UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Matemáticas
Área de Álgebra

EXAMEN DE ÁLGEBRA
GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
CONVOCATORIA ORDINARIA 2. Curso 2023-24.

Nombre:____ DNI:__________

Evaluación Continua:	1º Polinomios y grupos: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	2º Grafos: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	**Prácticas:** Apto. Nota______

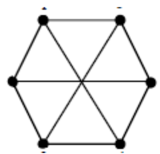
1. [10 *puntos*] **A)** [7 *puntos*] Calcular las raíces y factorizar en irreducibles el polinomio

$$p(x) = 60x^2 - 300x^3 - 20x^4 + 100x^5$$

en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_7[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$.
B) [3 *puntos*] Estudiar si el polinomio $x^2 + 5x$ tiene cuatro raíces distintas en $\mathbb{Z}_6[x]$. Calcular, si es posible, cómo factoriza este polinomio a través de dichas raíces.

2. [10 *puntos*] **A)** [5 *puntos*] Definir una operación en $\mathbb{Z}_4$ que lo dote de estructura de grupo, de forma que el elemento neutro sea $\bar{1}$ y $\bar{a}^2 = \bar{1}$ para todo $\bar{a} \in \mathbb{Z}_4$. Hacer todas las comprobaciones.
B) [*5 puntos*] Definir, si es posible, una operación en $\mathbb{Z}_4 \times S_3$ de forma que tenga estructura de grupo. Calcular, si es posible, dos subgrupos distintos de orden 6 y otro de orden 5.

3. [10 *puntos*] Dado G el grafo de la figura:
A) Calcular la matriz de adyacencia y su número cromático.
B) ¿Es G isomorfo a algún grafo bipartito completo? En caso afirmativo, comprobarlo explícitamente.



4. [5 *puntos*] Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Considerar el subconjunto

$$U = \{p(x) : p(0) = p(1)\}$$

Demostrar que U es subespacio vectorial de V. Obtener, de forma razonada, base, dimensión, ecuaciones paramétricas e implícitas de U.

5. [*10 puntos*] Sea V un espacio vectorial euclídeo cuya matriz de Gram respecto de la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 9a^2 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.
A) Calcular, según los valores de a, todos los vectores que sean perpendiculares al vector e_3 .¿Es $e_1 + 2e_2$ uno de ellos?
B) Razonar si B es una base ortonormal. En su caso, usar Gram-Schmidt, para calcular una base ortonormal, a partir de B.

6.- [*15 puntos*] Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ del que sabemos que $(1,-1,0) \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(0,0,1) = (0,0,-5)$ y que 3 es un valor propio al que está asociado el vector $(1,1,-1)$.
i) Demostrar que $B = \{(1,-1,0), (0,0,1), (1,1,-1)\}$ es base.
ii) Calcular A, la matriz asociada a f respecto de la base B.
iii) Calcular, de forma razonada, dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas del Ker(f) e Im(f).
iv) Clasificar f.
v) Obtener, si es posible, una matriz D, diagonal, y una matriz regular, P, tal que $D = P^{-1} A P$.

Nota: Incluir todos los enunciados y definiciones subrayadas. Si se opta por la evaluación continua en teoría es necesario sacar un mínimo de 4 sobre 10 en el bloque de álgebra lineal. Entregar cada ejercicio en un folio y en orden ascendente.