EXAMEN DE ÁLGEBRA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

CONVOCATORIA ORDINARIA 2. Curso 2024-25

Nombre:______________________________________ DNI:__________

Evaluación Continua:	1º Polinomios y grupos: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	2º Grafos: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	**Prácticas:** Apto. Nota______

1. [10 *puntos*]

A) [7 *puntos*] Aplicar, si es posible, el algoritmo de Euclides para calcular en $\mathbb{Z}_7[x]$ el máximo común divisor de los polinomios

$$p(x) = 32 + 80x + 96x^2 + 64x^3 + 24x^4 + 4x^5 \quad \text{y} \quad q(x) = -2x^3 + 2x^2 + 8x + 12.$$

B) [3 *puntos*] Razonar la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "En el anillo de polinomios $\mathbb{Z}_7[x]$ el polinomio $2x^3 - 2x^2 - 8x - 12$ es irreducible".

2. [10 *puntos*]

A) [5 *puntos*] En S_5 consideramos la siguiente permutación:

$$\sigma = (2\ 4)\ (3\ 4\ 1)^2\ (1\ 2)$$

Comprobar si σ es un ciclo. ¿Pertenece a A_5? ¿Es cierto que $\sigma^{-1} = (3\ 4\ 1)$?

B) [5 *puntos*] Consideremos $H = \{\sigma^n / n \in \mathbb{Z}^+\}$. Demostrar si H es un subgrupo de A_5.

3. [10 *puntos*] Razonar la veracidad o falsedad de cada implicación en la siguiente afirmación:

"Dado G un (8, 8)-grafo 2-coloreable, entonces

G es de Euler si y solo si G es 2-regular".

4. [15 *puntos*] Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$.

A) [7.5 *puntos*] Considerar el subconjunto $U = \{p'(x) : p(x) \in V\}$, siendo $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$ respecto la variable x. Demostrar que U es subespacio vectorial de V. Obtener, de forma razonada, base, dimensión, ecuaciones paramétricas e implícitas de U.

B) [7.5 *puntos*] Consideremos en V el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dado $p(x) = 2 + 2x + x^2$. ¿Es $p(x)$ unitario? Calcular un polinomio no nulo perpendicular a $p(x)$. ¿Qué ángulo forma $p(x)$ con el polinomio x^2 ?

5. [15 *puntos*] Sea f: $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ la aplicación definida por

$$f(A) = \begin{pmatrix} tr(A) & 0 \\ 0 & -tr(A) \end{pmatrix}$$

donde $tr(A)$ es la traza de la matriz A. Se pide:

a) Demostrar que f es un endomorfismo.
b) Calcular M la matriz asociada a f respecto de la base $B = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
c) Calcular bases del núcleo y la imagen de f. Clasificar f.
d) Calcular, si existe, una base B' respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Nota: Incluir todos los enunciados y definiciones subrayadas. Si se opta por la evaluación continua en teoría es necesario sacar una media mínima de 4 sobre 10 en las preguntas que realice en este examen. Entregar cada ejercicio en un folio y en orden ascendente.