



EXAMEN DE ÁLGEBRA

Grados en Ingeniería Informática y en Ciberseguridad e Inteligencia Artificial CURSO 2025/26. Convocatoria ordinaria 2

Nombre: _____ DNI: _____ Gr. Teoría: _____

Eval. continua:	Grafos:	<input type="checkbox"/> Sí. Nota: _____	<input type="checkbox"/> NO, RENUNCIO.	Gr. Prácticas: _____
				Calificación: _____

1. [10 puntos] Obtener la factorización del polinomio $p(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$, sabiendo que es de grado 6, con **únicas raíces** simples 0 y $3/2$ y que es **divisible** por $(x^2 + x + 1)$ y $(x + 1)$. Calcular el **máximo común divisor** del polinomio anterior y $q(x) = 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x$ en el anillo $\mathbb{R}[x]$.

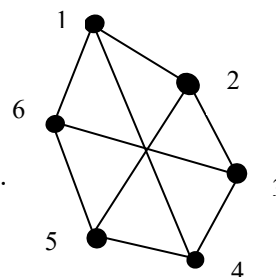
2. [10 puntos]

A) [7 puntos] Sea $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función real de variable real definida por $f_a(x) = x + a$ con a un número real fijo. Sea $G = \{f_a / a \in \mathbb{R}\}$ el subconjunto de las funciones reales de variable real cuyos elementos son todas las funciones definidas previamente. Comprobar que G con la composición es un **grupo abeliano**.

B) [3 puntos] Calcular un subgrupo de **orden** mayor que 1 de $G \times S_5$.

3. [10 puntos] Dado el grafo G del dibujo:

- Calcular la matriz de adyacencia del grafo G .
- Enunciar el teorema del número de caminos y **usarlo** para calcular el número de caminos de longitud menor o igual a 2 entre los vértices 1 y 3.
- Explica como usarías el teorema anterior para estudiar si G es de **Euler**.
- Demostrar si G es **isomorfo** a algún grafo bipartito completo.



4. [15 puntos]

A) [5 puntos] En $P_3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en \mathbb{R} , sea U el **subespacio vectorial** generado por el conjunto de polinomios

$$S = \{x^2 + 1, \frac{3}{21} - \frac{23}{5}x^2, 2\}.$$

Obtener, de forma razonada, una **base** B , la **dimensión**, las ecuaciones paramétricas e implícitas de U .

B) [10 puntos] Sea U el subespacio del apartado anterior y en el consideramos el producto escalar:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx + \int_0^1 p'(x)q'(x)dx$$

Calcular la matriz de Gram respecto de la base B de U obtenida en el apartado anterior. ¿Es B una **base ortogonal**? En caso negativo, usar Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal.

5. [15 puntos] Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$ y $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ el endomorfismo del que sabemos que

$$f(u_1) = 2u_1 - u_4, \quad f(u_2) = 2u_2 - u_3, \quad f(u_3) = -u_2 + 2u_3 \quad \text{y} \quad f(u_4) = -u_1 + 2u_4$$

- Obtener la matriz A asociada a f respecto de la base B .
- Calcular, de forma razonada, las ecuaciones paramétricas del $\text{Ker}(f)$ y las ecuaciones implícitas de $\text{Im}(f)$.
- Comprobar que f es diagonalizable por semejanza. Usar lo anterior para razonar si es posible obtener A^{-3} . En caso afirmativo, explicar cómo se obtendría.