UNIVERSIDAD DE JAÉN
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y JURÍDICAS

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

ÁLGEBRA (Grado en Estadística y Empresa)

CURSO 2024/25. Convocatoria Extraordinaria 2.

Apellidos y nombre: _____ DNI: _____

Evaluación Continua:	1. Matrices y sistemas: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	2. Ev y subespacios: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	3. Ev euclídeo: ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	4. Aplic lineales ☐ SÍ. Nota: _____ ☐ NO, RENUNCIO.	**Prácticas:** ☐ SÍ. Nota: ____ ☐ NO, RENUNCIO

1. [5 *puntos*] Un estudiante piensa gastar en rebajas 80 euros por la compra de una camiseta, una camisa y un pantalón. Se sabe que el precio de la camiseta es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio de la camiseta? ¿Y el del pantalón? Razona la respuesta.

b) Además, consultando en la web del comercio, comprueba que el precio de la camiseta más el doble del precio de la camisa y el pantalón juntos, es 100 euros. Plantea el sistema de ecuaciones lineales (apartados a y b), discútelo y calcula sus soluciones.

2. [5 *puntos*] Considera la siguiente matriz con coeficientes en los complejos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$ donde $a \in \mathbb{C}$ es un parámetro.

a) Demostrar que $U=\{X : AX=0\}$ es subespacio vectorial de $M_{2x1}(\mathbb{C})$

b) Calcular, según los valores de a, dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de U.

3. [10 *puntos*] Sea V un espacio vectorial euclídeo cuyo producto escalar tiene matriz de Gram respecto de la base $B = \{v_1, v_2\}$, es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Razonar si B es una base ortonormal. Usar Gram-Schmidt, para calcular una base ortonormal, B´, a partir de B.

b) Calcular la matriz de Gram, G', respecto de la base B´ obtenida en el apartado anterior ¿Qué relación hay entre G y G'?.

4. [20 *puntos*] Consideremos la aplicación lineal f: $P_1(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 1 \\ 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$ donde $a \in \mathbb{C}$ es un parámetro.

a) Calcular la imagen mediante f del polinomio $1+2x$.

b) Calcular, según los valores de a, dimensión, base, paramétricas e implícitas del núcleo y la imagen de f.

c) Razonar si $M_2(\mathbb{C})$ y $P_1(\mathbb{C})$ son isomorfos.

d) Calcula la matriz AA^t y razona si es simétrica.

e) Para $a = -i$, demostrar si la matriz AA^t es diagonalizable por semejanza y, si es posible, calcular una matriz diagonal D, y una matriz regular, P, tal que $D=P^{-1}(AA^t)P$

f) ¿Es AA^t diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso afirmativo, explica cómo sería esta diagonalización y bajo qué condiciones.

5. [10 *puntos*]

a) Calcula la factorización de rango pleno y la inversa generalizada de Moore Penrose de la matriz de coeficientes del sistema del ejercicio **1 b).**

b) Enunciar el teorema sobre la solución mínimo cuadrática de norma mínima de un sistema de ecuaciones lineales. Aplicarlo para calcular la solución mínimo cuadrática de norma mínima del sistema del ejercicio **1 b).**

INDICACIONES:

-Incluir las definiciones de los conceptos subrayados. Recuerden que se evalúan los procedimientos y, por tanto, estos deben explicarse de forma clara (no son válidos los resultados sin razonarlos).

-Cada pregunta se comienza en una página nueva y se entregan en orden creciente.

-Los alumnos que quieran utilizar evaluación continua en algún tema, deberán obtener un mínimo de 4 sobre 10 de media entre las restantes preguntas que tengan que realizar.