UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE JAÉN

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

# ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática)

CURSO 2024/25. Convocatoria Extraordinaria 2.

Apellidos y nombre: _______________________________________ DNI: ___________

| **Evaluación Continua:** | 1º Polinomios y grupos:<br>☐ SÍ. Nota: _____<br>☐ NO, RENUNCIO. | 2º Grafos:<br>☐ SÍ. Nota: _____<br>☐ NO, RENUNCIO. | **Prácticas:**<br>Apto. Nota______ |
|---|---|---|---|

**1.** [10 *puntos*] **A)** [7 *puntos*] Factorizar en irreducibles y calcular las raíces del polinomio

$$p(x) = 12 - 60x + 16x^2 - 80x^3 + 4x^4 - 20x^5$$

en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_{11}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$, sabiendo que $p(x)$ no tiene raíces enteras.

**B)** [3 *puntos*] Razonar si es posible encontrar un polinomio mónico de grado 3, $q(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$, verificando que el máximo común divisor de $p(x)$ y $q(x)$ en $\mathbb{Z}_{11}[x]$, sea $4+5x^2$.

**2.** [10 *puntos*] Sea $G = (\mathbb{Z}_5, *)$ con operación $x*y = x + y + 3$. Se pide:

**A)** Comprobar, de forma analítica, si $G$ es un grupo.

**B)** Dado el producto cartesiano $S_3 \times G$, definir una operación que lo dote de estructura de grupo y obtener, si es posible, un subgrupo de orden 3 y otro de orden 5. ¿Existen subgrupos de orden 4? Razonar la respuesta.

**3.** [10 *puntos*] **A)** Estudiar si $K_4$ y $K_{2,2}$ son grafos isomorfos.

**B)** Razonar para qué valores de $p \in \mathbb{Z}^+$, pares y distintos de 2, existe un grafo G, cuya representación gráfica es un polígono de $p$ vértices, isomorfo al grafo bipartito completo $K_{m,m}$ donde $m = \frac{p}{2}$.

**4.** [10 *puntos*] Sea $V$ un espacio vectorial euclídeo cuyo producto escalar tiene matriz de Gram respecto de la base $B = \{v_1, v_2\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

**a)** Razonar si $B$ es una base ortonormal. Usar Gram-Schmidt, para calcular una base ortonormal, B´, a partir de $B$.

**b)** Calcular la matriz de Gram, G', respecto de la base B´ obtenida en el apartado anterior ¿Qué relación hay entre G y G'? Comprobarlo explícitamente.

**5.-** [20 *puntos*] Consideremos la aplicación lineal $f\colon P_1(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ donde } a \in \mathbb{C} \text{ es un parámetro.}$$

**a)** Calcular la imagen mediante $f$ del polinomio $1+2x$.

**b)** Calcular, según los valores de $a$, dimensión, base, paramétricas e implícitas del núcleo y la imagen de $f$.

**c)** Razonar si $M_2(\mathbb{C})$ y $P_1(\mathbb{C})$ son isomorfos.

**d)** Calcula la matriz $AA^t$ y razona si es simétrica.

**e)** Para $a = -i$, demostrar si la matriz $AA^t$ es diagonalizable por semejanza y, si es posible, calcular una matriz diagonal D, y una matriz regular, P, tal que $D = P^{-1}(AA^t)P$.

NOTA:
Incluir las definiciones de los conceptos subrayados. Se evalúan los procedimientos y, por tanto, estos deben explicarse de forma clara (no son válidos los resultados sin razonarlos). Entregar cada ejercicio en un folio y en orden ascendente.