UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE JAÉN

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática)
CURSO 2023/24. Convocatoria Extraordinaria 2.

Apellidos y nombre: ____ DNI: ___________

Evaluación Continua:	1º Polinomios y grupos:	2º Grafos:	Prácticas:
	☐ SÍ. Nota: _____	☐ SÍ. Nota: _____	Apto. Nota______
	☐ NO, RENUNCIO.	☐ NO, RENUNCIO.	

1. [10 *puntos*] Dados los polinomios

$$p(x) = -2x + 7x^2 + 22x^3 - 23x^4 - 56x^5 - 20x^6 \quad \text{y} \quad q(x) = 3x^2 - 16x^3 + 5x^4$$

Usar el algoritmo de Euclides para obtener, si es posible, el máximo común divisor de ambos en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Z}_7[x]$. ¿Es el polinomio $x(3x^2 + 3x + 6)$ un asociado al m.c.d de ambos en $\mathbb{Z}_7[x]$?

2. [10 *puntos*]

A) Consideremos $G = \{\sigma^2 / \sigma \in S_3\}$, donde S_3 es el grupo de permutaciones de tres elementos. Demostrar que G es un subgrupo de S_3 y obtener todos sus subgrupos.

B) Dado el producto cartesiano $S_3 \times 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_7$, definir una operación que lo dote de estructura de grupo y obtener un subgrupo de orden 3 y otro infinito cuya segunda componente no sea un subgrupo propio de $2\mathbb{Z}$. ¿Existen subgrupos de orden 9? Razonar la respuesta.

3. [10 *puntos*] Dado G el grafo cuyas componentes conexas son K_2 y $K_{1,3}$. Se pide:

A) Calcular su matriz de adyacencia.

B) Comprobar si G es de Euler. ¿Es alguna de sus componentes conexas de Euler?

C) ¿Es G un árbol?

D) Usar el teorema del número de caminos para calcular el número de caminos de longitud 2 entre cualquiera de sus vértices.

4. [15 *puntos*] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula el rango de A usando su forma normal de Hermite. Obtener de forma razonada, base, dimensión y ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / AX = 2X\}$.

Con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$, calcular los vectores perpendiculares a todos los vectores de U. ¿Qué ángulo forma los vectores de la base de U con el vector (1, 0, 0, 0)? ¿Es la base de U ortogonal? Obtener una base ortonormal de U.

5.- [15 *puntos*] Dado el endomorfismo $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & \lambda d \\ \lambda b & c+d \end{pmatrix}$$ donde λ es un parámetro.

a) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica.

b) Obtener una base de imagen de f y clasificar f según el valor del parámetro λ.

c) ¿Es alguno de los vectores de la base canónica un vector propio de f?

d) Estudiar si f es un endomorfismo diagonalizable para algún valor del parámetro λ.

NOTA:
Incluir las definiciones de los conceptos subrayados. Recuerden que se evalúan los procedimientos y por tanto, estos deben explicarse de forma clara (no son válidos los resultados sin razonarlos).