



## ÁLGEBRA (Grado en Estadística y Empresa) CURSO 2025/26. Convocatoria Ordinaria 1.

Apellidos y nombre: \_\_\_\_\_ DNI: \_\_\_\_\_

| Evaluación | 1. Temas 1 y 2:                                                                    | 2. Ev euclídeo:                                                                    | 3. Aplicaciones lineales:                                                          | 4. Prácticas |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Continúa:  | <input type="checkbox"/> Sí. Nota: _____<br><input type="checkbox"/> NO, RENUNCIO. | <input type="checkbox"/> Sí. Nota: _____<br><input type="checkbox"/> NO, RENUNCIO. | <input type="checkbox"/> Sí. Nota: _____<br><input type="checkbox"/> NO, RENUNCIO. | Nota:        |

1. [5 puntos] Si  $n$  y  $b$  son números naturales ( $b \geq 2$ ) y  $n = b^2x + by + z$ , entonces escribimos

$$n = (x \ y \ z)_b.$$

Calcular números naturales  $x, y, z$ , si existen, tales que  $107 = (x \ y \ z)_5$ ,  $152 = (x \ y \ z)_6$  y  $266 = (x \ y \ z)_8$  ¿Cuántos hay? Razona la respuesta.

2. [5 puntos] Sea  $V = M_2(\mathbb{R})$  y  $U$  el subespacio vectorial generado por

$$S_{\text{gen}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 30 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U$ .

3. [10 puntos] Sea  $V = M_2(\mathbb{R})$  el espacio vectorial euclídeo con producto escalar  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^t)$ .

- Definir producto escalar y demostrar la simetría en este caso.
- Calcular una base  $B_U$  del subespacio  $U$  del ejercicio 2 y la matriz de Gram,  $G$ , respecto de esta base  $B_U$ .
- Razonar si  $B_U$  es una base ortonormal. Calcular una base ortonormal,  $B'$ , a partir de  $B_U$ .
- ¿Cuál es la matriz de Gram,  $G'$ , respecto de la base  $B'$  del apartado anterior? ¿Qué relación hay entre  $G$  y  $G'$ ?

4. [10 puntos] Sea  $f: U \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$  la aplicación definida por  $f(A) = A + 2A^t$ , siendo  $U$  el subespacio vectorial del ejercicio 2. Se pide:

- Demostrar que  $f$  es lineal.
- Calcular una base,  $B_U$ , de  $U$ .
- Calcular la matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B_U$  del apartado anterior y la base de  $M_2(\mathbb{R})$  obtenida de la canónica permutando los elementos 3 y 4.
- Razonar si  $U$  es isomorfo al espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 1 con coeficientes en  $\mathbb{R}$  ¿Y a  $M_2(\mathbb{R})$ ?

5. [10 *puntos*] Sea  $f$  el endomorfismo en un espacio vectorial real cuya matriz asociada, respecto de una base  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Razonar si  $A$  es semejante a una matriz diagonal,  $D$ , y calcularla en su caso.
- ¿Es  $A$  diagonalizable por semejanza ortogonal? Razonar la respuesta.
- Definir valor singular y calcular los valores singulares de la matriz,  $C$ , formada por las tres primeras columnas de  $A$ . Calcula la matriz  $\Sigma$  que interviene en la descomposición en valores singulares de  $C$ .

6. [10 *puntos*] Enunciar el teorema sobre la solución mínimo cuadrática de norma mínima de un sistema de ecuaciones lineales y aplicarlo para calcular dicha solución

del sistema  $CX = B$ , siendo  $C$  la matriz del ejercicio 5c) y  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

INDICACIONES:

-Incluir las definiciones de los conceptos subrayados. Recuerden que se evalúan los procedimientos y, por tanto, estos deben explicarse de forma clara (no son válidos los resultados sin razonarlos).

-Cada pregunta se comienza en una página nueva y se entregan en orden creciente.

-Los alumnos que quieran utilizar evaluación continua en algún tema, deberán obtener un mínimo de 4 sobre 10 de media entre las restantes preguntas que tengan que realizar.