que se tengan que cambiar los conceptos bien establecidos en mecánica clásica de posición, velocidad, y aceleración, y contentarnos con establecer la probabilidad de encontrar en una determinada región del espacio en un instante determinado de tiempo el sistema material.

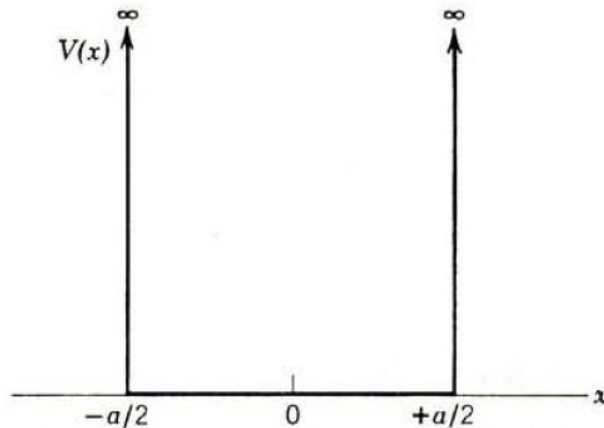
La función de onda está precisamente relacionada con esta probabilidad espacial, de forma que si la ecuación de onda de un determinado sistema material es  $\Psi(x,t)$  la probabilidad de encontrar a la partícula entre  $x$  y  $x+dx$  viene dada por

$$P = |\Psi(x)|^2 dx$$



### Aplicación de la ecuación de Schrödinger

Resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula que se mueve en un potencial de pozo infinito.



$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} = E \Psi(x) \quad \text{Si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

La solución de esta ecuación es:

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad \text{con } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Como la partícula no puede escapar del pozo de potencial, la función de onda se tiene que anular en  $+a/2$  y  $-a/2$ , es decir

|                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Para } x = -\frac{a}{2} \Rightarrow A \sin\left(-\frac{ka}{2}\right) + B \cos\left(-\frac{ka}{2}\right) = 0$ $\text{Para } x = \frac{a}{2} \Rightarrow A \sin\left(\frac{ka}{2}\right) + B \cos\left(\frac{ka}{2}\right) = 0$ | $\left  \begin{array}{l} \text{No existe ningún valor que} \\ \text{haga que se anulen a la vez el} \\ \text{seno y coseno (la única} \\ \text{solución posible sería la trivial} \\ \text{A=B=0).} \end{array} \right.$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



### Aplicación de la ecuación de Schrödinger

La soluciones tienen, por tanto, que ser del tipo:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= A \sin(kx) \\ &\text{o} \\ \Psi(x) &= B \cos(kx) \end{aligned} \quad \text{con } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Aplicando las condiciones de contorno llegamos a:

$$A \sin\left(-\frac{ka}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{ka}{2} = n\pi \Rightarrow E_{n_1} = \frac{2\pi^2\hbar^2 n_1^2}{ma^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} (2n_1)^2 \quad \forall n_1 > 0$$

$$B \cos\left(-\frac{ka}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow E_{n_1} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} (1 + 2n_1)^2 \quad \forall n_1 > 0$$

Esta soluciones se pueden escribir de forma más compacta como sigue:

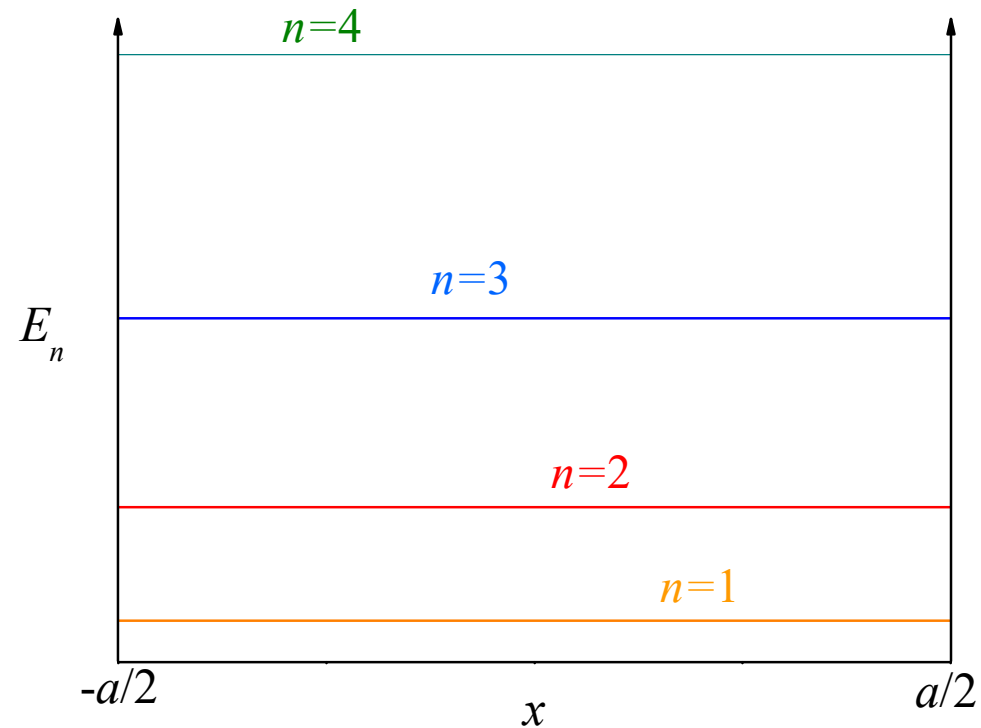
$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad \forall n > 0; \quad \Psi(x) = \begin{cases} A \sin(k_n x) & \text{Si } n \text{ es par} \\ B \cos(k_n x) & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$



## Aplicación de la ecuación de Schrödinger

Por tanto, las posibles energías de la partícula están cuantizadas:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2} \quad \forall n > 0$$





### *Aplicación de la ecuación de Schrödinger*

Por otro lado, para hallar las constantes A y B utilizamos que la probabilidad de encontrar la partícula en algún lugar del pozo tiene que ser igual a uno.

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin(k_n x) & \text{Si } n \text{ es par} \\ B \cos(k_n x) & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A^2 \sin^2(k_n x) dx = 1 \Rightarrow \frac{n A^2}{2 k_n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(z) dz = \frac{n A^2}{2 k_n} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(z) dz \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$z = k_n x$

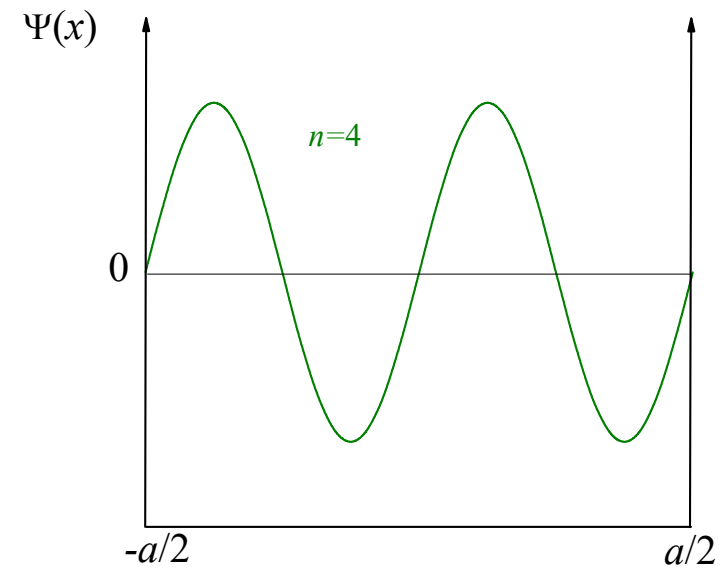
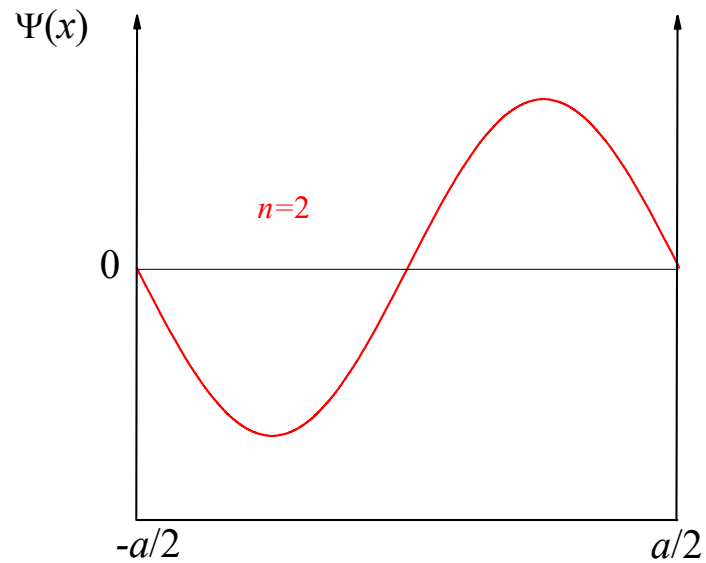
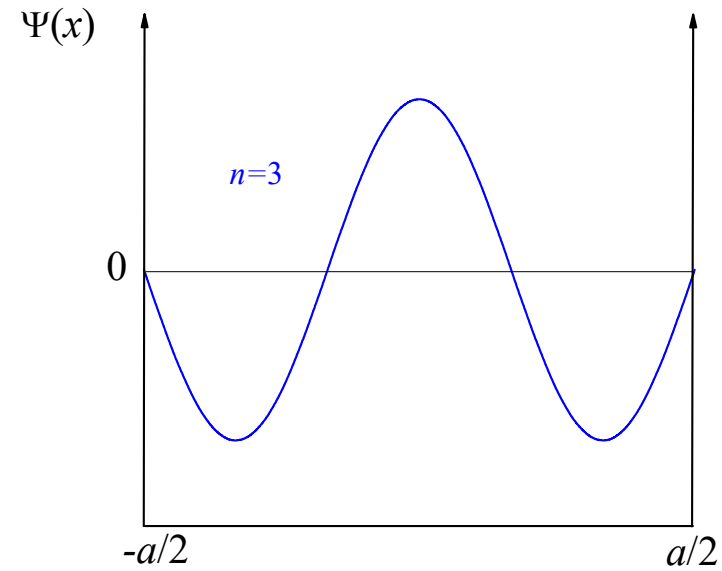
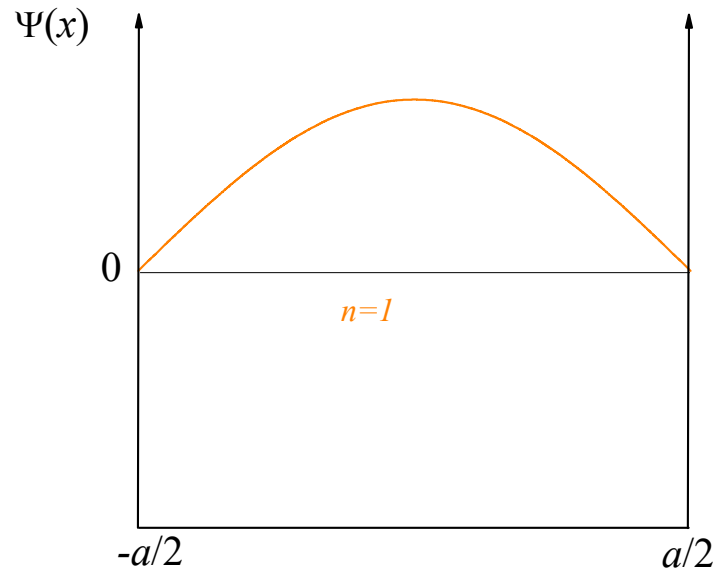
$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} B^2 \cos^2(k_n x) dx = 1 \Rightarrow 2n \frac{B^2}{k_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(z) dz = \frac{B^2}{k_n} \frac{\pi n}{2} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$z = k_n x$





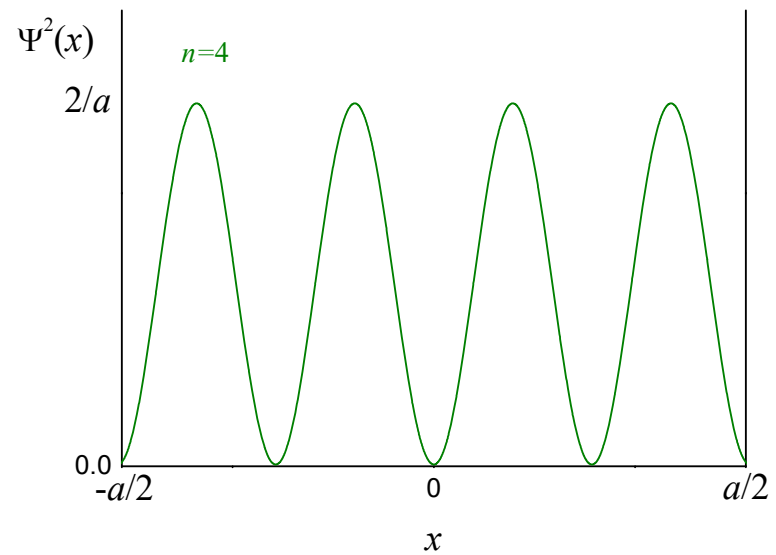
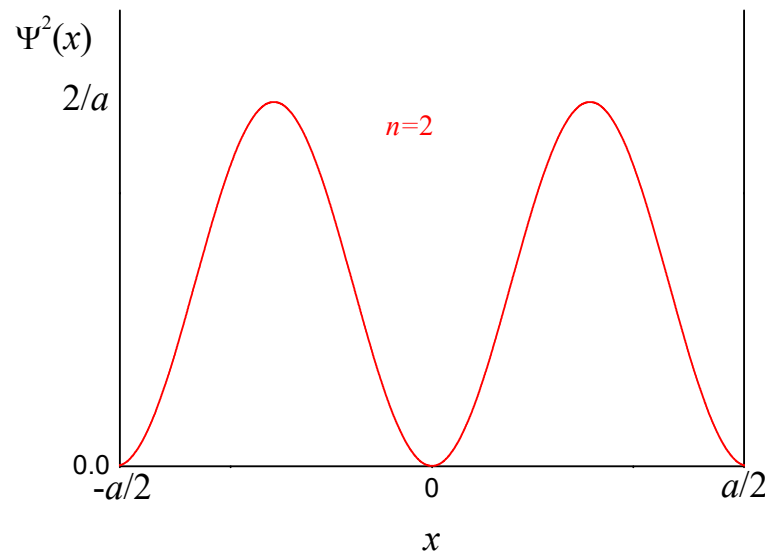
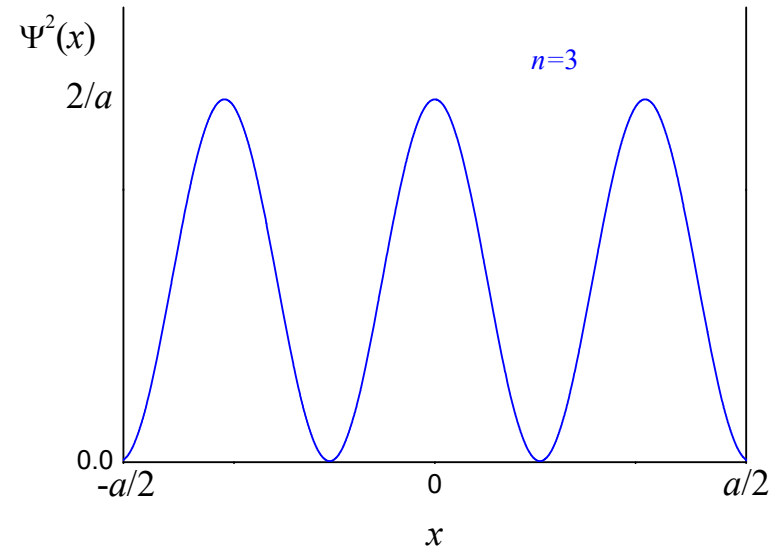
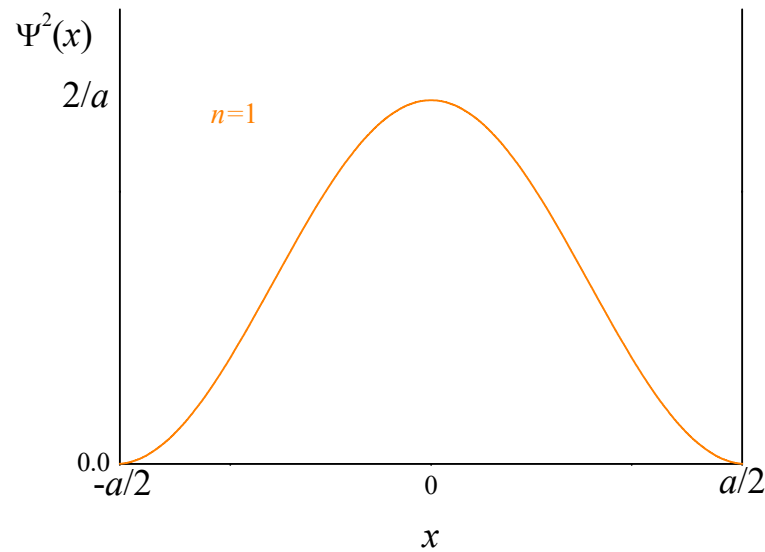
### Aplicación de la ecuación de Schrödinger



Primeras 4 funciones de onda solución de la ecuación de Schrödinger para un potencial pozo infinito.



### Aplicación de la ecuación de Schrödinger



Probabilidad de encontrar a la partícula dentro del pozo de potencial para los primeros 4 niveles energéticos

## Modelos atómicos. Modelo mecano-cuánticos del átomo de hidrógeno.



Si queremos aplicar la teoría cuántica al átomo más sencillo que existe, el de hidrógeno, tendríamos que considerar que el potencial al que está sometido el único electrón que lo forma está dado por:

$$V(\vec{r}) = V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

La obtención de la solución de la ecuación de Schrödinger en este caso se complica muchísimo, pudiendo demostrarse que es de la forma:

$$\Psi(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

Polinomios asociados de Laguerre

donde

$$R_{nl}(r) = -\left(\frac{2}{na_0}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+1)!]^3}} \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$L_{n+l}^{2l+1}(x) = \exp(x)x^{-2l-1} \frac{d^{n+l}}{dx^{n+l}} (\exp(-x)x^{n+3l+1})$$

$$a_0 = 0.529 \text{ \AA}$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \exp(im\varphi) P_l^m(\cos(\theta)) \Rightarrow \text{Armónico esférico}$$

Polinomios asociados de Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Las soluciones dependen de tres números cuánticos  $n, l, m$ .

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leq l \leq n-1 \\ -l \leq m \leq l \end{array} \right.$$



Como en el caso anterior, los niveles energéticos están cuantizados, dependen solamente de un número cuántico,  $n$ , y vienen dados por la expresión:

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2}$$



### Propiedades más significativas de los estados energéticos:

- Todos los niveles tienen energía negativa: estados ligados.
- A medida que  $n$  aumenta la separación entre niveles disminuye.
- El valor de energía cero corresponde al límite de la ionización del átomo:
- La energía de un nivel cambiada de signo es igual al potencial de ionización para ese nivel (13,6 eV para el estado fundamental).
- El valor de energía cero corresponde, pues, a la transición entre los estados ligados y no ligados.
- En los estados ligados la energía está cuantizada y por tanto el espectro es discreto.
- En los estados no ligados la energía no está cuantizada y el espectro es continuo.



Que la energía de los estados del electrón dependan sólo del número cuántico principal,  $n$ , implica que existen estados que aún siendo diferentes, debido a que los números cuánticos  $l$  y  $m$  son diferentes, tienen la misma energía. A los estados cuánticos con igual energía y diferentes números cuánticos se les conoce con el nombre de estados degenerados. En la tabla se muestra la degeneración de los primeros estados cuánticos de átomo de hidrógeno.

| $n$ | $l$ | Tipo de orbital | $m$                   | $g_n$ | $E_n$          |
|-----|-----|-----------------|-----------------------|-------|----------------|
| 1   | 0   | $s$             | 0                     | 1     | $-e^2/(2a_0)$  |
| 2   | 0   | $s$             | 0                     | 4     | $-e^2/(8a_0)$  |
| 2   | 1   | $p$             | -1,0,1                |       |                |
| 3   | 0   | $s$             | 0                     | 9     | $-e^2/(18a_0)$ |
| 3   | 1   | $p$             | -1,0,1                |       |                |
| 3   | 2   | $d$             | -2,-1,0,1,2           |       |                |
| 4   | 0   | $s$             | 0                     | 16    | $-e^2/(32a_0)$ |
| 4   | 1   | $p$             | -1,0,1                |       |                |
| 4   | 2   | $d$             | -2,-1,0,1,2           |       |                |
| 4   | 3   | $f$             | -3,-2,-1,0,1,2,3      |       |                |
| 5   | 0   | $s$             | 0                     | 25    | $-e^2/(50a_0)$ |
| 5   | 1   | $p$             | -1,0,1                |       |                |
| 5   | 2   | $d$             | -2,-1,0,1,2           |       |                |
| 5   | 3   | $f$             | -3,-2,-1,0,1,2,3      |       |                |
| 5   | 4   | $g$             | -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4 |       |                |



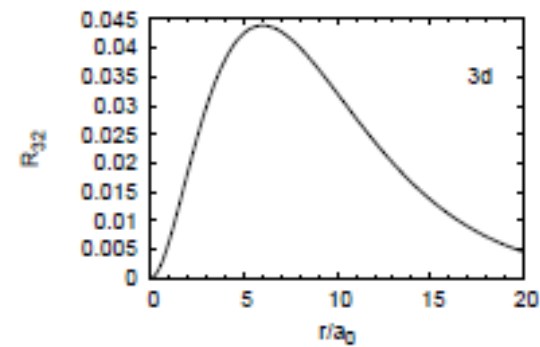
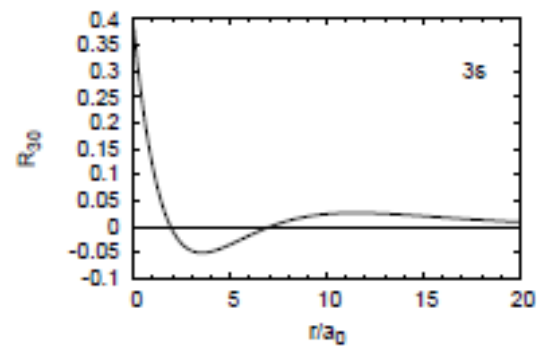
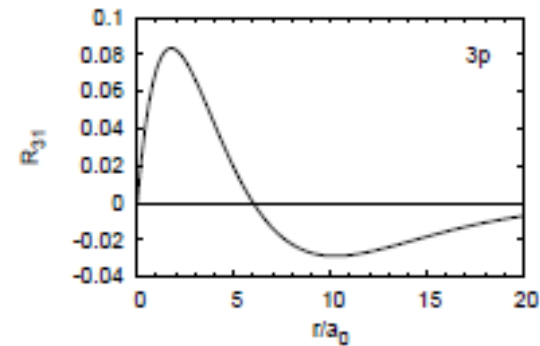
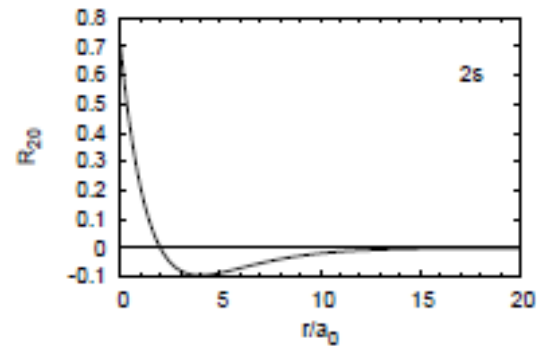
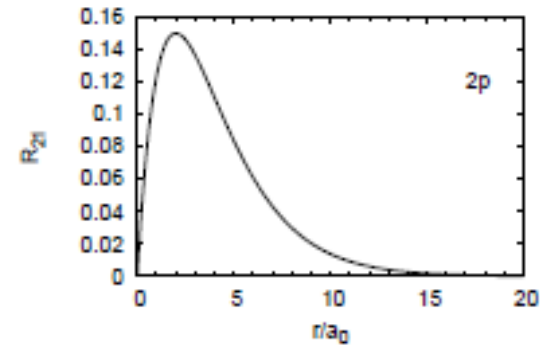
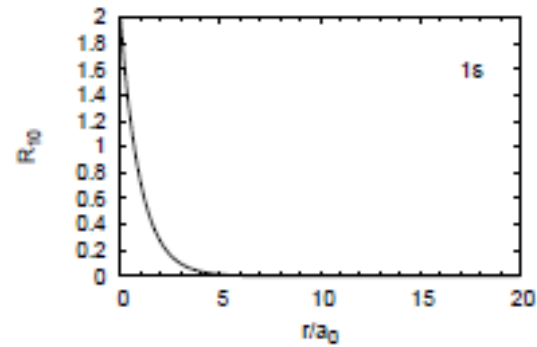
Funciones de onda radiales  $R_{nl}$  de átomos hidrogenoides

| Designación | $n$ | $l$ | $R_{nl}(r)^a$                                                           |
|-------------|-----|-----|-------------------------------------------------------------------------|
| 1s          | 1   | 0   | $(Z/a_0)^{3/2} 2 \exp(-\rho/2)$                                         |
| 2s          | 2   | 0   | $(Z/a_0)^{3/2} 8^{-1/2} (2 - \rho) \exp(-\rho/2)$                       |
| 2p          | 2   | 1   | $(Z/a_0)^{3/2} 24^{-1/2} \rho \exp(-\rho/2)$                            |
| 3s          | 3   | 0   | $(Z/a_0)^{3/2} 243^{-1/2} (6 - 6\rho + \rho^2) \exp(-\rho/2)$           |
| 3p          | 3   | 1   | $(Z/a_0)^{3/2} 486^{-1/2} (4 - \rho) \rho \exp(-\rho/2)$                |
| 3d          | 3   | 2   | $(Z/a_0)^{3/2} 2430^{-1/2} \rho^2 \exp(-\rho/2)$                        |
| 4s          | 4   | 0   | $(Z/a_0)^{3/2} 96^{-1} (24 - 36\rho + 12\rho^2 - \rho^3) \exp(-\rho/2)$ |
| 4p          | 4   | 1   | $(Z/a_0)^{3/2} 15360^{-1/2} (20 - 10\rho + \rho^2) \rho \exp(-\rho/2)$  |
| 4d          | 4   | 2   | $(Z/a_0)^{3/2} 46080^{-1/2} (6 - \rho) \rho^2 \exp(-\rho/2)$            |
| 4f          | 4   | 3   | $(Z/a_0)^{3/2} 322560^{-1/2} \rho^3 \exp(-\rho/2)$                      |

<sup>a</sup>  $\rho = 2Zr/(na_0)$ .



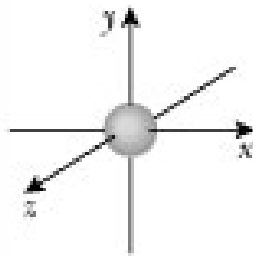
Representación de la función radial para los primeros estados del átomo de hidrógeno



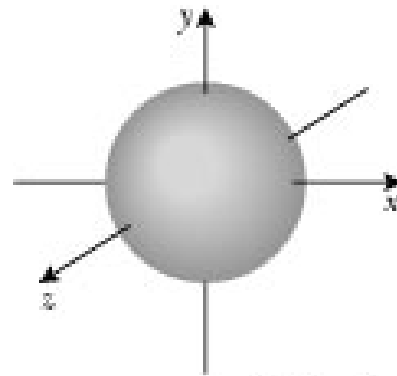


## ORBITALES DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO:

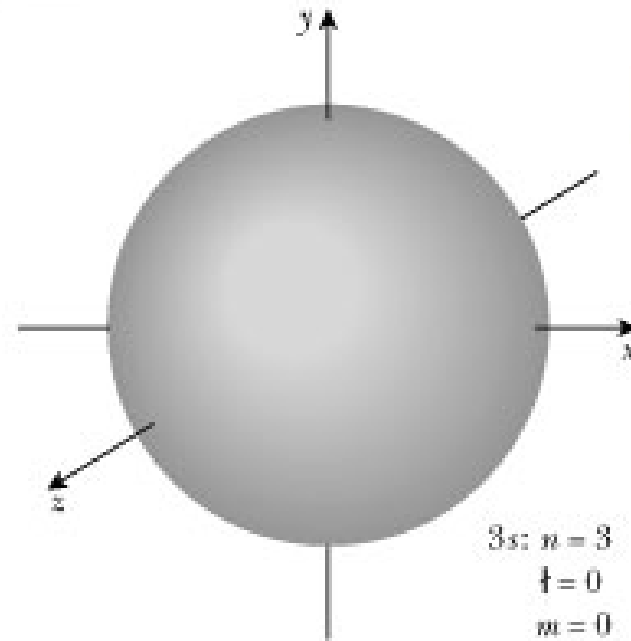
Órbitales s ( $l=m=0$ )



$1s: n = 1$   
 $l = 0$   
 $m = 0$



$2s: n = 2$   
 $l = 0$   
 $m = 0$



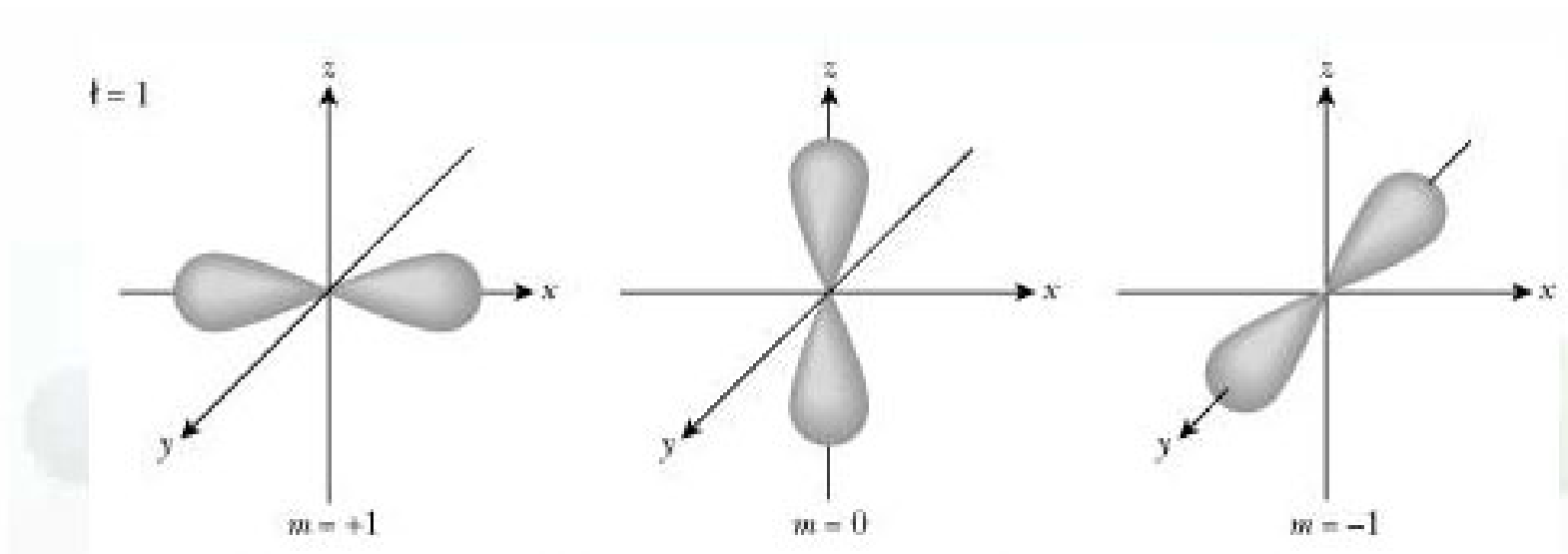
$3s: n = 3$   
 $l = 0$   
 $m = 0$





## ORBITALES DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO:

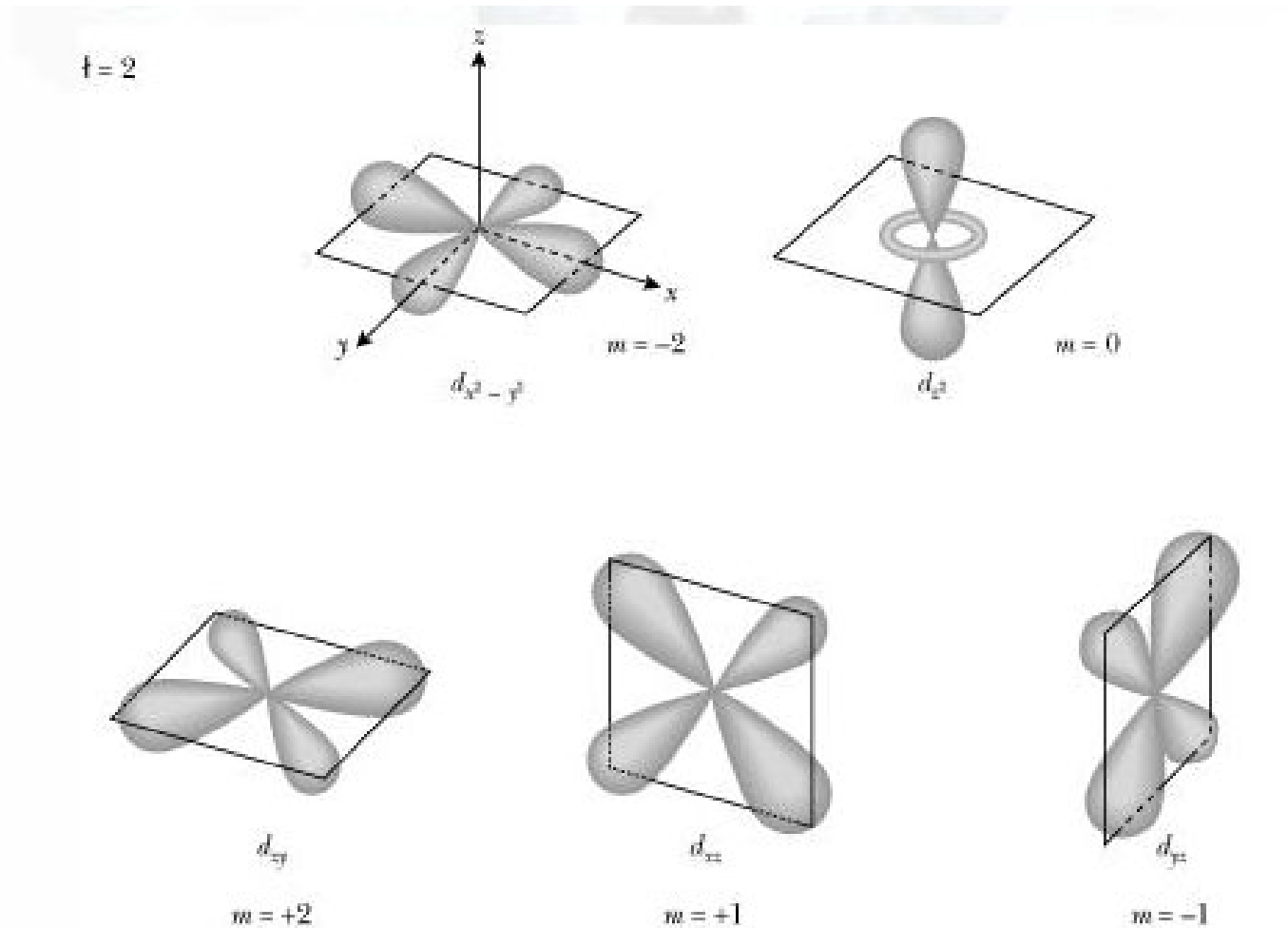
### Órbitales $p$ ( $l=1$ )





## ORBITALES DEL ÁTOMO DE HIDRÓGENO:

### Órbitales d ( $l=2$ )

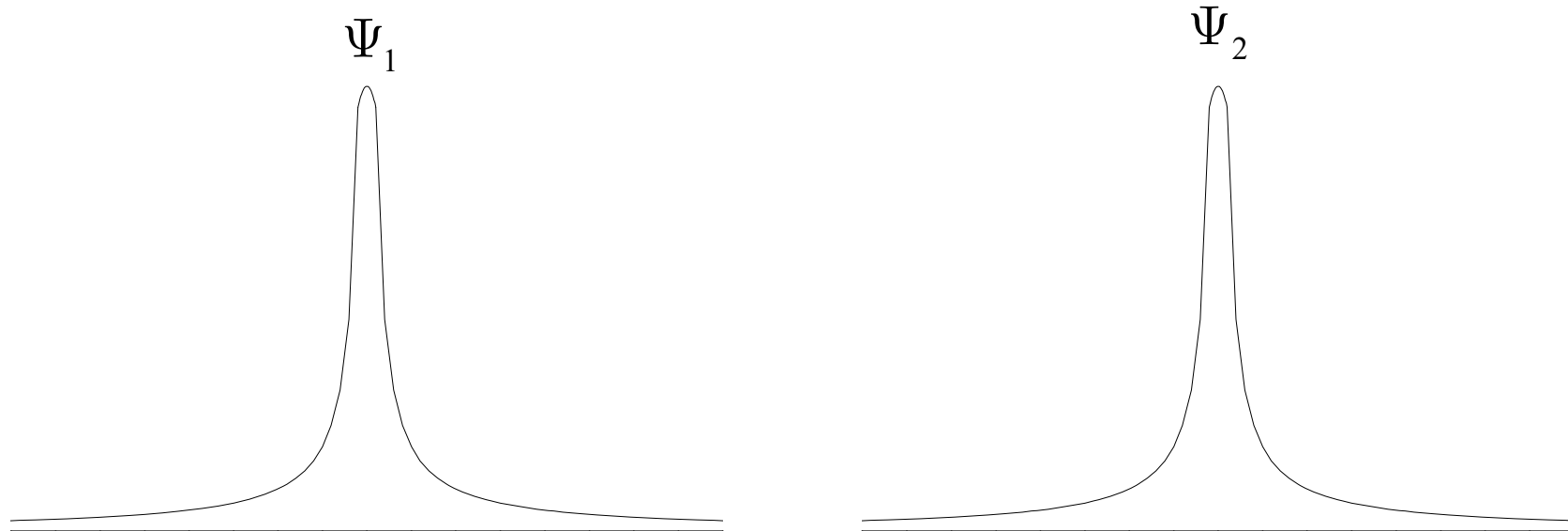




## *Aproximación cualitativa a la teoría de bandas*

Ahora vamos a ver que es lo que predice la mecánica cuántica que debe ocurrir cuando en vez de considerar los átomos aislados consideramos que forman parte de una red cristalina.

Como hicimos anteriormente, para hacernos una idea de cómo son los estados cuánticos en la red cristalina, comenzaremos desde los estados cuánticos monoatómicos analizados en el anterior apartado y veremos como se transforman estos a medida que acercamos los átomos. Consideremos dos átomos muy separados.

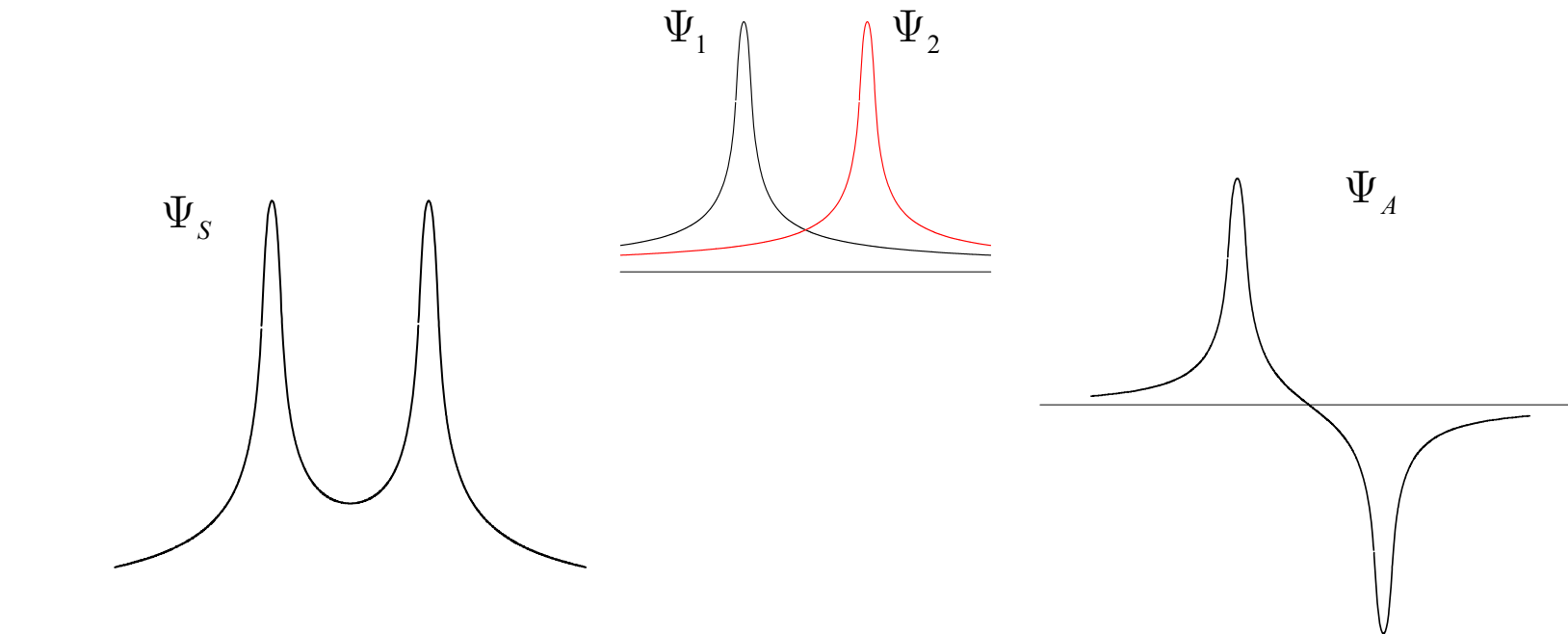




A medida que la distancia entre átomos va disminuyendo las funciones de onda se van solapando. ¿Cuál será la función de onda para ese caso? Por propiedades matemáticas de la teoría de ondas la función de onda resultante se puede escribir como una combinación lineal de la suma de las dos funciones de onda originales. Por lo tanto, el resultado puede ser suma de ambas ondas o su diferencia.

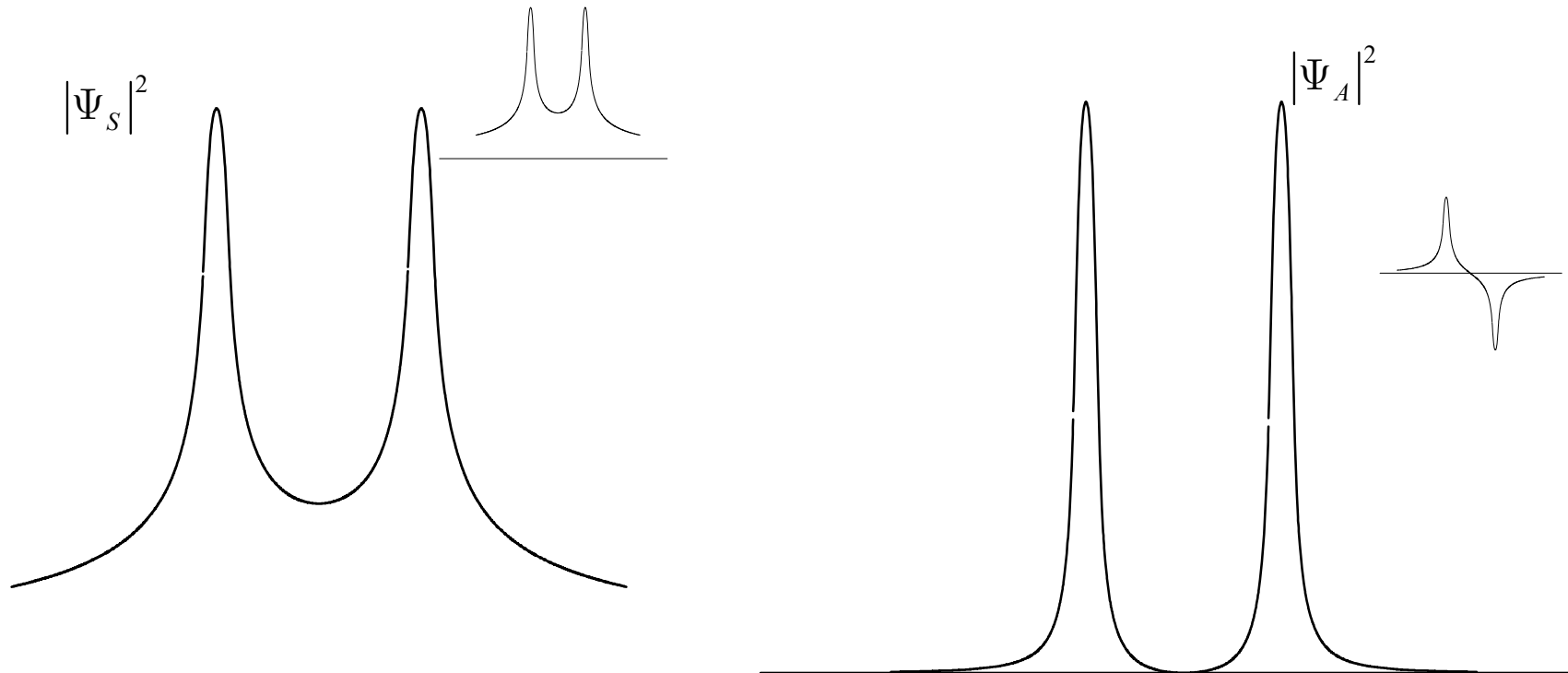
$$\Psi_S = \Psi_1 + \Psi_2 \Rightarrow \text{Función simétrica}$$

$$\Psi_A = \Psi_1 - \Psi_2 \Rightarrow \text{Función antisimétrica}$$





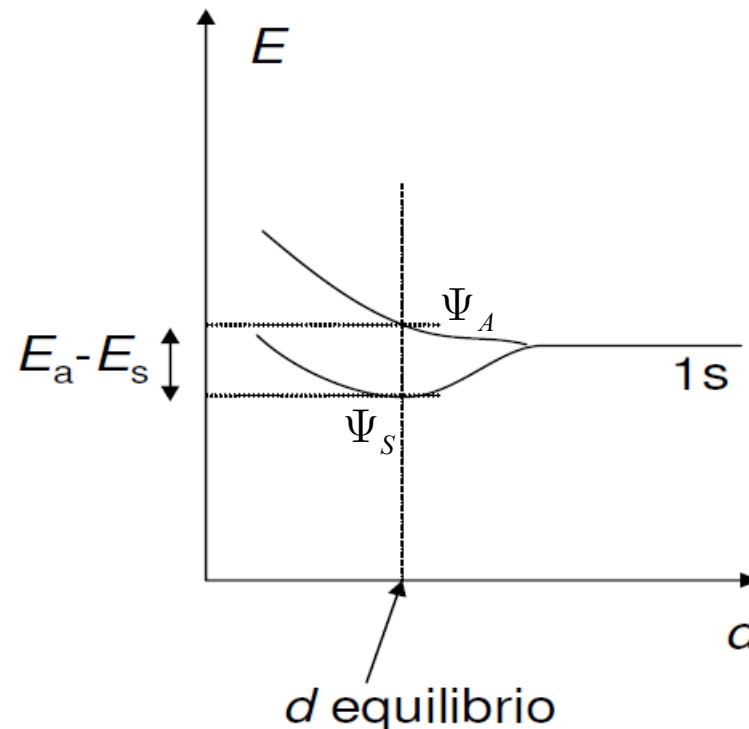
Cuando los átomos están muy lejos las funciones de probabilidad dadas por ambas autofunciones son muy parecidas. Cuando la distancia es del orden de  $1 \text{ \AA}$ , las funciones  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  se solapan, y empiezan a ser diferentes las autofunciones simétrica y antisimétrica. La función simétrica nos dice que hay probabilidades de encontrar el electrón entre los dos átomos, mientras que la función antisimétrica predice que el electrón se encontrará con mayor probabilidad ligado a uno u otro de los átomos.





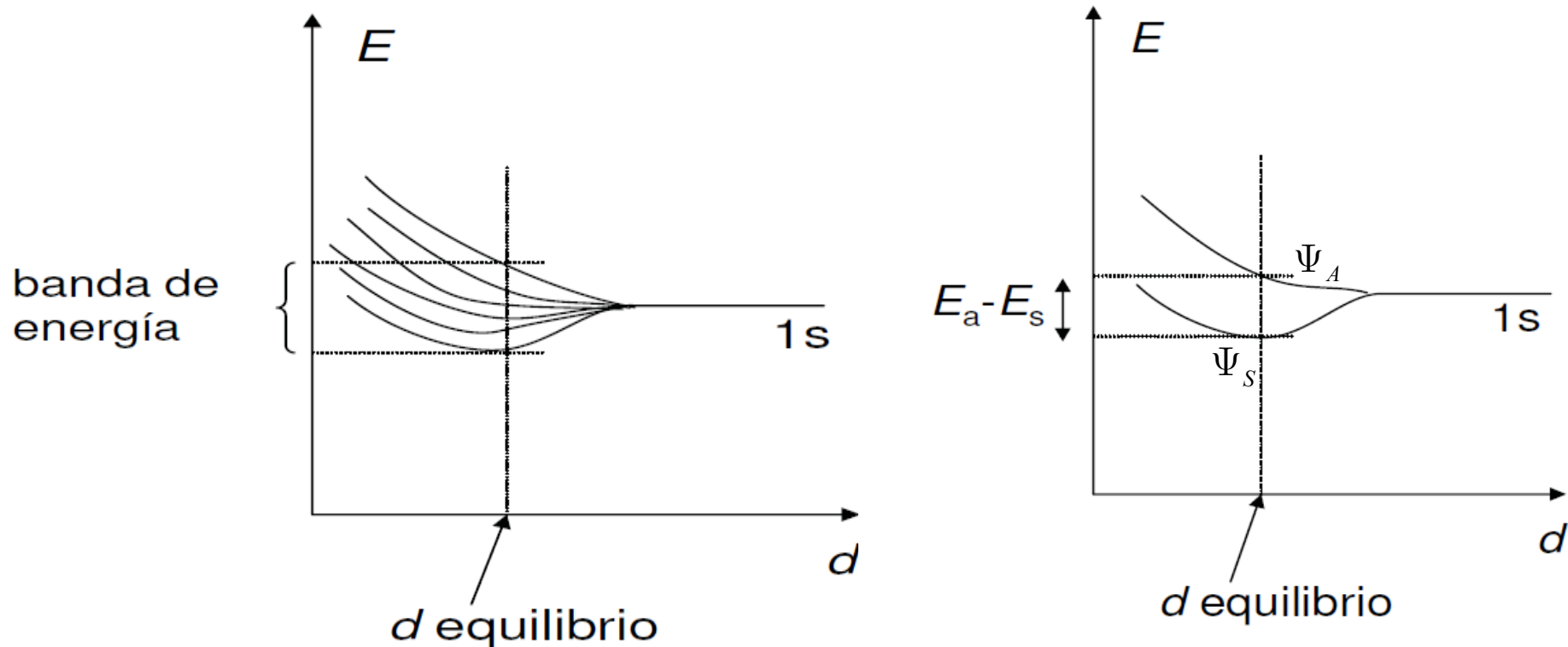
Al ser diferentes las funciones de onda, y por tanto las probabilidades, también son diferentes las energías asociadas a los estados. Resulta que la función simétrica tiene una energía más baja que la función antisimétrica. De esta forma por cada nivel de energía atómico obtenemos dos niveles cuando acercamos los dos átomos.

En cada nivel de energía caben dos electrones: uno con el spin hacia arriba y otro con el spin hacia abajo. En el estado fundamental, la molécula de  $H_2$  tiene los dos electrones en el estado dado por la función simétrica.



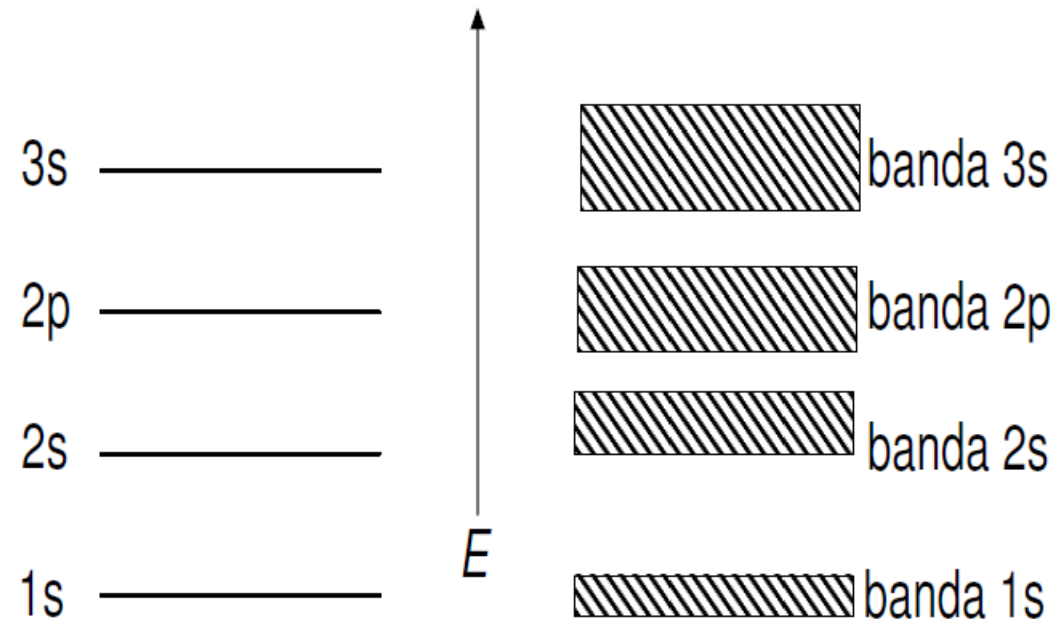


Quando este análisis se extiende a una red de  $N$  átomos, los estados idénticos individuales dan lugar a  $N$  estados de energías diferentes. No obstante, la diferencia de energía entre los extremos de la banda no depende apreciablemente de  $N$ , por lo que la diferencia de energía entre niveles consecutivos disminuye con  $N$ . Cuando  $N$  es del orden del número de Avogadro, la diferencia de energía es insignificante entre niveles adyacentes ( $\sim 10^{-23}$  eV) y se dice que tenemos una banda de energía cuasicontinua. (1 eV=  $10^{-19}$  Julios)





Hasta aquí hemos visto la situación para un nivel de energía. Cuando tenemos átomos multielectrónicos donde hay diferentes estados cuánticos, cada estado individual mono-atómico se rompe en bandas de energía al formarse el sólido. La situación es como la de la figura donde vemos que los niveles cuánticos mono-atómicos  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p$ ,  $3s$ ,... dan lugar a bandas en el sólido: banda  $1s$ , banda  $2s$ , banda  $2p$ , banda  $3s$ ,... Para una misma distancia  $d$  la anchura de la banda es mayor donde haya más solapamiento, esto es, la anchura será mayor para los niveles correspondientes a electrones más externos.

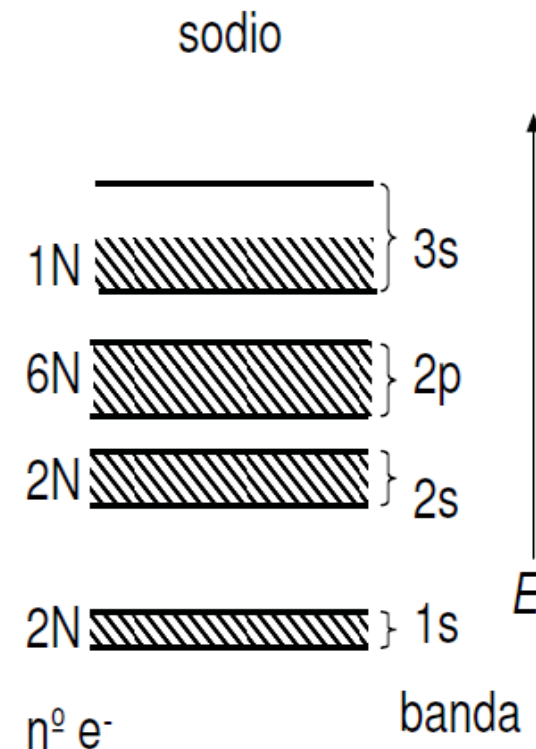






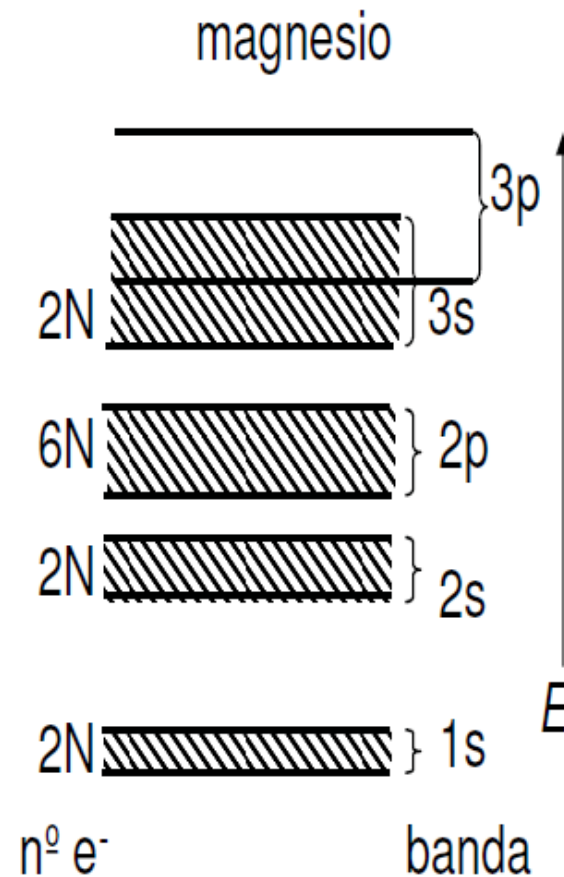
Vamos a analizar a continuación como podemos utilizar lo que hemos visto hasta el momento para extraer conclusiones acerca de las propiedades conductoras de sólidos cristalinos. **Para que un electrón contribuya a la corriente eléctrica, ha de poder acelerarse en la presencia de un campo eléctrico.** Para que esto suceda, **debe poder moverse a un nivel de energía superior desocupado** y, esto implica, que **la banda de energía no puede estar llena**. Si la banda está llena no hay niveles de energía próximos a los que el electrón pueda acceder y, por tanto, no puede ser acelerado por el campo eléctrico.

Vamos a considerar un par de ejemplos hipotéticos. Si consideramos el sodio  $^{11}\text{Na}$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ ), la forma esperada de la estructura de bandas es como en la figura. Para  $T = 0$  K los  $e^-$  ocupan los niveles más bajos de energía y al tener la banda más energética, 3s, a medio llenar el sodio es un conductor. Lo mismo le sucede a los elementos de su misma columna en la tabla periódica, como el Li, K, Rb, Cs. La banda de energías más alta conteniendo electrones es la banda de valencia (BV), la siguiente banda es la de conducción (BC). Si la banda de valencia está parcialmente llena, entonces es también la banda de conducción.



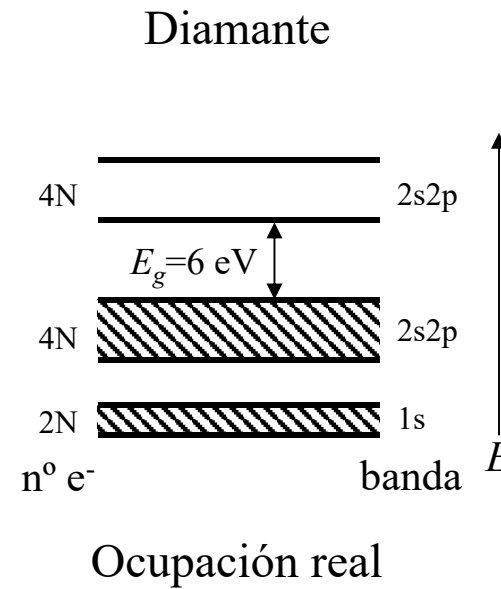
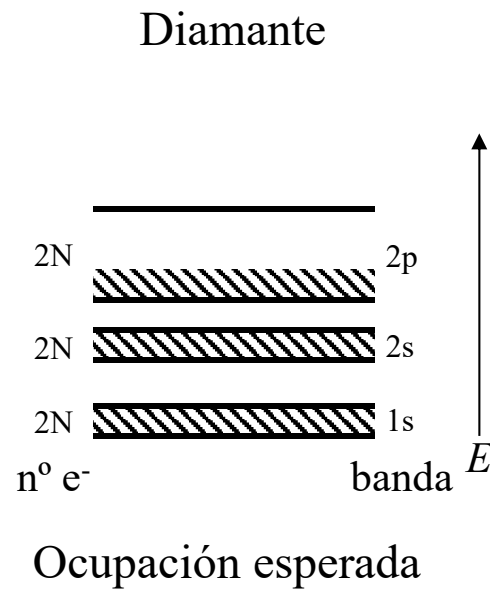


Siguiendo el razonamiento, el magnesio  $12\text{Mg}$  ( $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ ) debería ser un aislante, al tener la banda  $3s$  completamente llena. Sin embargo, un nuevo fenómeno, el solapamiento de la banda  $3s$  con la  $3p$ , hace que sea un conductor. Esto mismo sucede para el Berilio, Calcio, Bario. Para estos elementos la BV y la BC están solapadas.



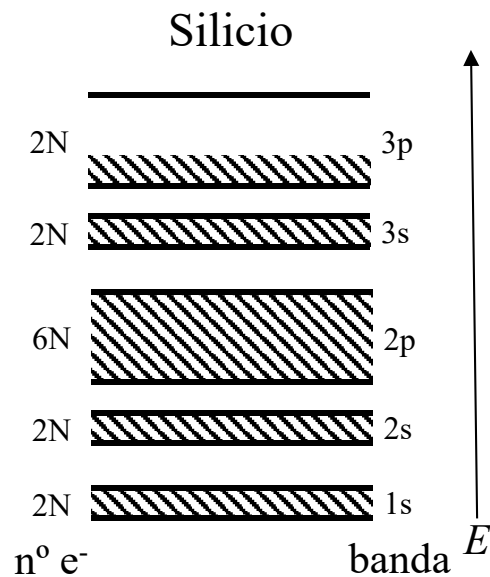


Consideremos ahora el  ${}^6\text{C}$  en la estructura de diamante. En el esquema esperado para el diamante, la banda  $2p$  estaría parcialmente llena y podría conducir. Habría  $2N$  electrones para  $6N$  posiciones posibles. Sin embargo, se produce el solapamiento de la banda  $2s$  con la  $2p$  dando lugar a  $8N$  niveles. Esta banda híbrida  $2s2p$  se rompe para la distancia de separación entre átomos, dando lugar a dos bandas de  $4N$  posiciones separadas por un gap de energía  $E_g$ . De este modo aparece una banda de valencia completamente llena separada de una banda de conducción. El diamante es un aislante.

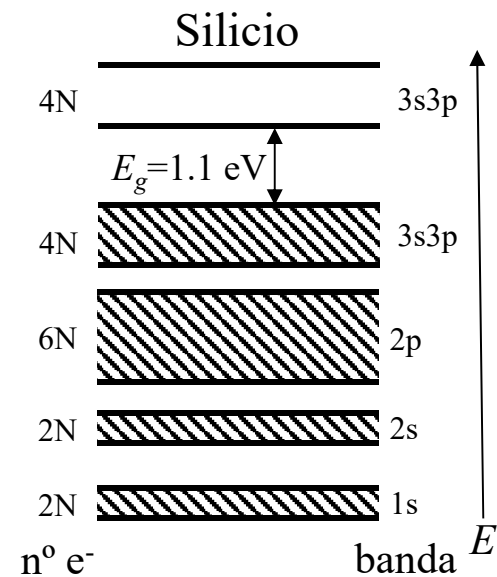




Este mismo fenómeno tiene lugar para los elementos del grupo IV A de la tabla periódica como son el Si y el Ge. En el caso del Si la hibridación se da entre las bandas 3s y 3p y el valor del gap de energía es  $E_g(\text{Si}) = 1,1 \text{ eV}$



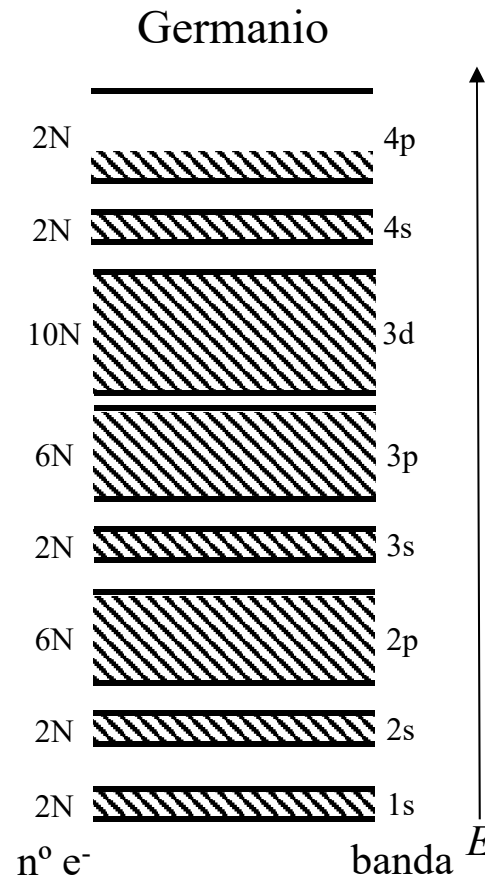
Ocupación esperada



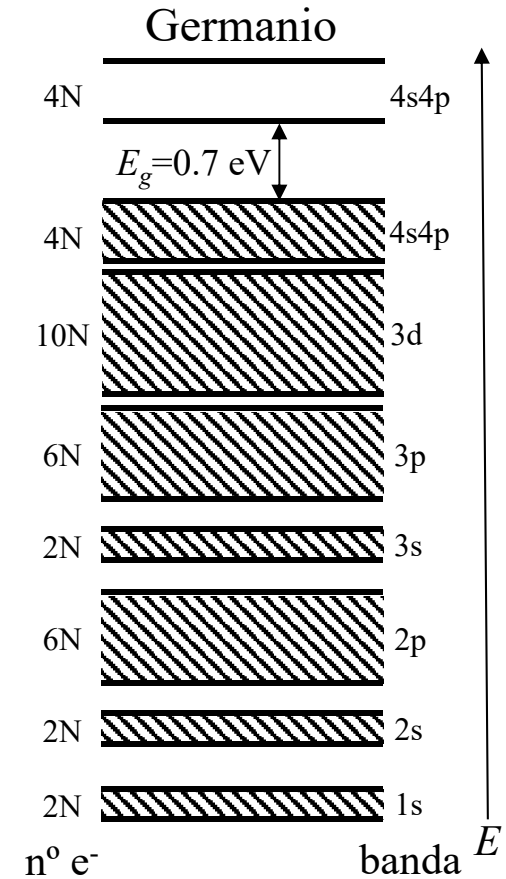
Ocupación real



Por otro lado, la hibridación en el Ge se da entre las bandas 4s y 4p y el gap de energía tiene un valor  $E_g(\text{Ge}) = 0,7 \text{ eV}$ .



Ocupación esperada

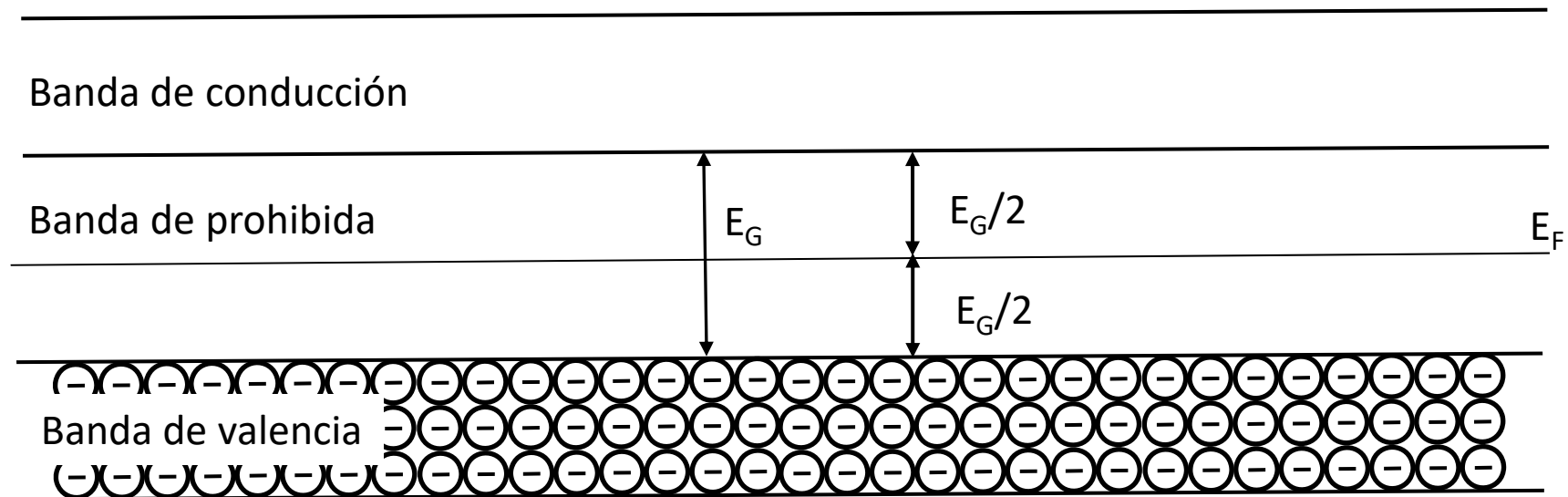


Ocupación real

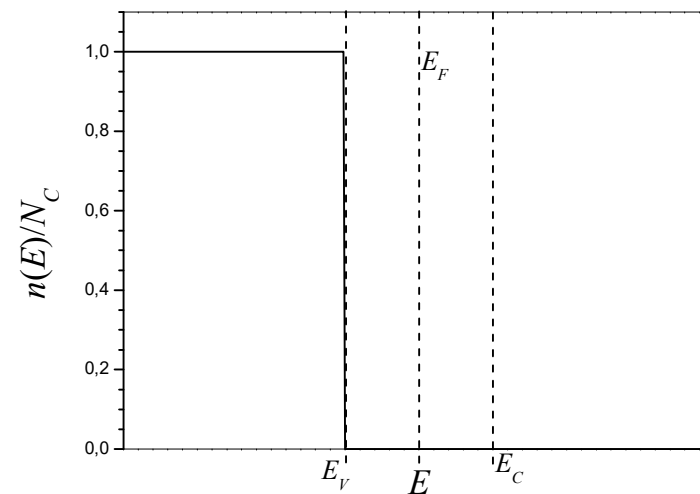
A la temperatura  $T = 0 \text{ K}$  los tres sólidos se comportan de forma idéntica y son aislantes. A temperatura ambiente, sin embargo, como veremos, al adquirir los electrones energía térmica pueden saltar de la banda de valencia a la banda de conducción. Cuanto mayor sea  $T$  o menor sea  $E_g$  mayor será el número de electrones que pasan a la banda de conducción. Este es el motivo por el que el Si y el Ge conducen a temperatura ambiente y el diamante sigue siendo aislante.



Semiconductor intrínseco a  $T=0$  K

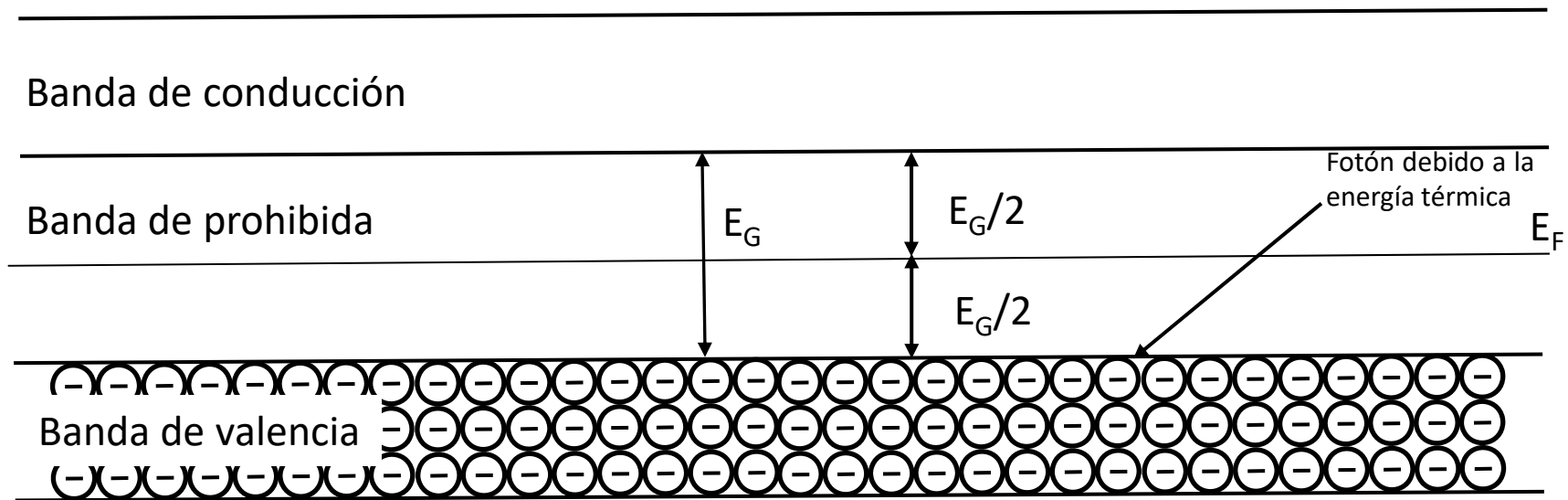


Si aplicamos un campo eléctrico los electrones situados en la capa de valencia no pueden moverse por lo que el semiconductor no conduce y se comporta como un aislante



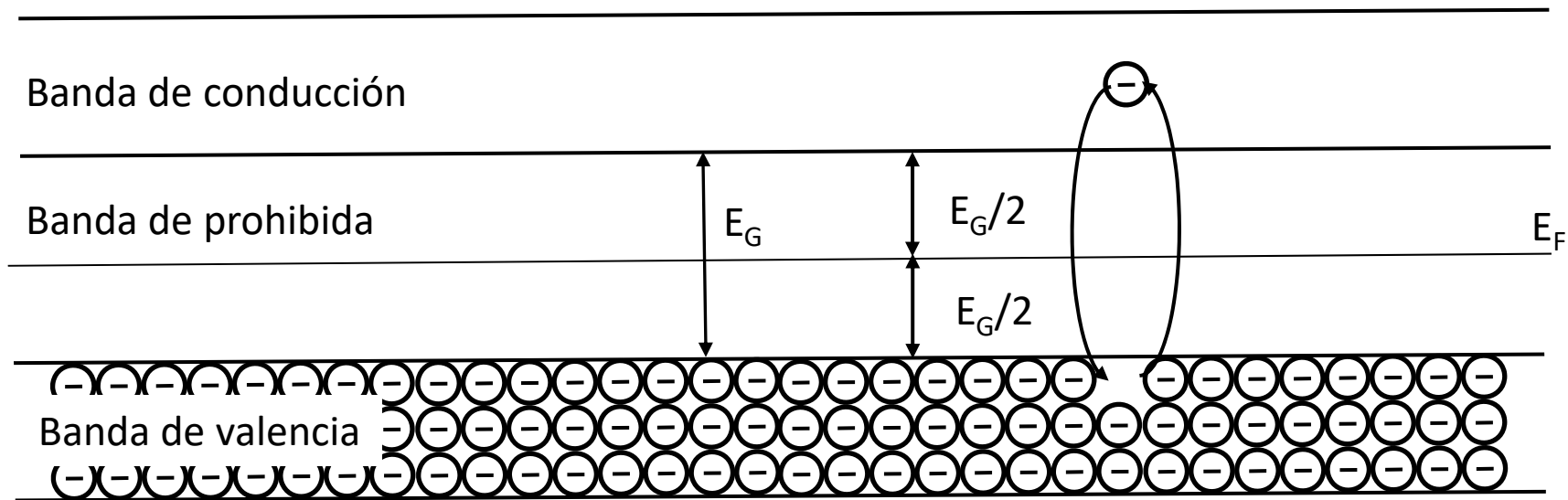


Semiconductor intrínseco a  $T > 0$  K





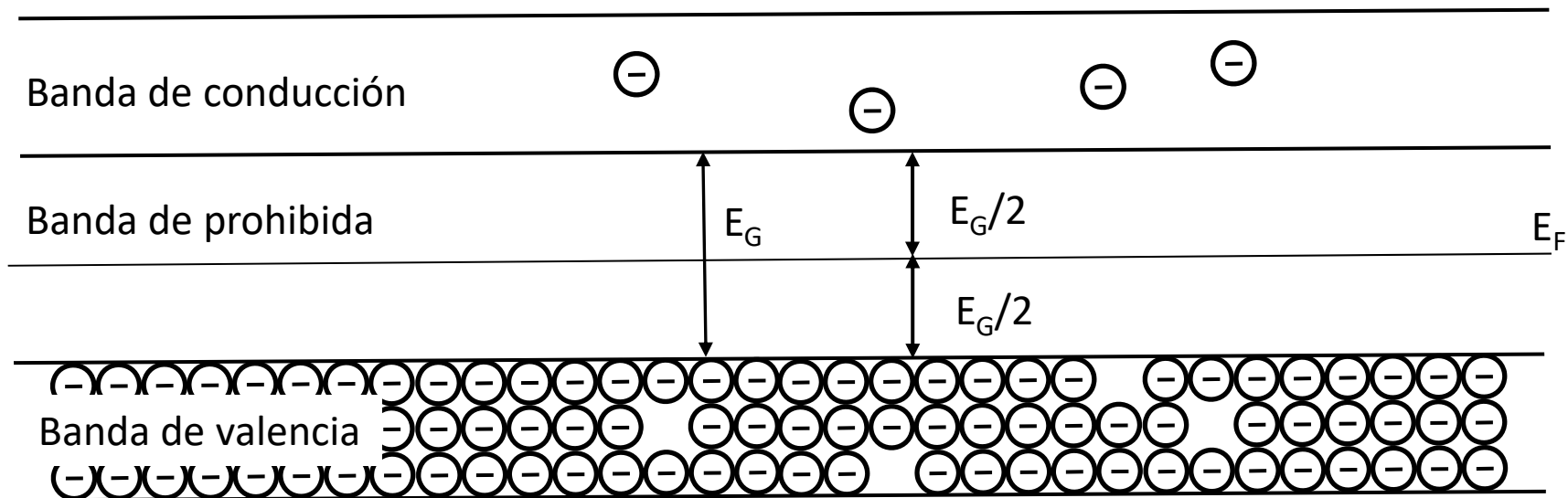
Semiconductor intrínseco a  $T > 0$  K





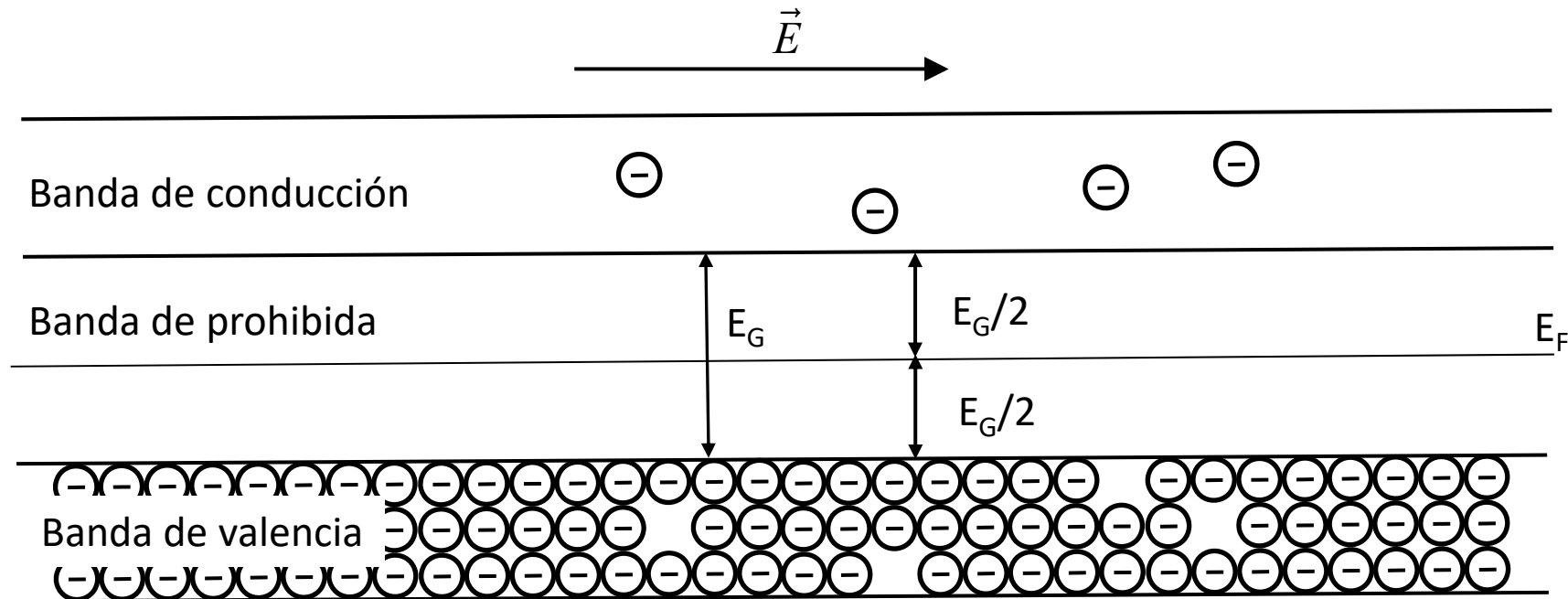


Semiconductor intrínseco a  $T > 0$  K





Semiconductor intrínseco a  $T > 0$  K



Si aplicamos un campo eléctrico se mueven por un lado los electrones de la banda de conducción y los electrones situados en la capa de valencia y el semiconductor conduce. No obstante a temperatura ambiente tenemos que para el silicio:

$$n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

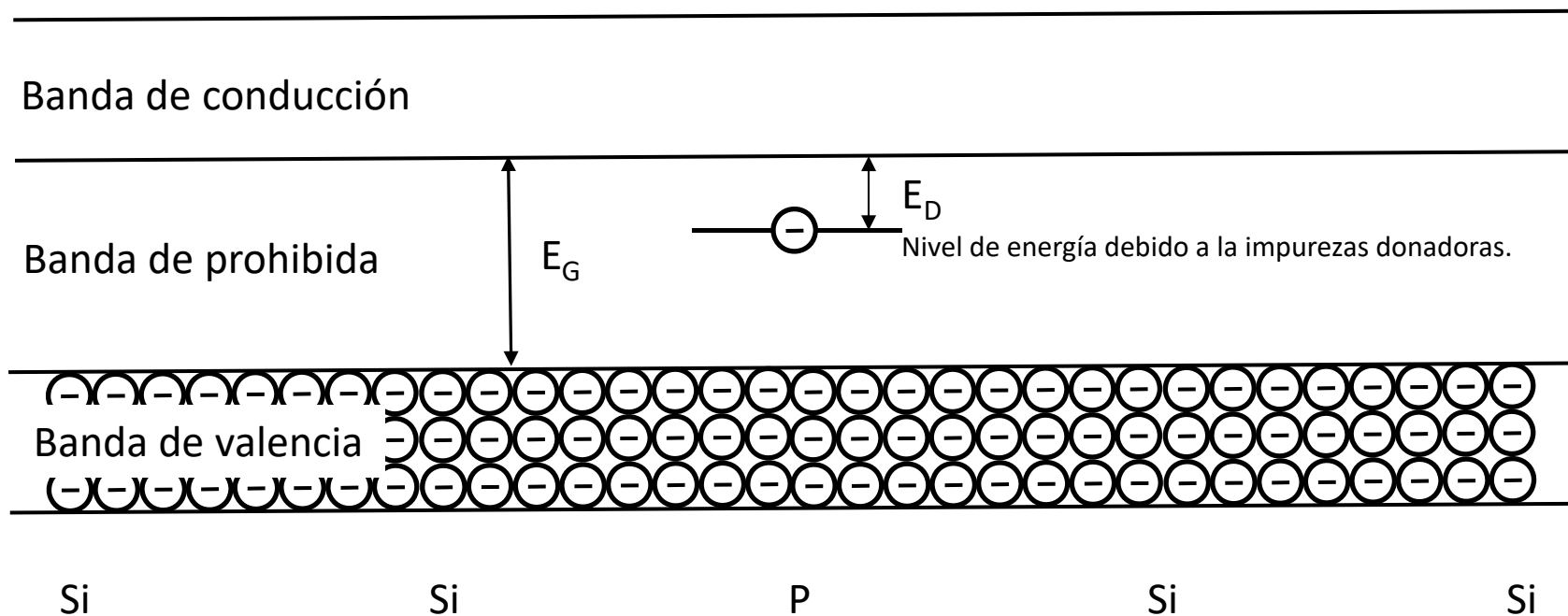


Analicemos ahora que ocurre que ocurre si introducimos algunas impurezas (dopamos) en la estructura cristalina de un sólido. En concreto analicemos que ocurre si en una red de átomos de silicio ( $^{14}\text{Si}$ ) cambiamos algunos pocos átomos por átomos de fósforo ( $^{15}\text{P}$ ).

- 1- . Si la densidad de impurezas es mucho menor que la densidad de átomos de  $^{14}\text{Si}$  es de esperar que la estructura global de bandas no se altere casi nada.
- 2.- Se crean algunos estados energéticos dentro de la banda prohibida y muy cercanos del mínimo de energía de la banda de conducción.
- 3.- Los átomos de fósforo ( $^{15}\text{P}$ ) aportan un electrón más que ocupan los nuevos niveles energéticos creados de forma que para  $T=0$  la banda de valencia y los estados extras creados están totalmente ocupados y el cristal no conduce.
- 4.- Sin embargo, debido a la cercanía de los estados energéticos creados por las impurezas a la banda de conducción, incluso a temperaturas muy bajas, los electrones situados en estos estados energéticos pueden promocionarse a la banda de valencia.
- 6.- Estos electrones pueden conducir la corriente eléctrica.



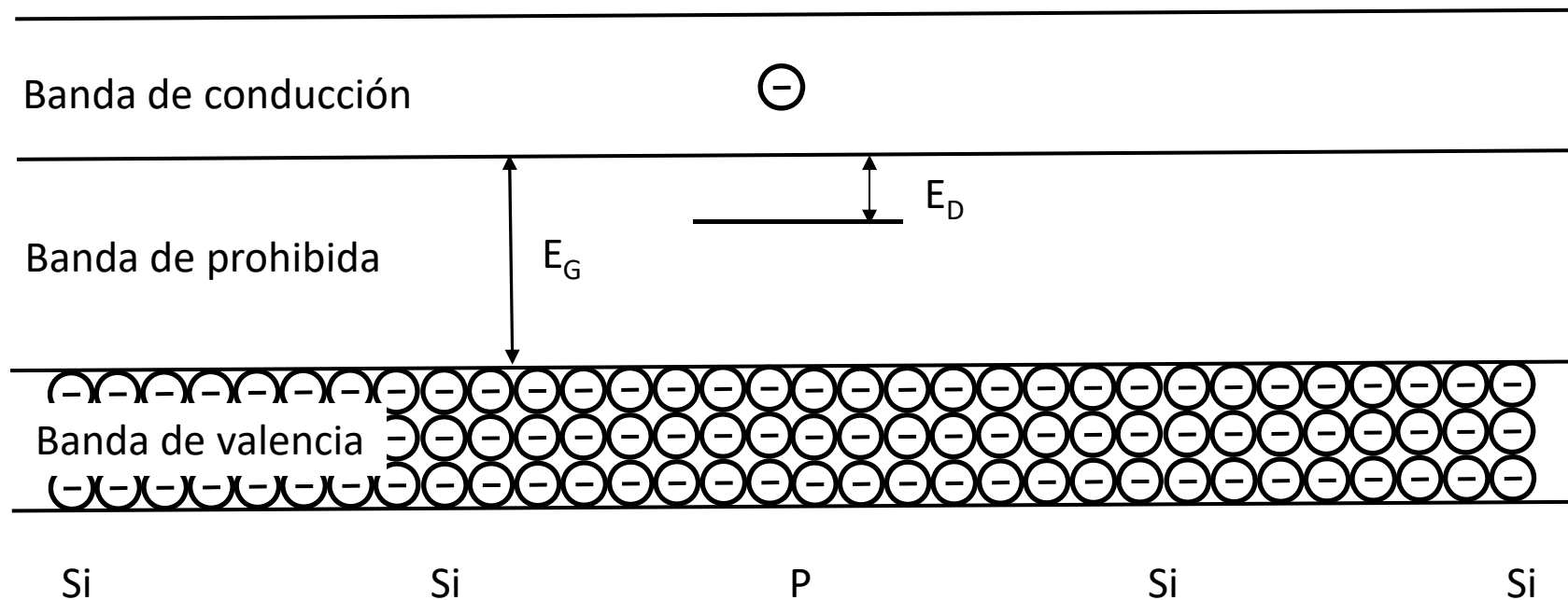
Semiconductor dopado tipo  $n$  a  $T=0$  K



La última banda está completa y el material es aislante.



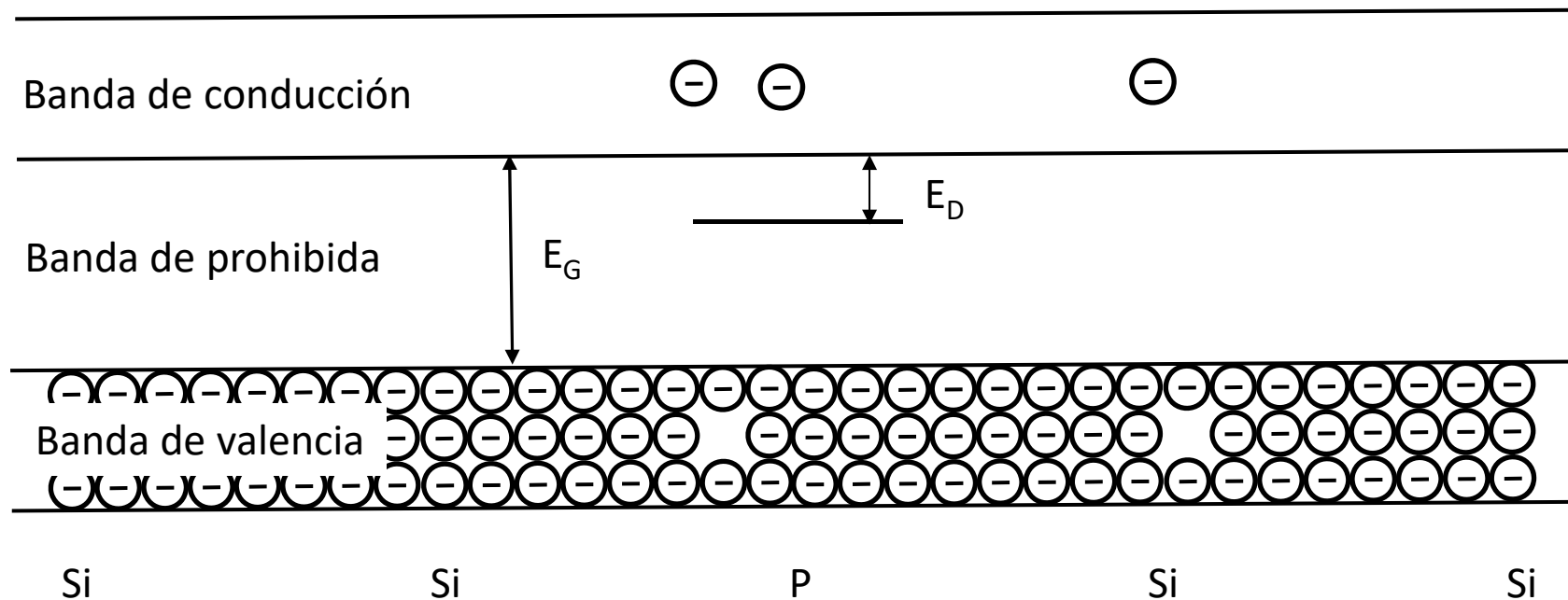
Semiconductor dopado tipo  $n$  a  $T > 0$  K



- a).- Para temperaturas muy bajas (estrictamente para  $T > 0$  K) los electrones de la/s sustancia/s dopante/s donadora/s adquieren suficiente energía como para promocionarse a la banda de conducción.
- b).- En general, a temperaturas relativamente bajas ( $T \sim 100$  K) todas las impurezas donadoras se ionizan y la concentración de portadores en la banda de conducción es prácticamente igual a la concentración de impurezas.



Semiconductor dopado tipo  $n$  a  $T > 0$  K



- c).- Durante un rango importante de temperaturas (desde  $T \sim 100$  K hasta  $T \sim 320$  K) la concentración de electrones en la banda de conducción es básicamente igual a la concentración de las impurezas donadoras.
- d).- Para temperaturas superiores la concentración de portadores crece de forma exponencial debido a la promoción de electrones desde bandas de energía inferiores.

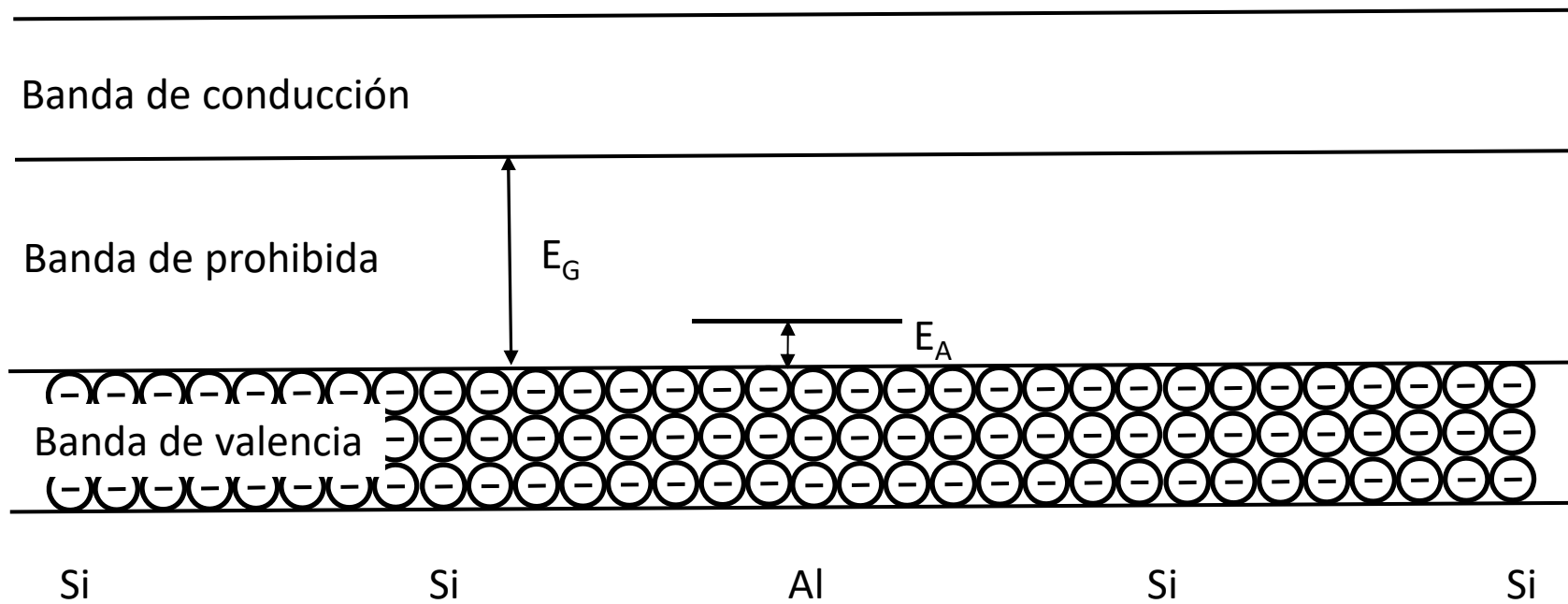


Analicemos ahora que ocurre con las bandas de energía si introducimos algunas impurezas formadas por átomos con un  $e^-$  menos que los átomos de la red cristalina. En concreto vamos a considerar que ocurre si en una red cristalina de átomos de silicio ( $^{14}\text{Si}$ ) cambiamos unos pocos átomos de silicio por átomos de aluminio ( $^{13}\text{Al}$ ).

- 1.- Puesto que la densidad de átomos de  $^{13}\text{Al}$  es mucho menor que la densidad de átomos de  $^{14}\text{Si}$  es de esperar que la estructura global de bandas de silicio puro no se altere casi nada.
- 2.- Algunos estados energéticos de la banda de valencia se salen de la banda de valencia tomando valores que se encuentran en la banda prohibida muy cerca del valor mayor de energía de la banda de valencia.
- 3.- Los átomos de  $^{13}\text{Al}$  aportan un electrón menos a la banda de valencia (3  $e^-$  de valencia en vez de 4).
- 4.- Al haber menos estados en la banda de valencia esta permanece totalmente ocupada.
- 5.- Sin embargo, debido a la cercanía de los estados energéticos creados por las impurezas, incluso a temperaturas muy bajas, los electrones de la banda de valencia pueden promocionarse a estos niveles energéticos.
- 6.- Estos electrones ocupan todos los niveles energéticos generados por las impurezas de la red cristalina y, por tanto, no pueden conducir la corriente.
- 7.- Sin embargo los estados energéticos que quedan libres en la banda de valencia si permiten que los electrones de dicha banda puedan conducir la corriente.



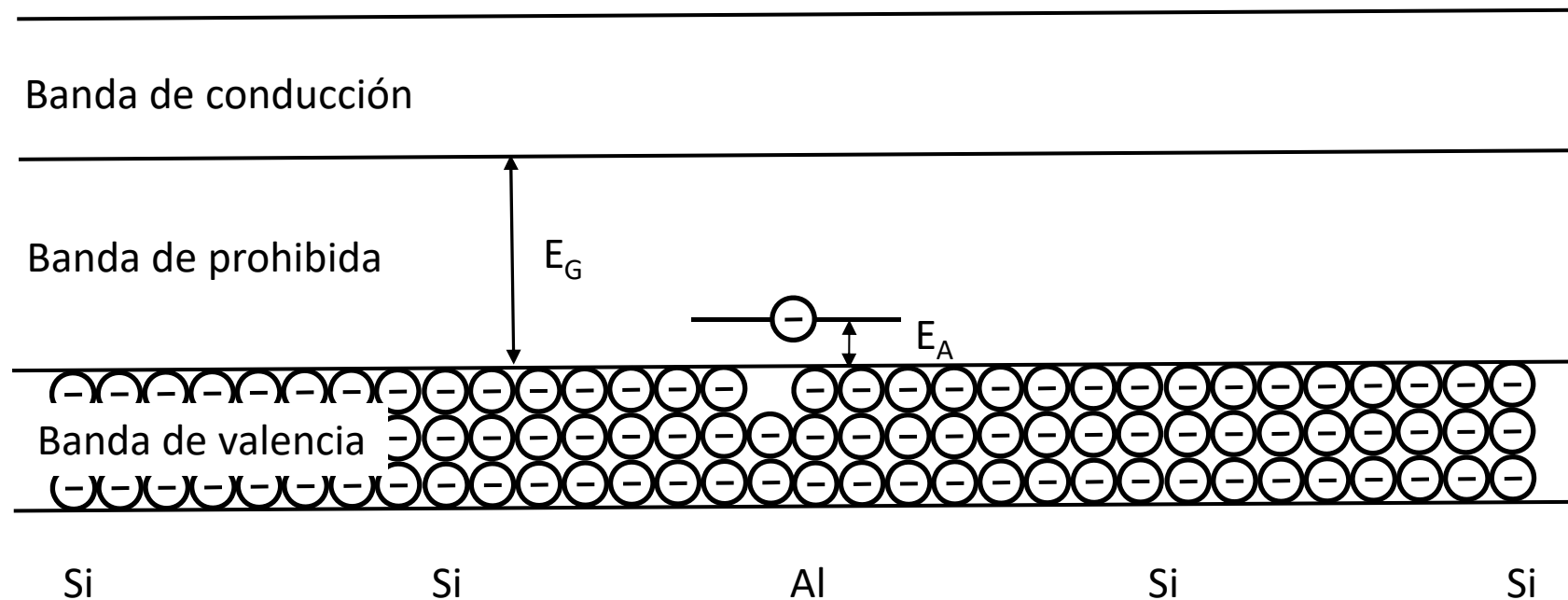
Semiconductor dopado tipo  $p$  a  $T=0$  K







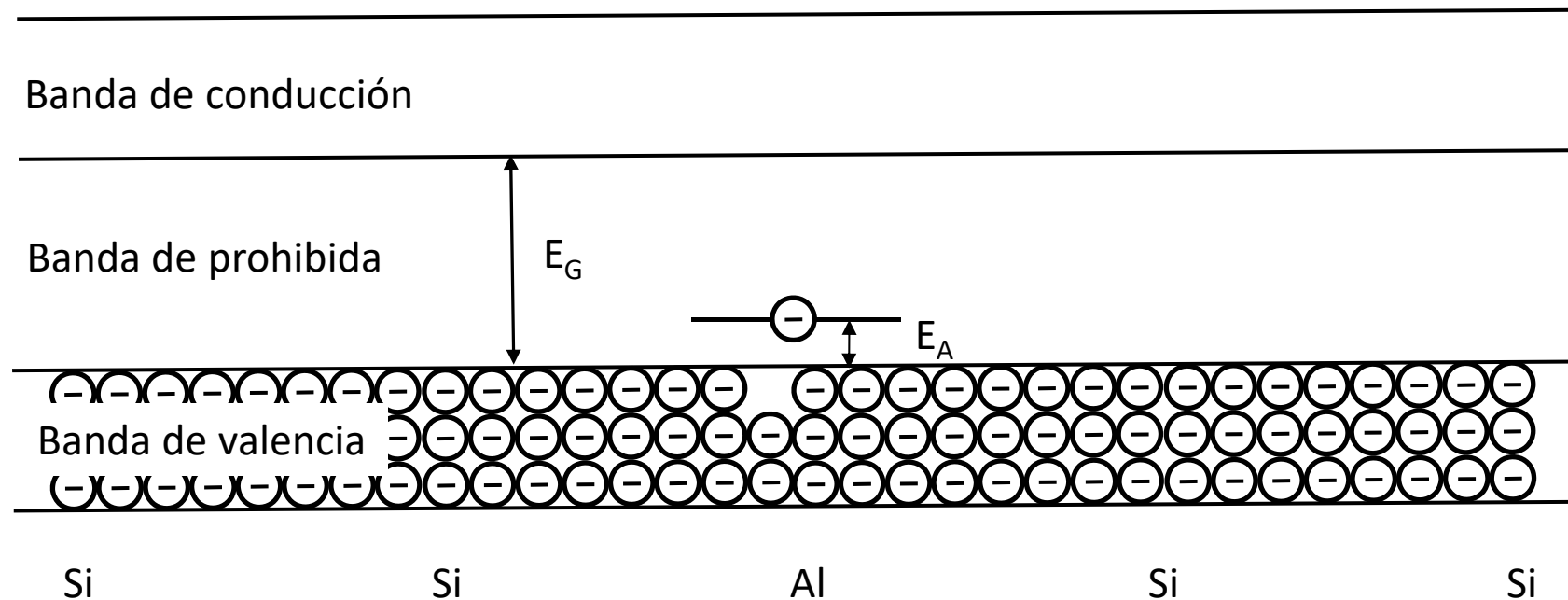
Semiconductor dopado tipo *p* a  $T > 0$  K



- a).- Para temperaturas muy bajas (estrictamente para  $T > 0$  K) los electrones de la banda de valencia pueden promocionarse a los niveles energéticos creados por las impurezas aceptoras creando huecos en la banda de valencia.
- b).- En general, a temperaturas relativamente bajas ( $T \sim 100$  K) todos los niveles creados por las impurezas aceptoras están cubiertos y la concentración de portadores (huecos) en la banda de valencia es prácticamente igual a la concentración de impurezas.



Semiconductor dopado tipo  $p$  a  $T > 0$  K



- c).- Durante un rango importante de temperaturas (desde  $T \sim 100$  K hasta  $T \sim 320$  K) la concentración de huecos en la banda de valencia es básicamente igual a la concentración de las impurezas donadoras.
- d).- Para temperaturas superiores la concentración de huecos en la banda de valencia crece de forma exponencial debido a la promoción de estos a la banda de conducción.



De igual forma absorción de un fotón por parte de un electrón implica su promoción a un nivel energético superior dentro de las bandas de energía que se establecen en un sólido cristalino y su emisión produce su caída a un nivel energético menor. Si la última banda de energía de un sólido está llena de electrones estos sólo pueden acceder a niveles energéticos superiores promocionándose a la siguiente banda que está vacía. Cuando esto ocurre la última banda ocupada no está completa y el material puede conducir la corriente. Esto es lo que ocurre en el caso de los semiconductores. En este apartado vamos a ver como varía el número portadores de carga libres en la banda de conducción como función de la temperatura y a calcular la concentración de los mismos.

Para calcular la densidad de electrones  $n(E)$  en un semiconductor basta conocer la densidad de niveles disponibles en ese intervalo de energía y contar cuántos de ellos están ocupados por electrones. Así pues, podemos escribir  $n(E)$  simplemente como:

$$n(E) = Z(E) \cdot f(E)$$

donde  $Z(E)$  es la *densidad de estados posibles* en la banda (de conducción o de valencia), es decir, la concentración de estados o niveles por unidad de intervalo de energía que existe para un valor  $E$  de la energía y que son susceptibles de ser ocupados por los electrones, y  $f(E)$  representa la *probabilidad de ocupación* de esos estados, o dicho en otras palabras, la fracción de estados o niveles que se encuentran ocupados.

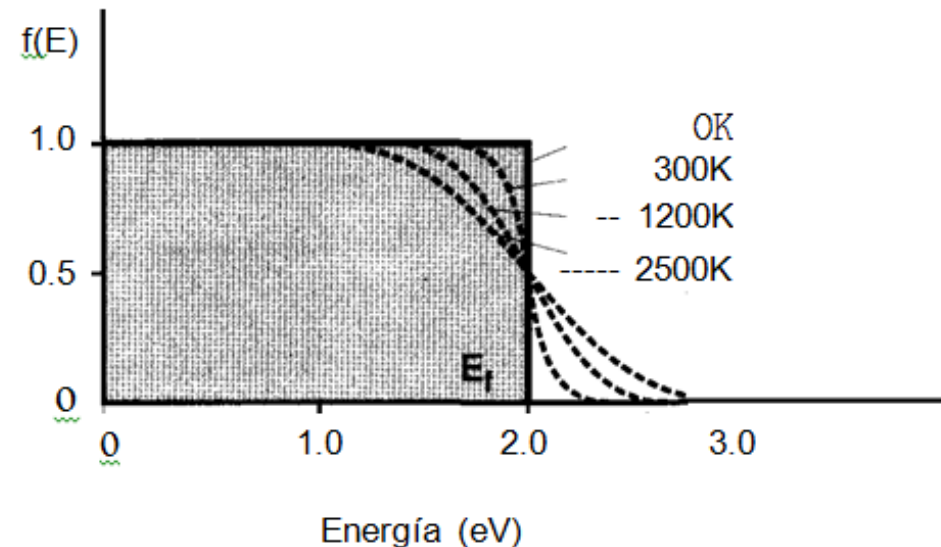


En los semiconductores, al igual que en los metales, la probabilidad de ocupación de niveles por electrones está regida por la *estadística de Fermi-Dirac*. Esta estadística se aplica a partículas que cumplen el principio de exclusión de Pauli, como es el caso de los electrones. En la estadística de Fermi-Dirac, la función  $f(E)$  está dada por:

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right)}$$

siendo  $E_f$  un parámetro (con unidades de energía) denominado *nivel de Fermi*,  $k$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta del sistema en consideración.

El nivel de Fermi en un semiconductor es una magnitud que depende mucho de las características del semiconductor así como de otros factores externos, tales como la temperatura.





En analogía con lo visto para los electrones, para los huecos podremos escribir:

$$p(E) = Z(E) \cdot [1 - f(E)]$$

En general,  $Z(E)$  es una función bastante compleja y difícil de calcular. Se puede demostrar, por extrapolación al caso de los metales, que en las zonas próximas al tope de la banda de valencia,  $E_V$  y al fondo de la banda de conducción,  $E_C$ ,  $Z(E)$  varía según las ecuaciones:

$$Z(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e^*)^{3/2} (E - E_C)^{1/2}$$

$$Z(E) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_p^*)^{3/2} (E_V - E)^{1/2}$$

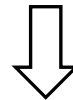
En la región intermedia de energía, zona de energía prohibida, si el semiconductor es intrínseco (sin impurezas) la función  $Z(E)$  es cero en toda la región. En cambio si el semiconductor es extrínseco, la función  $Z(E)$  puede adoptar valores diferentes de cero en las proximidades de los niveles aceptores o donadores.



Una vez conocida las formas de las funciones  $Z(E)$  y  $f(E)$  podemos calcular la concentración de electrones y huecos mediante las expresiones:

$$n = \int_{E_C}^{E_{\max}} Z(E) f(E) dE \quad f(E) \approx \exp\left(-\frac{E - E_f}{kT}\right) \text{ Si } E_C - E_f \gg kT$$

$$p = \int_{E_{\min}}^{E_V} Z(E) [1 - f(E)] dE \quad 1 - f(E) \approx \exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right) \text{ Si } |E_V - E_f| \gg kT$$



de donde

$$n = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_f}{kT}\right) \Rightarrow N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_e^* kT}{h^2}\right)^{3/2}$$

$$p = N_V \exp\left(-\frac{E_f - E_V}{kT}\right) \Rightarrow N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_h^* kT}{h^2}\right)^{3/2}$$

$N_C \Rightarrow$  Número máximo de estados en la banda de conducción  
 $N_V \Rightarrow$  Número máximo de estados en la banda de valencia

$\Rightarrow$  A temperatura ambiente  $N_C \approx N_V \approx 10^{19} \text{ cm}^{-3}$



Multiplicando las anteriores expresiones obtenemos:

$$\begin{aligned} n \cdot p &= N_C N_V \exp\left(-\frac{E_C - E_f}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_f - E_V}{kT}\right) = \\ &= N_C N_V \exp\left(-\frac{E_C - E_V}{kT}\right) = N_C N_V \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) \end{aligned}$$

Si consideramos un semiconductor intrínseco la densidad de electrones es la misma que la densidad de huecos de forma que:

$$n = p = n_i$$

Sustituyendo este resultado en la expresión de arriba llegamos a:

$$\begin{aligned} n_i^2 &= N_C N_V \exp\left(-\frac{E_C - E_V}{kT}\right) = N_C N_V \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) \\ n_i &= N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_{fi}}{kT}\right) \\ n_i &= N_V \exp\left(-\frac{E_{fi} - E_V}{kT}\right) \end{aligned}$$

donde  $E_{fi}$  es el nivel intrínseco de Fermi.



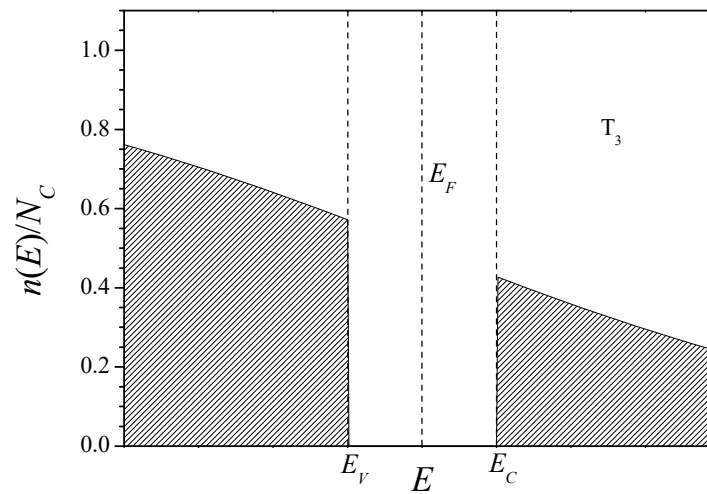
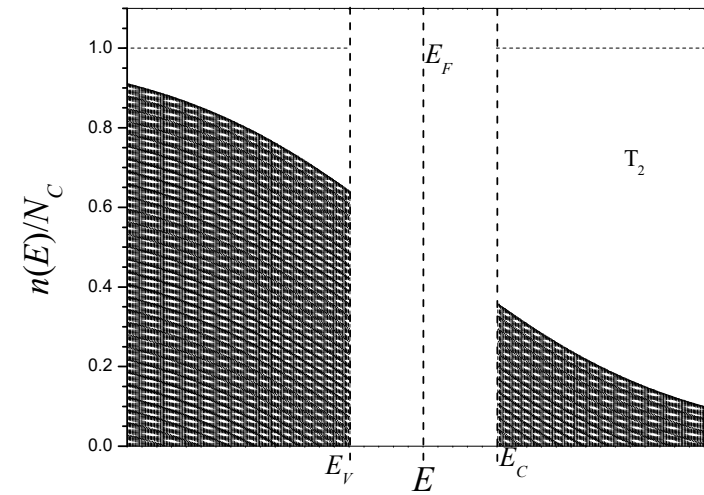
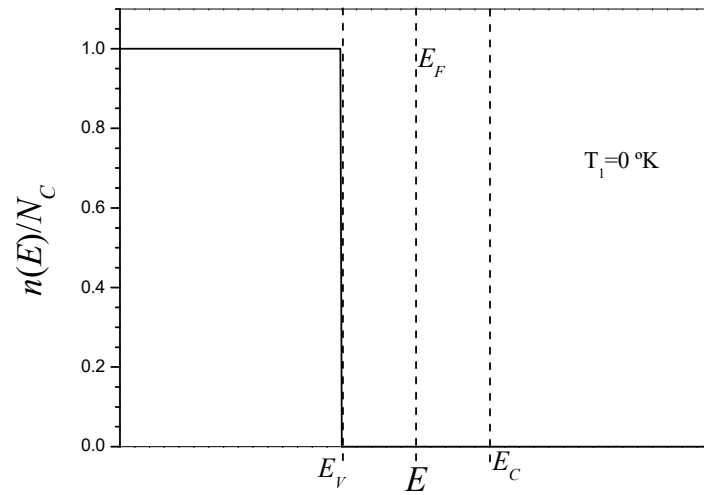
En definitiva para calcular la densidad de portadores tenemos que conocer el nivel de Fermi. El cálculo de esta energía es, en general, complicado puesto que depende de la temperatura. Sin embargo el nivel de Fermi para un semiconductor intrínseco no depende de la temperatura y su posición está situada aproximadamente en el centro de la banda prohibida. Es por ello que se utiliza este nivel como referencia para escribir las expresiones de concentraciones de portadores de carga para semiconductores extrínsecos (dopados).

$$n = n_i \exp\left(-\frac{E_{fi} - E_f}{kT}\right)$$

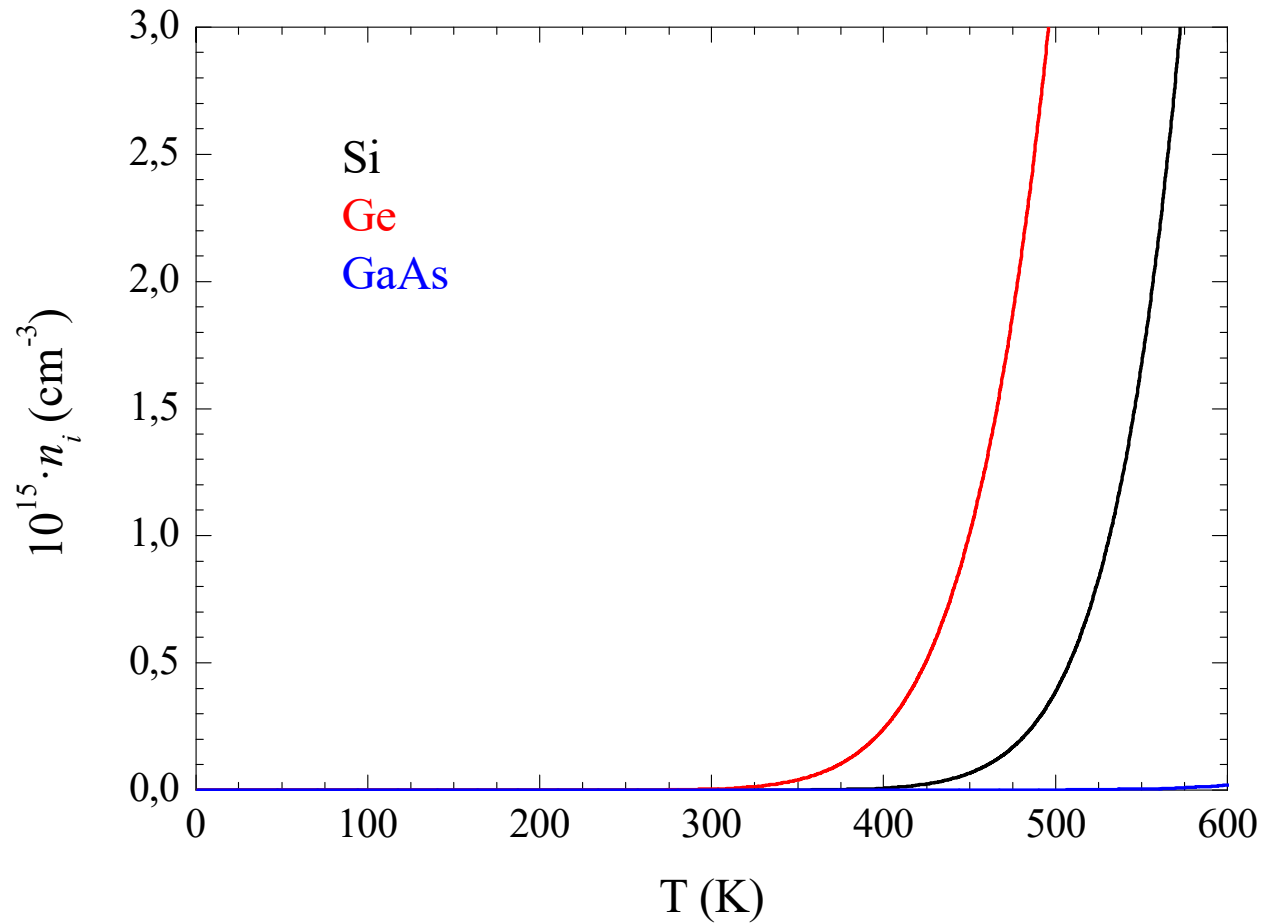
$$p = n_i \exp\left(-\frac{E_f - E_{fi}}{kT}\right)$$

Para el Si a temperatura ambiente resulta  $n_i \sim 1.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Esta concentración de portadores es muy baja cuando se la compara con la de los metales (del orden de  $10^{22}$  o  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ), por lo que el silicio puro a temperatura ambiente puede ser considerado para muchas aplicaciones como un aislante. Algo similar ocurre con el arseniuro de galio, e incluso también con el germanio.

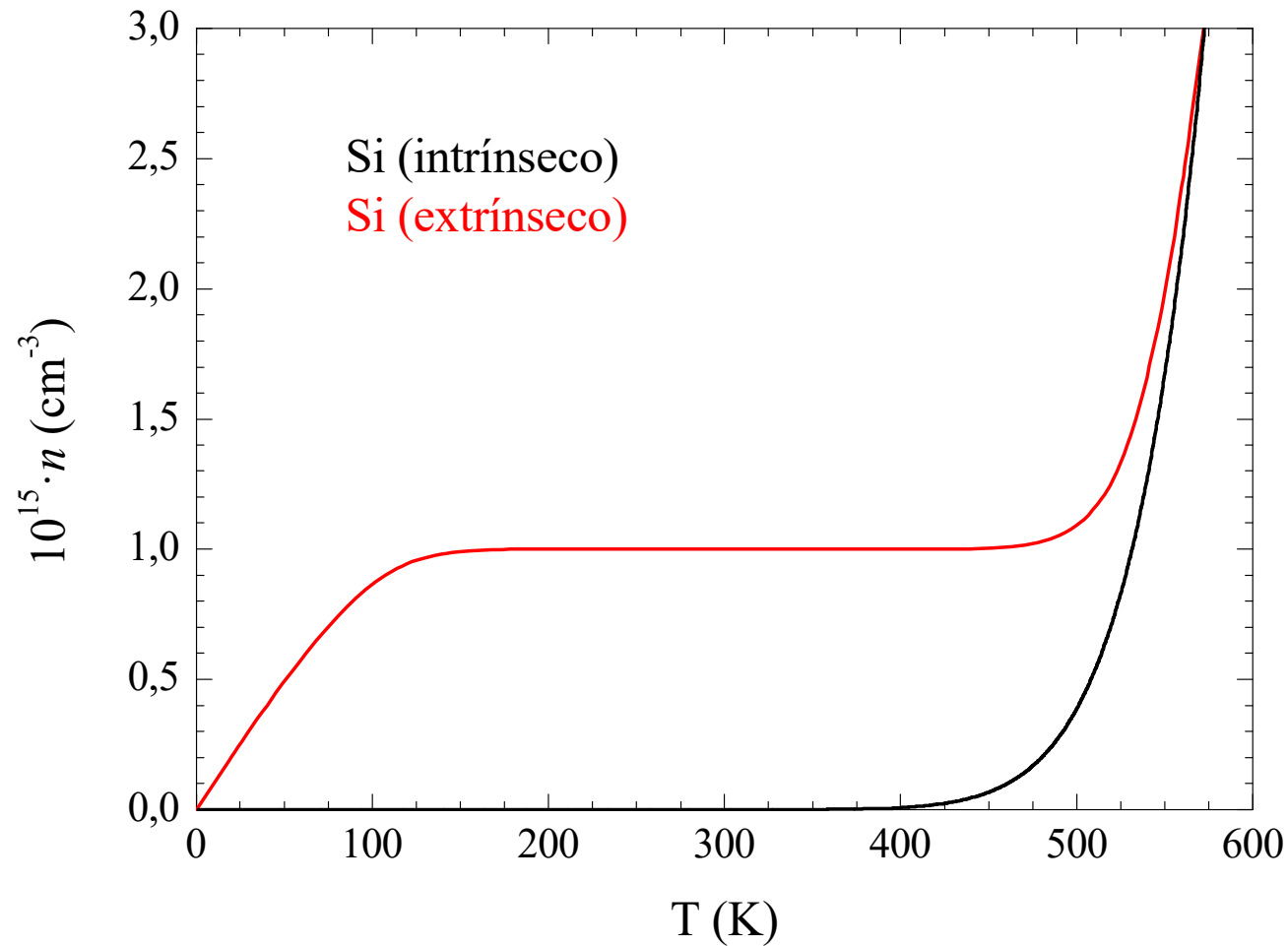




$$T_1 < T_2 < T_3$$



Dependencia de la concentración intrínseca de portadores con la temperatura para diferentes semiconductores.



Dependencia de la concentración de electrones en la banda de valencia para un semiconductor tipo n.