

# Práctica 9

## Curvas parametrizadas planas y alabeadas

### Definición de una curva parametrizada plana y una curva parametrizada alabeada:

Las curvas parametrizadas son aplicaciones del tipo:

$$\alpha(t) = \{x(t), y(t)\} \text{ curva plana}$$

$$\alpha(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \text{ curva alabeada}$$

```
ocho[t_]:= {Sin[t], Sin[t]Cos[t]}
```

```
helice[t_] := {Cos[t], Sin[t], t}
```

### Representación gráfica con ParametricPlot y ParametricPlot3D

`ParametricPlot[{x(t), y(t)}, {t, t0, t1}]`

`ParametricPlot3D[{x(t), y(t), z(t)}, {t, t0, t1}]`

```
ParametricPlot[ocho[t], {t, -π, π}]
```

```
ParametricPlot3D[helice[t], {t, 0, 6 π}]
```

```
SetOptions[ParametricPlot, Ticks -> None, AspectRatio -> Automatic]
```

```
SetOptions[ParametricPlot3D, Axes -> None]
```

Podemos dibujar a la vez varias curvas:

`ParametricPlot[{α1(t), α2(t)...}, {t, t0, t1}]` con  $\alpha_1(t) = \{x_1(t), y_1(t)\}$ ,  $\alpha_2(t) = \{x_2(t), y_2(t)\}$

`ParametricPlot3D[{β1(t), β2(t)...}, {t, t0, t1}]` con  $\beta_1(t) = \{x_1(t), y_1(t), z_1(t)\}$ ,  $\beta_2(t) = \{x_2(t), y_2(t), z_2(t)\}$

```
ParametricPlot[{t Cos[5 t], t Sin[5 t]}, {40 Cos[t]^3, 40 Sin[t]^3},
{t, 0, 14 π}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

```
ParametricPlot3D[{t Cos[t], t Sin[t], t}, {10 Sin[t], 10 Cos[t], -2 t},
{t, 0, 20 π}, PlotPoints -> 300, Boxed -> False]
```

```
ParametricPlot3D[Append[{Cos[5 t], Sin[6 t], Cos[t]}, RGBColor[0, 0.7, 1]],
{t, 0, 2 π}, PlotPoints -> 150]
```

### Construcción de una recta tangente: Curva ocho(t)

Lo primero que tenemos que ver es que ocho[t] debe ser una curva regular (para poder hablar de rectas tangentes):

```
ocho'[t]
```

```
Solve[ocho'[t] == {0, 0}, t]
```

La recta tangente de esta curva ocho[t] en el punto  $t = \frac{\pi}{6}$  es aquella que pasa por el punto  $\text{ocho}[\frac{\pi}{6}]$  con vector director  $\text{ocho}'[\frac{\pi}{6}]$ :

```
ocho[ $\frac{\pi}{6}$ ]
```

```
ocho'[ $\frac{\pi}{6}$ ]
```

$$\text{recta}[t] = \text{ocho}\left[\frac{\pi}{6}\right] + t \text{ocho}'\left[\frac{\pi}{6}\right] = \left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}t\right\}$$

Dibujo de la curva junto con su recta tangente:

```
ParametricPlot[{ocho[t], ocho[ $\frac{\pi}{6}$ ] + t ocho'[ $\frac{\pi}{6}$ ]},
{t, -π, π}, Epilog -> {PointSize[0.02], Point[ocho[ $\frac{\pi}{6}$ ]]}]
```

*Construcción del Triedro de Frenet para una curva alabeada cualquiera:*

Tomando  $\alpha(s)=\{x(s), y(s), z(s)\}$  una curva parametrizada por el arco (esto es,  $s=\int_{t_0}^t \sqrt{\alpha'[t] \cdot \alpha'[t]} dt$ ).

El triedro de Frenet se obtiene de las fórmulas:

```
T[α_][s_] := FullSimplify[α'[s]]
```

```
n[α_][s_] := FullSimplify[
$$\frac{\alpha''[s]}{\sqrt{\alpha''[s] \cdot \alpha''[s]}}$$
]
```

```
b[α_][s_] := FullSimplify[T[α][s] * n[α][s]]
```

Y las funciones curvatura y torsión se obtienen de las fórmulas:

```
K[α_][s_] := FullSimplify[
$$\sqrt{\alpha''[s] \cdot \alpha''[s]}$$
]
```

```
τ[α_][s_] := FullSimplify[D[n[α][s], s] . b[α][s]]
```

**Ejemplo : Curva helice (t)**

Lo primero que tenemos que ver es que helice[t] debe ser una curva regular (para poder hablar de triedro de Frenet):

```
Solve[helice'[t] == {0, 0, 0}, t]
```

Su función longitud de arco es:

```
Solve[
$$\int_0^t \sqrt{\text{helice}'[w] \cdot \text{helice}'[w]} dw == s, t]$$

```

```
hel[s_] := helice[t] /. t -> 
$$\frac{s}{\sqrt{2}}$$

```

```
hel[s]
```

```
T[hel][s]
```

```
n[hel][s]
```

```
b[hel][s]
```

```
K[hel][s]
```

```
 $\tau$ [hel][s]
```

La recta tangente, recta normal y recta binormal de esta curva  $hel(s)$  en el punto  $s=0$  son:

```
rectang =  
  ParametricPlot3D[Append[hel[0] + s T[hel][0], RGBColor[1, 0, 0]], {s, -5, 5}]
```

```
recnor =  
  ParametricPlot3D[Append[hel[0] + s n[hel][0], RGBColor[0, 0, 1]], {s, -10, 10}]
```

```
recbi =  
  ParametricPlot3D[Append[hel[0] + s b[hel][0], RGBColor[0, 1, 0]], {s, -5, 5}]
```

```
ParametricPlot3D[Append[hel[s], Thickness[0.012]], {s, -5, 10}]
```

```
Show[%, rectang, recnor, recbi, Graphics3D[{PointSize[0.02], Point[hel[0]}],  
  ViewPoint -> {2.734, 1.806, 0.845}]
```

---

## Superficies de revolución

Con el paquete gráfico `SurfaceOfRevolution` *Mathematica* nos permite dibujar las superficies de revolución generadas por la rotación sobre el eje  $z$  de una curva parametrizada  $\alpha(t)=\{x(t),z(t)\}$  en el plano  $xz$  (ó plano  $yz$ )

```
<< Graphics`SurfaceOfRevolution`
```

```
SurfaceOfRevolution[{x[t], z[t]}, {t, a, b}]
```

```
SurfaceOfRevolution[{2 + Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2  $\pi$ }]
```

```
ParametricPlot3D[Append[{2 + Cos[t], 0, Sin[t]}, Thickness[0.015]], {t, 0, 2  $\pi$ }]
```

```
Show[%, %%]
```

## Ejemplos de algunas curvas parametrizadas planas:

### 1) FUNCIONES EXPLÍCITAS:

i) Ecuación explícita:  $y = f(x)$

ii) Ecuación paramétrica:  $\alpha(t) = \{t, f(t)\}$ .

### 2) CIRCUNFERENCIA:

i) Ecuaciones implícitas:  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ii) Ecuación paramétrica:  $\alpha(t) = \{h+r \cos(t), k+r \sin(t)\} \quad 0 \leq t < 2\pi$

### 3) ELIPSE:

i) Ecuaciones implícitas:  $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

ii) Ecuación paramétrica:  $\alpha(t) = \{h+a \cos(t), k+b \sin(t)\} \quad 0 \leq t < 2\pi$

### 4) HIPÉRBOLA:

i) Ecuaciones implícitas:  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  (Eje mayor OX);  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$  (Eje mayor OY)

ii) Ecuación paramétrica:  $\alpha(t) = \{h+a \cosh(t), k+b \sinh(t)\} \quad t \in \mathbb{R}; \quad \alpha(t) = \{h+b \sinh(t), k+a \cosh(t)\} \quad t \in \mathbb{R}$

donde  $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$   $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  (funciones hiperbólicas, y verifican:  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ )

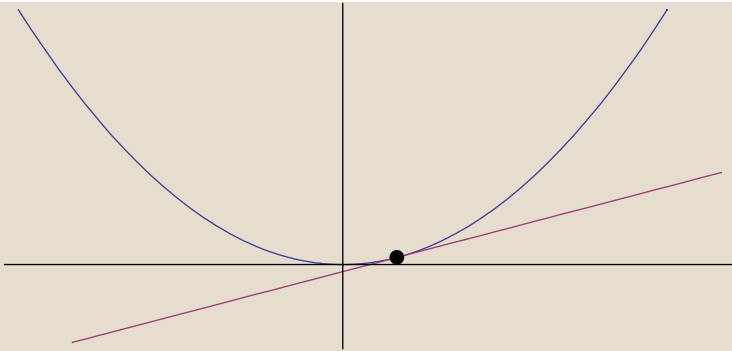
### 5) PARÁBOLA:

i) Ecuaciones implícitas:  $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$  (Eje OX);  $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$  (Eje OY)

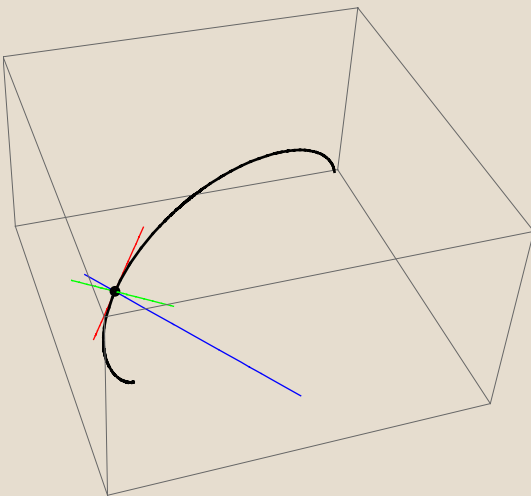
ii) Ecuación paramétrica:  $\alpha(t) = \{h \pm \frac{t^2}{4p}, k+t\} \quad t \in \mathbb{R}; \quad \alpha(t) = \{h+t, k \pm \frac{t^2}{4p}\} \quad t \in \mathbb{R}$

## Ejercicios

1.-Dibuja la curva parametrizada que obtenemos con la función  $y = \frac{x^2}{4}$  junto con la recta tangente a la misma en el punto  $x=?$ .



2.-Calcula el triedro de Frenet de la curva parametrizada  $c(t)=(a e^t \cos(t), a e^t \sin(t), e^t)$ , con  $a=?$ , viendo primero que es regular (recuerda parametrizar la curva por la función longitud de arco para calcular su triedro de Frenet).



3.-Dibuja una esfera de centro el origen y radio  $r=?$  vista como superficie de revolución.

