11. Números naturales y enteros. Divisibilidad

Ejercicios resueltos

■ Ejercicio 1.

Utilizando la función Divisors[], escribir un programa que haga lo mismo que PrimeQ[]. Comprobarlo para el 0, 1, 20 y el 71.

Solución:

```
n = NÚMERO;
If[Length[Divisors[n]] == 2,
 Print[n,  " es primo"], Print[n,  " no es primo"]]
```

```
n = 0;
If[Length[Divisors[n]] == 2,
 Print[n,  " es primo"], Print[n,  " no es primo"]]
```

```
0 no es primo
```

```
n = 1;
If[Length[Divisors[n]] == 2,
 Print[n,  " es primo"], Print[n,  " no es primo"]]
```

```
1 no es primo
```

```
n = 20;
If[Length[Divisors[n]] == 2,
 Print[n,  " es primo"], Print[n,  " no es primo"]]
```

```
20 no es primo
```

```
n = 71;
If[Length[Divisors[n]] == 2,
 Print[n, " es primo"], Print[n, " no es primo"]]
```

```
71 es primo
```

▪ Ejercicio 2.

Definir funciones que calculen el cociente y resto de la división de dos números enteros, corrigiendo así el fallo detectado en el ejemplo 11.2. Comprobar que funciona para 7 y 4, 7 y -4, -7 y 4, -7 y -4.

Solución:

```
COCIENTE[a_, b_] := If[Sign[b] == -1, -Quotient[a, -b], Quotient[a, b]];
RESTO[a_, b_] := If[Sign[b] == -1, Mod[a, -b], Mod[a, b]];
```

```
COCIENTE[7, 4]
RESTO[7, 4]
```

```
1
```

```
3
```

```
COCIENTE[7, -4]
RESTO[7, -4]
```

```
-1
```

```
3
```

```
COCIENTE[-7, 4]
RESTO[-7, 4]
```

```
-2
```

```
1
```

```
COCIENTE[-7, -4]
RESTO[-7, -4]
```

```
2
```

```
1
```

■ Ejercicio 3.

Calcular, usando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

a) 1001 y 452

b) 1001 y -4004

c) 1001 y 1

d) -1001 y -452

Interpretar los resultados obtenidos.

Solución:

a) 1001 y 45

```
n1 = 1001;
n2 = 45;
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b; b = Abs[n1];];
m = 1;
While[m > 0, m = Mod[a, b];
  a = b;
  b = m;
 ];
Print["m.c.d.(", n1, ",", n2, ")=", a]
Print["m.c.m.(", n1, ",", n2, ")=", Abs[(n1 * n2) / a]]
```

```
m.c.d.(1001,45)=1
```

```
m.c.m.(1001,45)=45045
```

Como vemos son primos relativos y el mínimo común múltiplo es el producto de los dos.

b) 1001 y -4004

```
n1 = 1001;
n2 = -4004;
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b; b = Abs[n1];];
m = 1;
While[m > 0, m = Mod[a, b];
  a = b;
  b = m;
 ];
Print["m.c.d.(", n1, ",", n2, ")=", a]
Print["m.c.m.(", n1, ",", n2, ")=", Abs[(n1 * n2) / a]]
```

```
m.c.d.(1001,-4004)=1001
```

```
m.c.m.(1001,-4004)=4004
```

Observamos que -4004 es múltiplo de 1001.

c) 1001 y 1

```
n1 = 1001;
n2 = 1;
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b; b = Abs[n1];];
m = 1;
While[m > 0, m = Mod[a, b];
  a = b;
  b = m;
 ];
Print["m.c.d.(", n1, ",", n2, ")=", a]
Print["m.c.m.(", n1, ",", n2, ")=", Abs[(n1 * n2) / a]]
```

```
m.c.d.(1001,1)=1
```

```
m.c.m.(1001,1)=1001
```

El 1 es divisor de todos los números enteros.

d) -1001 y 452

```
n1 = -1001;
n2 = 452;
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b; b = Abs[n1];];
m = 1;
While[m > 0, m = Mod[a, b];
  a = b;
  b = m;
 ];
Print["m.c.d.(", n1, ",", n2, ")=", a]
Print["m.c.m.(", n1, ",", n2, ")=", Abs[(n1 * n2) / a]]
```

```
m.c.d.(-1001,452)=1
```

```
m.c.m.(-1001,452)=452452
```

Como en el primer caso también son primos relativos.

■ Ejercicio 4.

Calcular la Identidad de Bezout en todos los casos del ejercicio anterior.

Solución:

a) 1001 y 45

```
Clear[valor1,valor2];
n1=1001;
n2=45;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;

Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{45,1001}=1
```

```
m.c.m.{45,1001}=45045
```

```
Identidad de Bezout: 1 = 1001·(-4) + 45·(89).
```

b) 1001 y -4004

```
Clear[valor1,valor2];
n1=1001;
n2=-4004;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{1001,-4004}=1001
```

```
m.c.m.{1001,-4004}=4004
```

```
Identidad de Bezout: 1001 = -4004·(0) + 1001·(1).
```

c) 1001 y 1

```
Clear[valor1,valor2];
n1=1001;
n2=1;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{1,1001}=1
```

```
m.c.m.{1,1001}=1001
```

```
Identidad de Bezout: 1 = 1001·(0) + 1·(1).
```

d) -1001 y 452

```
Clear[valor1,valor2];
n1=-1001;
n2=452;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{452,-1001}=1
```

```
m.c.m.{452,-1001}=452452
```

```
Identidad de Bezout: 1 = -1001·(219) + 452·(485).
```

■ Ejercicio 5.

Resolver las ecuaciones diofánticas ax + by = c en los siguientes casos:

I. a = 34, b = 238 y c = -68

II. a = 34, b = -238 y c = 25

III. a = -1968, b = -25992 y c = 68

Solución:

I. a = 34, b = 238 y c = -68

<u>Paso 1:</u> Aplicamos el programa 11.2.

```
Clear[valor1,valor2];
n1=34;
n2=238;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{34,238}=34
```

```
m.c.m.{34,238}=238
```

```
Identidad de Bezout: 34 = 238·(0) + 34·(1).
```

<u>Paso 2:</u> Calculamos k = $\frac{c}{d}$ y vemos si es entero.

```
k = -68 / 34
```

```
-2
```

<u>Paso 3:</u> Multiplicamos la Identidad de Bezout por el k obtenido en el paso anterior obtenemos una solución de la ecuación diofántica:

```
x = (1) * k
y = (0) * k
```

```
-2
```

```
0
```

<u>Paso 4:</u> Todas la soluciones enteras para la ecuación serán, para cada $t \in \mathbb{Z}$:

In[12]:= $x = -2 + t \dfrac{238}{34}$

Out[12]= $-2 + 7\,t$

In[11]:= $y = 0 - t \dfrac{34}{34}$

Out[11]= $-t$

II. a = 34, b = -238 y c = 25

<u>Paso 1:</u> Aplicamos el programa 11.2.

```
Clear[valor1,valor2];
n1=34;
n2=-238;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{34,-238}=34
```

```
m.c.m.{34,-238}=238
```

```
Identidad de Bezout: 34 = -238·(0) + 34·(1).
```

<u>Paso 2:</u> Calculamos k=$\frac{c}{d}$ y vemos si es entero.

```
k = 25 / 34
```

$$\frac{25}{34}$$

No es un número entero, por tanto no existe solución entera para la ecuación.

III. a = -1968, b = -25992 y c = 168

Paso 1: Aplicamos el programa 11.2.

```
Clear[valor1,valor2];
n1=-1968;
n2=-25992;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{-1968,-25992}=24
```

```
m.c.m.{-1968,-25992}=2131344
```

```
Identidad de Bezout: 24 = -25992·(-29) + -1968·(383).
```

<u>Paso 2:</u> Calculamos k=$\frac{c}{d}$ *y* veremos si es entero.

```
k = 168 / 24
```

```
7
```

Paso 3: Multiplicamos la Identidad de Bezout por el k obtenido en el paso anterior

```
x = (383) * k
y = (-29) * k
```

```
2681
```

```
-203
```

Paso 4: Todas la soluciones enteras para la ecuación serán, para cada t ∈ ℤ:

In[13]:= $x = 2681 + t\,\frac{-25992}{24}$

Out[13]= $2681 - 1083\,t$

In[14]:= $y = -203 - t\,\frac{-1968}{24}$

Out[14]= $-203 + 82\,t$

Ejercicio 6.

Si disponesmos de una cubeta con capacidad de 15 litros y otra con capacidad de 24 litros. ¿Es posible obtener exactamente 10 litros combinándolas de alguna manera? ¿y 12 litros? En caso afirmativo explicar cómo lo harías.

Solución:

a) Para responder a la primera pregunta buscamos soluciones enteras de la ecuación 15x + 24y = 10, de forma que seguiremos los pasos de resolución

Paso 1: Aplicamos el programa 11.2. y obtenemos

```
Clear[valor1, valor2];
n1 = 15;
n2 = 24;
If[Abs[n1] > Abs[n2], temp = n1; n1 = n2; n2 = temp];
Signo1 = n1 / Abs[n1];
Signo2 = n2 / Abs[n2];
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b;
  b = Abs[n1];
  n3 = a;
  n4 = b;];
If[Mod[n2, n1] == 0, Valoru = 0; Valordev = Signo1; a = b;, r = 1;
 cocientes = {};
 s = 0;
 While[r > 0, q = Quotient[a, b];
  r = Mod[a, b];
  a = b;
  b = r;
  s = s + 1;
  AppendTo[cocientes, q];];
 listam = Table[0, {i, s}];
 listam[[1]] = valor1;
 listam[[2]] = valor2;
 For[f = 3, f < s + 1, f++,
  listam[[f]] = listam[[f - 2]] - (listam[[f - 1]] * cocientes[[f - 2]])];
 Bezout := Simplify[listam[[s - 1]] - (listam[[s]] * cocientes[[s - 1]])];
 valor1 = 1;
 valor2 = 0;
 Valoru = Bezout;
 valor1 = 0;
 valor2 = 1;
 Valordev = Bezout;
 Valoru = Valoru * Signo2;
 Valordev = Valordev * Signo1;]
Print["m.c.d.{", n1, ",", n2, "}=", a]
Print["m.c.m.{", n1, ",", n2, "}=", (n3 * n4) / a]
Print["Identidad de Bezout: ", a, " = ",
 n2, "·(", Valoru, ") + ", n1, "·(", Valordev, ")."]
"m.c.d.{"270","-3120"}="30
"m.c.m.{"270","-3120"}="28080
"Identidad de Bezout: "30" = "-3120"·("-2") + "270"·("-23")."
```

```
m.c.d.{15,24}=3
```

```
m.c.m.{15,24}=120
```

```
Identidad de Bezout: 3 = 24·(2) + 15·(-3).
```

Paso 2: Calculamos k=$\frac{c}{d}$ y vemos si es entero.

```
k = 10 / 3
```

$$\frac{10}{3}$$

como k =$\frac{c}{d}$ no es entero, la ecuación no admite solución entera y no es posible obtener 10 litros combinándolas entre las dos.

b) Para responder ahora a la segunda pregunta buscamos soluciones enteras de la ecuación 15x + 24y = 12, de forma que seguiremos los pasos para resolver dicha ecuación:

Paso 1: Aplicamos el programa 11.2. y obtenemos

```
Clear[valor1, valor2];
n1 = 15;
n2 = 24;
If[Abs[n1] > Abs[n2], temp = n1; n1 = n2; n2 = temp];
Signo1 = n1 / Abs[n1];
Signo2 = n2 / Abs[n2];
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b;
  b = Abs[n1];
  n3 = a;
  n4 = b;];
If[Mod[n2, n1] == 0, Valoru = 0; Valordev = Signo1; a = b;, r = 1;
 cocientes = {};
 s = 0;
 While[r > 0, q = Quotient[a, b];
  r = Mod[a, b];
  a = b;
  b = r;
  s = s + 1;
  AppendTo[cocientes, q];];
 listam = Table[0, {i, s}];
 listam[[1]] = valor1;
 listam[[2]] = valor2;
 For[f = 3, f < s + 1, f++,
  listam[[f]] = listam[[f - 2]] - (listam[[f - 1]] * cocientes[[f - 2]])];
 Bezout := Simplify[listam[[s - 1]] - (listam[[s]] * cocientes[[s - 1]])];
 valor1 = 1;
 valor2 = 0;
 Valoru = Bezout;
 valor1 = 0;
 valor2 = 1;
 Valordev = Bezout;
 Valoru = Valoru * Signo2;
 Valordev = Valordev * Signo1;]
Print["m.c.d.{", n1, ",", n2, "}=", a]
Print["m.c.m.{", n1, ",", n2, "}=", (n3 * n4) / a]
Print["Identidad de Bezout: ", a, " = ",
 n2, "·(", Valoru, ") + ", n1, "·(", Valordev, ")."]
"m.c.d.{"270","-3120"}="30
"m.c.m.{"270","-3120"}="28080
"Identidad de Bezout: "30" = "-3120"·("-2") + "270"·("-23")."
```

```
m.c.d.{15,24}=3
```

```
m.c.m.{15,24}=120
```

```
Identidad de Bezout: 3 = 24·(2) + 15·(-3).
```

<u>Paso 2:</u> Calculamos k=$\frac{c}{d}$ y vemos si es entero.

```
k = 12 / 3
```

```
4
```

Como es entero la ecuacion admite solución, para ello

<u>Paso 3:</u> Multiplicamos la Identidad de Bezout por el k obtenido en el paso anterior

```
x = (-3) * k
y = (2) * k
```

```
-12
```

```
8
```

Así para obtener los 12 litros, lo hemos conseguido de la forma 12 = 15(-12) + 24(8); es decir, echaremos en primer lugar 8 cubetas de 24 litros y luego quitaremos 12 cubetas de 15 litros.