11. Números naturales y enteros. Divisibilidad

Ejemplos con Mathematica

1. Divisibilidad en números enteros

■ Ejemplo 11.1.

Utilizando un bucle, escribir un programa usando la definición de número primo que haga lo mismo que PrimeQ[]

In[448]:=
```
n = NÚMERO;
primo = True;
n = Abs[n];
If[n == 0 || n == 1, primo = False,
  Do[If[Mod[n, i] == 0, primo = False], {i, 2, n - 1}];
 ];
primo
```

Out[452]=
```
True
```

Aplicarlo al número 541

In[453]:=
```
n = 541;
primo = True;
n = Abs[n];
If[n == 0 || n == 1, primo = False,
  Do[If[Mod[n, i] == 0, primo = False], {i, 2, n - 1}];
 ];
primo
```

Out[457]=
```
True
```

■ Ejemplo 11.2.

Calcular el cociente y el resto de los siguientes números enteros

In[458]:=
```
Quotient[7, 4]
Mod[7, 4]
```
Out[458]= 1

Out[459]= 3

In[460]:=
```
Quotient[-7, 4]
Mod[-7, 4]
```
Out[460]= -2

Out[461]= 1

Sin embargo, observemos que

In[462]:=
```
Quotient[7, -4]
Mod[7, -4]
```
Out[462]= -2

Out[463]= -1

y

In[464]:=
```
Quotient[-7, -4]
Mod[-7, -4]
```
Out[464]= 1

Out[465]= -3

no son los cocientes y restos que verifican el algoritmo de la división pues los restos son negativos. Así el programa falla al calcular cocientes y restos con divisores negativos.

2. Algoritmo de Euclides

■ Ejemplo 11.3.

Calcular, usando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 34 y -218

In[466]:=
```
n1 = 34;
n2 = -218;
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b; b = Abs[n1];];
m = 1;
While[m > 0, m = Mod[a, b];
  a = b;
  b = m;
 ];
Print["m.c.d.(", n1, ",", n2, ")=", a]
Print["m.c.m.(", n1, ",", n2, ")=", Abs[(n1*n2) / a]]
```

```
m.c.d.(34,-218)=2
```

```
m.c.m.(34,-218)=3706
```

3. Identidad de Bezout

■ Ejemplo 11.4.

Calcular la identlidad de Bezout para 270 y -3120

Aplicando el programa 11.2., obtenemos

In[475]:=

```
Clear[valor1,valor2];
n1=270;
n2=-3120;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{270,-3120}=30
```

```
m.c.m.{270,-3120}=28080
```

```
Identidad de Bezout: 30 = -3120·(-2) + 270·(-23).
```

4. Resolución de ecuaciones diofánticas

■ Ejemplo 11.5.

Resolver, si es posible, la ecuación diofántica

$$270\,x - 3120\,y = -60$$

<u>Paso 1:</u> Aplicamos el programa 11.2. y obtenemos

In[488]:=
```
Clear[valor1,valor2];
n1=270;
n2=-3120;
If[Abs[n1]>Abs[n2], temp=n1; n1=n2; n2=temp];
Signo1=n1/Abs[n1];
Signo2=n2/Abs[n2];
a=Abs[n1];
b=Abs[n2];
If [a<b,a=b;
    b=Abs[n1];
    n3=a;
    n4=b;
];
If[Mod[n2,n1]==0,Valoru=0;Valordev=Signo1;a=b;,
r=1;
cocientes={};
s=0;
While[r>0,
    q=Quotient[a,b];
    r=Mod[a,b];
    a=b;
    b=r;
    s=s+1;
    AppendTo[cocientes,q];
];
listam=Table[0,{i,s}];
listam[[1]]=valor1;
listam[[2]]=valor2;
For [f=3,f<s+1,f++,
listam[[f]]=listam[[f-2]]-(listam[[f-1]]*cocientes[[f-2]])
];
Bezout:=Simplify[listam[[s-1]]-(listam[[s]]*cocientes[[s-1]])];
valor1=1;
valor2=0;
Valoru=Bezout;
valor1=0;
valor2=1;
Valordev=Bezout;
Valoru=Valoru*Signo2;
Valordev=Valordev*Signo1;
]
Print["m.c.d.{",n1,",",n2,"}=",a]
Print["m.c.m.{",n1,",",n2,"}=",(n3*n4)/a]
Print["Identidad de Bezout: ",a," = ",n2,"·(",Valoru,") + ",n1,"·(",Valord
```

```
m.c.d.{270,-3120}=30
```

```
m.c.m.{270,-3120}=28080
```

```
Identidad de Bezout: 30 = -3120·(-2) + 270·(-23).
```

<u>Paso 2:</u> Calculamos k = $\frac{c}{d}$ y vemos si es entero.

In[501]:=
```
k = -60 / 30
```
Out[501]=
```
-2
```

Paso 3: Multiplicamos la Identidad de Bezout por el k obtenido en el paso anterior y una solución para la ecuación es:

In[502]:=
```
x = (-23) * k
y = (-2) * k
```
Out[502]=
```
46
```
Out[503]=
```
4
```

Paso 4: Todas la soluciones enteras para la ecuación serán, para cada $t \in \mathbb{Z}$:

In[504]:= $x = 46 + t\,\frac{-3120}{30}$

Out[504]=
```
-399314
```

In[505]:= $y = 4 - t\,\frac{270}{30}$

Out[505]=
```
-34556
```

■ Ejemplo 11.6.

Resolver, si es posible, la ecuación diofántica

$$-27x - 312y = 25$$

Paso 1: Aplicamos el programa 11.2. y obtenemos

In[506]:=
```
Clear[valor1, valor2];
n1 = -27;
n2 = -312;
If[Abs[n1] > Abs[n2], temp = n1; n1 = n2; n2 = temp];
Signo1 = n1 / Abs[n1];
Signo2 = n2 / Abs[n2];
a = Abs[n1];
b = Abs[n2];
If[a < b, a = b;
  b = Abs[n1];
  n3 = a;
  n4 = b;];
If[Mod[n2, n1] == 0, Valoru = 0; Valordev = Signo1; a = b;, r = 1;
 cocientes = {};
 s = 0;
 While[r > 0, q = Quotient[a, b];
  r = Mod[a, b];
  a = b;
  b = r;
  s = s + 1;
  AppendTo[cocientes, q];];
 listam = Table[0, {i, s}];
 listam[[1]] = valor1;
 listam[[2]] = valor2;
 For[f = 3, f < s + 1, f++,
  listam[[f]] = listam[[f - 2]] - (listam[[f - 1]] * cocientes[[f - 2]])];
 Bezout := Simplify[listam[[s - 1]] - (listam[[s]] * cocientes[[s - 1]])];
 valor1 = 1;
 valor2 = 0;
 Valoru = Bezout;
 valor1 = 0;
 valor2 = 1;
 Valordev = Bezout;
 Valoru = Valoru * Signo2;
 Valordev = Valordev * Signo1;]
Print["m.c.d.{", n1, ",", n2, "}=", a]
Print["m.c.m.{", n1, ",", n2, "}=", (n3 * n4) / a]
Print["Identidad de Bezout: ", a, " = ",
 n2, "·(", Valoru, ") + ", n1, "·(", Valordev, ")."]
"m.c.d.{"270","-3120"}="30
"m.c.m.{"270","-3120"}="28080
"Identidad de Bezout: "30" = "-3120"·("-2") + "270"·("-23")."
```

```
m.c.d.{-27,-312}=3
```

```
m.c.m.{-27,-312}=2808
```

```
Identidad de Bezout: 3 = -312·(-2) + -27·(23).
```

Out[519]=
```
m.c.d.{270,-3120}=30
```

Out[520]=
```
m.c.m.{270,-3120}=28080
```

Out[521]=
```
Identidad de Bezout: 30 = -3120·(-2) + 270·(-23).
```

Paso 2: Calculamos k = $\frac{c}{d}$ y vemos si es entero.

In[522]:=
```
k = 25 / 30
```

Out[522]= $\frac{5}{6}$

como k no es entero, d no divide a c y la ecuación no admite solución entera.

5. Ejercicios

■ Ejercicio 11.15.

Número de segundo totales

In[523]:=
```
segundos[años_, meses_, dias_, horas_, minutos_, segundos_] :=
 Module[{seg},
  seg = (((((años * 12 + meses) * 30 + dias) * 24) + horas) * 60) + minutos) * 60 +
    segundos;
  seg]
```

In[524]:=
```
segundos[2, 7, 12, 11, 32, 45]
```

Out[524]=
```
81430365
```