Tema 2: Geometría de convexos

José Miguel Manzano Prego
jmmanzano@ugr.es

Índice

1. Definición, ejemplos y construcciones elementales **2**
1.1. Funciones convexas 4
1.2. Envolvente convexa 6
1.3. Suma de Minkowski 7
1.4. Topología de conjuntos convexos 9

2. Soporte de un conjunto convexo **11**
2.1. Hiperplanos soporte 11
2.2. La función soporte 15

3. Otras propiedades **16**
3.1. Determinación de un conjunto convexo 16
3.2. El teorema de Helly y aplicaciones 18

4. La distancia de Hausdorff **21**

5. La desigualdad isodiamétrica **25**

6. Ejercicios y soluciones **30**

La convexidad es un tema transversal en matemáticas, pues aparece en diversas áreas como geometría afín y diferencial, análisis funcional, optimización,... La geometría de los conjuntos convexos del espacio euclídeo se ha consolidado durante el último siglo como una herramienta de gran utilidad y aquí veremos algunos de sus aspectos más elementales, llegando a demostrar un resultado no trivial como es la desigualdad isodiamétrica para compactos de $\mathbb{R}^n$. Para más información, puede consultarse el libro *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory* de Rolf Schneider.

Agradezco a los profesores Joaquín Pérez y Manuel Ritoré que compartieran sus apuntes de clase de la asignatura Geometría de Convexos de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada, en los que se basan las presentes notas[1].

[1] Última revisión: 30 de septiembre de 2015.

1. Definición, ejemplos y construcciones elementales

A lo largo de todo este texto trabajaremos en el espacio euclídeo real n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Por comodidad, dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotaremos

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\},$$

que no es otra cosa que el segmento cerrado que une x e y. De una forma similar pueden definirse el intervalo abierto (x, y) y los intervalos semiabiertos $[x, y)$ y $(x, y]$.

Definición 1.1. *Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo cuando $[x, y] \subset A$ para cualesquiera $x, y \in A$.*

En otras palabras, un conjunto es convexo si dados dos puntos del conjunto, el segmento que determinan también está contenido en él. Veamos una serie de ejemplos que serán importantes en lo que sigue:

- Supongamos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio afín, es decir, U es cerrado para combinaciones lineales afines. Entonces, U es convexo. En particular, los puntos y las rectas y el espacio total $\mathbb{R}^n$ son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. El vacío $\emptyset$ es también un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

  Como caso particular, dados $u \in \mathbb{R}^n$ con $u \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, consideraremos el hiperplano normal a u con parámetro α definido por

  $$H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = \alpha\}, \tag{1}$$

  que es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. También podemos definir los semiespacios cerrados determinados por $H_{u,\alpha}$ como

  $$H^+_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq \alpha\}, \qquad H^-_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq \alpha\}.$$

  Es fácil ver que $H^+_{u,\alpha}$ y $H^-_{u,\alpha}$ son convexos en $\mathbb{R}^n$.

- Dada una familia $\{A_i : i \in I\}$ de subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, su intersección $\cap_{i \in I} A_i$ es también convexa.

  La demostración es muy sencilla: dados $x, y \in \cap_{i \in I} A_i$ y $t \in [0,1]$, se tiene que $x, y \in A_i$ para todo $i \in I$ luego $ty + (1-t)x \in A_i$ ya que cada A_i es convexo; como esto se cumple para todo $i \in I$, deducimos que $ty + (1-t)x \in \cap_{i \in I} A_i$.

- Los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos, finitos o infinitos), es decir, la convexidad en $\mathbb{R}$ equivale a la conexión.

- Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $\phi(A)$ es convexo en $\mathbb{R}^m$. Si $B \subset \mathbb{R}^m$ es convexo, entonces $\phi^{-1}(B)$ es convexo en $\mathbb{R}^n$.

- Dados $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, consideremos las bolas abierta y cerrada de centro a y

radio r, definidas respectivamente por

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\},$$
$$\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Entonces, tanto $B_r(a)$ como $\overline{B}_r(a)$ son subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Más aún, cualquier $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B_r(a) \subset A \subset \overline{B}_r(a)$ es convexo (¿por qué?).

- Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el grafo de f es el conjunto $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se define el subgrafo y el epigrafo de f como los conjuntos

$$\text{sub}(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$
$$\text{epi}(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

La función f se dice convexa cuando $\text{epi}(f)$ sea convexo, lo que implica que A también es convexo. No es difícil ver que, si A es convexo, la función f es convexa si, y sólo si, para cualesquiera $x, y \in A$ y $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$f(ty + (1 - t)x) \leq tf(y) + (1 - t)f(x). \tag{2}$$

La función f se dice cóncava cuando $-f$ es convexa o, equivalentemente, cuando $\text{sub}(f)$ es convexo.

En la definición de conjunto convexo hemos impuesto que un tal conjunto tiene que ser cerrado para segmentos. Los puntos del segmento $[x, y]$ pueden escribirse como combinación lineal afín $t_1x + t_2y$, donde $t_1, t_2 \geq 0$ cumplen $t_1 + t_2 = 1$. Esto nos da pie a considerar combinaciones lineales del tipo $t_1x_1 + \ldots + t_nx_k$, donde $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ cumplen $t_1 + \ldots + t_k = 1$. A estas combinaciones se les llama *combinaciones lineales convexas* de $x_1, \ldots, x_k$.

Proposición 1.2. *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si, y sólo si, es cerrado para combinaciones lineales convexas de sus elementos.*

Demostración. Puede probarse fácilmente usando inducción sobre el número k de elementos de la combinación convexa, teniendo en cuenta que para $k = 2$ tenemos la definición de conjunto convexo y que toda combinación de $h + 1$ elementos se puede reducir a una de h elementos como

$$\sum_{i=1}^{h+1} t_i x_i = t_1 x_1 + (1 - t_1) \left(\sum_{i=2}^{h} \frac{t_i}{1 - t_1} x_i \right),$$

donde hemos supuesto que $t_1 \neq 1$. □

Si $\{x_0, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ son puntos afínmente independientes[2], entonces al conjunto de combinaciones lineales convexas de estos puntos se le conoce como símplice k-

[2] Recordemos que $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes si no existe ninguna subvariedad afín de dimensión $k - 1$ que los contenga a todos (equivalentemente, si el conjunto de vectores $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente).

dimensional (o también k-simplex). Puede verse fácilmente que es un segmento para $k = 1$, un triángulo cerrado para $k = 2$, un tetraedro cerrado para $k = 3$, etc.

1.1. Funciones convexas

Las funciones convexas nos dan una forma general de construir conjuntos convexos. El siguiente resultado muestra que hay una forma sencilla de producir funciones convexas cuando estas son suficientemente regulares.

Proposición 1.3. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y convexo y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(A)$ cuyo hessiano es semidefinido positivo en todo punto de A. Entonces, f es convexa.*

Demostración. Dados $x, y \in A$ y $t \in [0, 1]$, probemos que f cumple (2). En efecto, consideremos la función auxiliar $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(s) = f(sy + (1 - s)x)$, que cumple[3] que $g(0) = f(x)$, $g(1) = f(y)$ y $g''(s) = \mathrm{Hess}(f)(sx + (1 - s)y)(x - y) \geq 0$ para todo $s \in [0, 1]$. El desarrollo de Taylor de g de orden 2 en el punto t nos dice, para cada $s \in [0, 1]$, existe $\xi \in [0, 1]$ tal que

$$g(s) \geq g(t) + g'(t)(s - t) + g''(\xi)(s - t)^2 \geq g(t) + g'(t)(s - t). \tag{3}$$

Evaluando en $s = 0$ y $s = 1$, tenemos que $g(0) \geq g(t) - tg'(t)$ y $g(1) \geq g(t) + (1-t)g'(t)$, luego concluimos que

$$tg(1) + (1 - t)g(0) \geq t(g(t) + (1 - t)g'(t)) + (1 - t)(g(t) - tg'(t)) = g(t).$$

Sustituyendo $g(t) = f(ty + (1 - t)x)$, $g(0) = f(x)$ y $g(1) = f(y)$, obtenemos (2). □

Observación 1.4. Con más generalidad, si aplicamos la misma técnica del desarrollo de Taylor (3) al propio campo escalar f en un punto arbitrario de $x \in A$, es fácil deducir que el grafo de f se queda en uno de los semiespacios definidos por el hiperplano H tangente a f en x y el punto $(x, f(x))$ está en la intersección $H \cap \mathrm{epi}(f)$. Veremos en la sección 2 que a H se le llama *hiperplano soporte* del convexo $\mathrm{epi}(f)$ en $(x, f(x))$.

El recíproco de la proposición anterior también es cierto, es decir, si el grafo de una función de clase C^2 es convexo, entonces dicha función tiene hessiano semidefinido positivo. Notemos también que, en el caso $n = 1$, la condición de que f tenga hessiano semidefinido positivo se traduce en $f'' \geq 0$.

Aunque no vamos a entrar en la demostración, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo de interior no vacío y $x \in \mathrm{fr}(A)$, entonces existe un entorno abierto U de x, una isometría $T : \mathbb{R}^n \to$

[3] Aquí, $\mathrm{Hess}(f)(sx + (1 - s)y)(x - y)$ denota el hessiano de f en el punto $sx + (1 - s)y$ como forma cuadrática aplicado al vector $x - y$, y es no negativo por ser la matriz hessiana semidefinida positiva.

$\mathbb{R}^n$ y una función convexa $f : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que $T(U \cap \mathrm{fr}(A)) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in V\}$. Esto nos dice que la regularidad de la frontera de un conjunto convexo es similar a la de una función convexa, por lo que es interesante estudiar hasta qué punto son regulares las funciones convexas para entender la frontera de los convexos.

Resumimos ahora algunas propiedades en dimensión 1, que no demostraremos, pero que ilustran el comportamiento de las funciones convexas.

Proposición 1.5. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ convexa. Entonces,*

(a) f es localmente lipschitziana en I (en particular, f es continua).

(b) Para cada $t_0 \in I$, existen las derivadas laterales

$$f'(t_0^{\pm}) = \lim_{t \to t_0^{\pm}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

y cumplen que $f'(t_0^-) \leq f'(t_0^+)$. El conjunto $M = \{t \in I : f'(t^-) < f'(t^+)\}$ es numerable y, en consecuencia, f es derivable salvo en un conjunto numerable de puntos. Además, $f' : I \setminus M \to \mathbb{R}$ es una función creciente

(c) f es dos veces derivable en casi todo punto de I.

Para terminar esta sección, vamos a mostrar una forma muy general y elegante de atacar desigualdades elementales usando la convexidad de ciertas funciones.

Proposición 1.6 (Desigualdad de Jensen). *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función convexa. Dados $x_1, \ldots, x_k \in A$ y $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ tales que $t_1 + \ldots + t_k = 1$, se tiene que*

$$f(t_1 x_1 + \ldots + t_k x_k) \leq t_1 f(x_1) + \ldots + t_k f(x_k).$$

Demostración. Basta aplicar inducción sobre k y observar que, para $k = 2$, el resultado es cierto por definición de función convexa. □

Vamos a aplicar la desigualdad de Jensen para obtener las desigualdades entre las medias. Dados números reales $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ y $\alpha \geq 0$, se define su media α como

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} & \alpha = 0, \\ \left(\frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} & \alpha > 0. \end{cases}$$

A la media M_0 se le llama media geométrica, a la media M_1 media aritmética, a la media M_2 media cuadrática, etc.

Corolario 1.7 (Desigualdad entre las medias). *Dados números reales* $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ *y* $0 < \alpha < \beta$*, se cumple que*[4]

$$M_0(x_1, \ldots, x_n) \leq M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leq M_\beta(x_1, \ldots, x_n).$$

Demostración. Para probar la desigualdad $M_0 \leq M_\alpha$, consideremos la función exponencial $f(x) = \exp(x) = e^x$, que es convexa ya que $f'' \geq 0$ y los números $y_i = \log(x_i^\alpha)$, $t_1 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$. Se tiene que

$$f(t_1 y_1 + \ldots + t_n y_n) = \exp\left(\frac{\alpha(\log(x_1) + \ldots + \log(x_n))}{n}\right) = (\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})^\alpha,$$
$$t_1 f(y_1) + \ldots + t_n f(y_n) = \frac{\exp(\log(x_1^\alpha)) + \ldots + \exp(\log(x_n^\alpha))}{n} = \frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n},$$

luego la desigualdad se deduce de la desigualdad de Jensen. Para la desigualdad $M_\alpha \leq M_\beta$ puede hacerse un razonamiento similar para la función convexa $f(x) = x^{\beta/\alpha}$ con respecto a los números $y_i = x_i^\alpha$ y $t_i = \frac{1}{n}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. □

1.2. Envolvente convexa

Hemos visto que la intersección de una familia de subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un convexo, lo que da pie a definir el menor convexo que contiene a un subconjunto dado.

Definición 1.8. *Dado* $S \subset \mathbb{R}^n$ *arbitrario, se define la envolvente convexa de* S *como la intersección de todos los convexos que contienen a* S*, y la denotaremos por* $\operatorname{conv}(S)$.

Tenemos que la envolvente convexa de S siempre contiene a S, es convexa y está contenida en cualquier convexo que contenga a S, propiedad que usaremos repetidamente a lo largo de este tema. Además, $\operatorname{conv}(S) = S$ si, y sólo si, S es convexo.

El siguiente resultado caracteriza la envolvente convexa como la familia de todas las combinaciones lineales convexas de elementos del conjunto.

Lema 1.9. *Para cualquier* $S \subset \mathbb{R}^n$ *se cumple que*

$$\operatorname{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} t_i x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \ldots, x_k \in S,\ k \in \mathbb{N} \\ t_1, t_2, \ldots, t_k \geq 0 \\ t_1 + t_2 + \ldots + t_k = 1 \end{array} \right\}.$$

Demostración. Llamemos C al miembro de la derecha de la igualdad del enunciado. Es fácil probar que C es convexo (usando la definición de conjunto convexo) y que

[4]Para números positivos $x_1, \ldots, x_n > 0$, la definición de la media α se extiende para $\alpha < 0$ usando la misma fórmula. También puede definirse $M_\infty(x_1, \ldots, x_n) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $M_{-\infty}(x_1, \ldots, x_n) = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$. Una versión más general de la desigualdad de las medias nos dice que $M_\alpha \leq M_\beta$ para cualesquiera $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$.

$S \subset C$ (tomando un t_i igual a uno y los demás cero), luego $\text{conv}(S) \subset C$. La inclusión $C \subset \text{conv}(S)$ se sigue de que $\text{conv}(S)$ es convexo y contiene a S, luego la proposición 1.2 asegura que $\text{conv}(S)$ es cerrado para combinaciones convexas de elementos de S. □

Como consecuencia, obtenemos que la envolvente convexa de k puntos afínmente independientes es el símplice que generan. Como el número máximo de puntos afínmente independientes es $n+1$, este ejemplo nos dice que en general posiblemente necesitemos hacer combinaciones convexas de al menos $n+1$ elementos de S para obtener $\text{conv}(S)$, pero no tenemos control sobre este número de elementos necesario.

Para establecer la mejor cota general[5] posible de dicho número, introducimos el concepto de dimensión (afín) de un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ como la dimensión de la menor subvariedad afín $\text{aff}(S) \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a S, esto es, la dimensión de S es uno menos del número máximo de puntos afínmente independientes que podemos encontrar en S.

Teorema 1.10 (Carathéodory). *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $d = \dim(S)$. Entonces, todo punto de $\text{conv}(S)$ puede escribirse como combinación lineal convexa de, a lo sumo, $d+1$ puntos de S.*

Demostración. Sea A el conjunto de las combinaciones lineales convexas de $d+1$ puntos de S y probemos que $S = \text{conv}(A)$. Es obvio que $A \subset \text{conv}(S)$ según el lema 1.9. Para probar la inclusión contraria, sea $x \in \text{conv}(S)$ y definamos k como el menor número tal que existen $x_1, \ldots, x_k \in S$ y $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ con $t_1 + \ldots + t_k = 1$ de forma que $x = t_1 x_1 + \ldots + t_k x_k$ (esto implica que $t_1, \ldots, t_k > 0$). Si probamos que $x_1, \ldots, x_k$ son afínmente independientes tendremos que $k \leq d+1$ y habremos terminado.

Razonando por contradicción, si $x_1, \ldots, x_k$ son dependientes, esto quiere decir que existirán $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos con $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$ y $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\frac{t_1}{\alpha_1} = \text{mín}\{\frac{t_i}{\alpha_i} : \alpha_i > 0\}$ y escribir $x = \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_k x_k$, siendo $\mu_i = t_i - \frac{t_1}{\alpha_1}\alpha_i$. Como $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$, es fácil ver que $\sum_{i=2}^k \mu_i = 1$ y, como $\frac{t_1}{\alpha_1} = \text{mín}\{\frac{t_i}{\alpha_i} : \alpha_i > 0\}$, tenemos que $\mu_i \geq 0$ para todo i, es decir, $x = \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_k x_k$ expresa x como una combinación lineal convexa de $k-1$ elementos, contradiciendo el hecho de que k es mínimo. □

1.3. Suma de Minkowski

Dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, se define su suma de Minkowski como el conjunto de todas las sumas de elementos de A y B, esto es,

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

[5] Existen resultados que mejoran la cota del teorema de Carathéodory cuando se suponen restricciones adicionales sobre la topología del conjunto.

Es inmediato ver que la suma de Minkowski es asociativa, conmutativa y tiene elemento neutro (el cero $\{0\}$), con el convenio de que $\emptyset + A = A + \emptyset = \emptyset$ para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

Usando que la aplicación suma $\text{Suma} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua con la topología usual y la suma de Minkowski puede expresarse como $A+B = \text{Suma}(A\times B)$ y también como $A + B = \cup_{a\in A}(\{a\} + B) = \cup_{b\in B}(A + \{b\})$, no es difícil probar las siguientes propiedades (la última se demuestra usando la definición de convexo):

1. Si A ó B es abierto entonces $A + B$ es abierto.
2. Si A y B son conexos, entonces $A + B$ es conexo.
3. Si A y B son compactos, entonces $A + B$ es compacto.
4. Si A y B son convexos, entonces $A + B$ es convexo.

No es cierto en general que si A y B son cerrados, su suma de Minkowski es cerrada.

Proposición 1.11. *Dados $S, T \subset \mathbb{R}^n$ arbitrarios, se cumple que*

$$\text{conv}(S + T) = \text{conv}(S) + \text{conv}(T)$$

Demostración. Como $\text{conv}(S) + \text{conv}(T)$ es un convexo que contiene a $S + T$, se tiene por definición de envolvente convexa que $\text{conv}(S + T) \subset \text{conv}(S) + \text{conv}(T)$. Para probar la inclusión opuesta, consideremos $x \in \text{conv}(S) + \text{conv}(T)$, lo que quiere decir que $x = y + z$ para ciertos $y \in \text{conv}(S)$ y $z \in \text{conv}(T)$. Esto a su vez quiere decir que existen $y_1, \ldots, y_k \in S$, $z_1, \ldots, z_h \in T$ tales que $y = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$, $z = \sum_{j=1}^h \beta_j z_j$ para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_h \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{j=1}^h \beta_j = 1$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i + \sum_{j=1}^h \beta_j z_j = \left(\sum_{j=1}^h \beta_j\right)\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i y_i\right) + \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^h \beta_j z_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \alpha_i \beta_j (x_i + y_j), \text{ donde } \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^h \alpha_i \beta_j = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^h \beta_j\right) = 1. \end{aligned}$$

Hemos expresado x como combinación lineal convexa de elementos de $S + T$ luego $x \in \text{conv}(S + T)$. □

Otra operación de conjuntos que podemos considerar es el producto por escalares. Este puede entenderse como una homotecia, es decir, dados $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. En particular, el conjunto $-A = (-1)A$ es el simétrico de A respecto del origen. Veamos algunos ejemplos concretos de la suma de Minkowski y el producto por escalares, que se usarán en lo sucesivo y que conviene destacar ahora:

- Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto $x + A = \{x\} + A = \{x + a : a \in A\}$ es el trasladado de A con respecto al vector x.
- Cualquier bola abierta $B_r(x)$ se puede escribir en términos de la bola unidad como $B_r(x) = x + rB_1(0)$ y el resultado es similar para bolas cerradas. Con más

generalidad, si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $r, s \geq 0$, entonces

$$\lambda B_r(x) + \mu B_s(y) = B_{\lambda r + \mu s}(\lambda x + \mu s),$$
$$\lambda \overline{B}_r(x) + \mu \overline{B}_s(y) = \overline{B}_{\lambda r + \mu s}(\lambda x + \mu s),$$

y el resultado se extiende para combinaciones lineales de más de dos bolas de forma trivial.

- Dado un conjunto A y $r \geq 0$, la suma $A + B_r(0)$ (resp. $A + \overline{B}_r(0)$) tiene una interpretación especial ya que consiste en colocar la bola $B_r(0)$ (resp. $\overline{B}_r(0)$) centrada en cada punto de A:

$$A + B_r(0) = \cup_{a \in A} B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < r\},$$
$$A + \overline{B}_r(0) = \cup_{a \in A} \overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) \leq r\} \quad \text{(si } A \text{ es cerrado).}$$

1.4. Topología de conjuntos convexos

En esta sección analizaremos algunas propiedades topológicas básicas de los convexos que serán necesarias más adelante.

Proposición 1.12.

(a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $\operatorname{int}(A)$ *y* $\overline{A}$ *son convexos.*

(b) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\operatorname{conv}(A)$ *es abierto.*

(c) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\operatorname{conv}(A)$ *es compacto.*

(d) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces $\operatorname{conv}(A)$ *es acotado.*

Demostración. Para probar (a), tomemos $x, y \in \operatorname{int}(A)$ y $t \in [0, 1]$. Entonces existen $\lambda, \mu > 0$ tales que $B_\lambda(x) \subset A$ y $B_\mu(y) \subset A$. No es difícil ver que $B_{(1-t)\lambda + t\mu}((1-t)x + ty) \subset A$ usando la convexidad de A, lo que nos dice que $(1-t)x + ty \in \operatorname{int}(A)$ y hemos probado que $\operatorname{int}(A)$ es convexo. En el caso de la clausura[6], sean $x, y \in \overline{(}A)$ y $t \in [0, 1]$. Podemos tomar, por tanto, sucesiones $\{x_i\} \to x$ e $\{y_i\} \to y$ con $x_i, y_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Usando la continuidad de la suma y el producto por escalares, obtenemos que $\{(1-t)x_i + ty_i\} \to (1-t)x + ty$. Como $(1-t)x_i + ty_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$, deducimos que $(1-t)x + ty \in \overline{A}$ y, por tanto, $\overline{A}$ es también convexo.

Para probar (b), observemos que todo punto $x \in \operatorname{conv}(A)$ se puede expresar como $x = \sum_{i=1}^k t_i x_i$ para ciertos $x_1, \ldots, x_i \in A$ y $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ con $t_1 + \ldots + t_k = 1$. Si A es abierto, entonces existen $r_1, \ldots, r_k > 0$ tales que $B_{r_i}(x_i) \subset A$ para todo i. No es difícil ver que $B_{t_1 r_1 + \ldots + t_k r_k}(t_1 x_1 + \ldots + t_k r_k) = t_1 B_{r_1}(x_1) + \ldots + t_k B_{r_k}(x_k) \subset \operatorname{conv}(A)$, lo que nos dice que $x \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(A))$ y, por tanto, $\operatorname{conv}(A)$ es abierto.

[6] Una demostración alternativa para la clausura: podemos expresar $\overline{A} = \cap_{n=1}^\infty (A + \frac{1}{n}\overline{B}_1(0))$, que es convexo como intersección de convexos (ver la sección 1.3).

Definamos ahora $\Delta = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$. El teorema de Carathéodory nos dice que la aplicación $C : A^{n+1} \times \Delta \to \mathbb{R}^n$ dada por $C((a_1, \ldots, a_{n+1}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$ es tal que $\text{conv}(A) = C(A^{n+1} \times \Delta)$. Si A es compacto, entonces $A^{n+1} \times \Delta \subset \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ es compacto como producto de compactos, luego $\text{conv}(A)$ es compacto al ser la imagen por la aplicación continua C de un compacto. Esto prueba el apartado (c).

Finalmente, (d) es consecuencia de que si A está acotado, entonces $A \subset B_R(0)$ para cierto $R > 0$, luego $\text{conv}(A) \subset B_R(0)$ al ser $B_R(0)$ un convexo que contiene a A. □

Lema 1.13. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y supongamos que $x \in \text{int}(A)$ e $y \in \overline{A}$. Entonces, $[x, y) \subset \text{int}(A)$.*

Demostración. Sea $\rho > 0$ tal que $B(x, \rho) \subset A$ y distingamos dos casos. Supongamos en primer lugar que $y \in A$. Entonces, $[x, y] \subset A$ y, dado $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in [x, y)$ para cierto $\lambda \in [0, 1)$, no es difícil ver que $B_{(1-\lambda)\rho}(z) \subset A$, lo que nos dice que $z \in \text{int}(A)$ y, por tanto, $[x, y) \subset \text{int}(A)$.

Supongamos ahora que $y \notin A$ y probemos que $[x, y) \subset A$ (según el caso ya tratado, esto bastará para terminar). Está claro que $x \in A$, luego tomemos $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$ para cierto $\lambda \in (0, 1)$. Como $y \in \overline{A}$, tenemos que existe $a \in A \cap B_{\frac{(1-\lambda)\rho}{\lambda}}(y) \neq \emptyset$, luego $a = y + \frac{1-\lambda}{\lambda} u$ para cierto $u \in B_\rho(0)$. Esto nos dice que $z = (1 - \lambda)x + \lambda y = \lambda a + (1 - \lambda)(x - u) \in A$ ya que $a \in A$ y $x - u \in B(x, \rho) \subset A$. □

Proposición 1.14. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, se cumple que $\text{int}(\overline{A}) = \text{int}(A)$ y, si $\text{int}(A) \neq \emptyset$, entonces también se cumple que $\overline{\text{int}(A)} = \overline{A}$.*

Demostración. Como $A \subset \overline{A}$, se sigue que $\text{int}(A) \subset \text{int}(\overline{A})$. Para probar la inclusión contraria, sea $x \in \text{int}(\overline{A})$, luego existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset \overline{A}$. Dado $x_0 \in \text{int}(A)$, el punto $w = x + \frac{r}{2} \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$ pertenece a $B_r(x) \subset A$ y $x \in [x_0, w)$. Como $x_0 \in \text{int}(A)$ y $w \in \overline{A}$, el lema 1.13 nos dice que $x \in \text{int}(A)$.

Para la segunda igualdad, es fácil ver que $\overline{\text{int}(A)} \subset \overline{A}$ y, para la otra inclusión, dado $x \in \overline{A}$, tomemos $x_0 \in \text{int}(A) \neq \emptyset$. El lema 1.13 nos dice que $[x_0, x) \subset \text{int}(A)$, luego $x \in \overline{\text{int}(A)}$ ya que es límite de puntos de $[x_0, x) \subset \text{int}(A)$. □

Observemos que un convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ que está contenido en un hiperplano, siempre cumple $\text{int}(A) = \emptyset$ y $\text{fr}(A) = A$, lo que nos dice que los conceptos de interior y frontera no son satisfactorios para estudiar la topología de conjuntos convexos de dimensión menor que n. Es por ello que se introduce el concepto[7] de interior relativo $\text{rel}\,\text{int}(A)$ y la frontera relativa $\text{rel}\,\text{fr}(A)$ como el interior y la frontera del convexo A en la topología inducida en la variedad afín $\text{aff}(A)$ generada por A.

[7] Observemos que el concepto de clausura relativa no tendría sentido ya que cualquier subvariedad afín de $\mathbb{R}^n$ es un cerrado en la topología usual, luego la clausura en $\mathbb{R}^n$ y en la topología inducida coinciden.

Proposición 1.15. *Todo convexo no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$ cumple que* $\operatorname{rel\,int}(A) \neq \emptyset$. *En consecuencia,* $\operatorname{rel\,int}(\overline{A}) = \operatorname{rel\,int}(A)$ *y* $\overline{\operatorname{rel\,int}(A)} = \overline{A}$.

Demostración. Si $\dim(A) = d \geq 0$, entonces existe $P = \{x_1, \ldots, x_{d+1}\} \subset A$ conjunto afínmente independiente y $\operatorname{conv}(P) \subset A$ por ser A convexo. Es fácil ver que el símplice $\operatorname{conv}(P)$ de dimensión d tiene interior no vacío en $\operatorname{aff}(A)$ (por ejemplo, el punto $\frac{1}{d+1}(x_1 + \ldots + x_{d+1})$ es interior a P en la topología de $\operatorname{aff}(A)$), luego A tiene interior no vacío. Las identidades del enunciado se deducen ahora de la proposición 1.14. □

Esta proposición será especialmente interesante para simplificar razonamientos posteriores ya que, cuando estudiemos un convexo $A \neq \emptyset$, podremos suponer sin perder generalidad que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ sin más que restringirnos a la subvariedad afín $\operatorname{aff}(A)$.

2. Soporte de un conjunto convexo

2.1. Hiperplanos soporte

Definición 2.1. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \operatorname{fr}(A)$, diremos que un hiperplano H soporta a A en el punto x (o que H es un hiperplano soporte de A en x) cuando $x \in H \cap A$ y A esté contenido en uno de los semiespacios cerrados delimitados por H.*

Ya vimos (en observación 1.4) que cuando el convexo es el grafo de una función convexa de clase C^2, entonces el hiperplano tangente a la gráfica es un hiperplano soporte del convexo. De hecho, si el convexo tiene por borde una hipersuperficie diferenciable, no es difícil darse cuenta de que el único posible hiperplano soporte en un punto de su frontera es el hiperplano tangente. No obstante, pueden ocurrir otras situaciones cuando se pierde regularidad en la frontera. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es convexa y todas las rectas de la forma $y = \lambda x$ con $|\lambda| \leq 1$ soportan a $\operatorname{epi}(f)$ en el punto $(0, 0)$.

Proposición 2.2 (Proyección métrica sobre un convexo). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vacío. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe un único $a \in A$ tal que $d(x, a) \leq d(x, y)$ para todo $y \in A$.*

Demostración. La existencia es consecuencia de que A es cerrado. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, tomemos $R > 0$ tal que $K = \overline{B}_R(x) \cap A \neq \emptyset$. El conjunto K es cerrado y acotado, luego es compacto. Como la aplicación distancia $y \mapsto d(x, y)$ es continua, deducimos que existe $a \in K$ tal que $d(x, a) \leq d(x, y)$ para todo $y \in K$. No obstante, para $y \notin K$ se sigue que $d(x, y) > R \geq d(x, a)$, luego $d(x, a) \leq d(x, y)$ para todo $y \in A$.

Para probar la unicidad vamos a usar que A es convexo. Razonando por reducción al absurdo, si existieran $a, b \in A$ distintos con la propiedad de que $d(x, a) \leq d(x, y)$ y $d(x, b) \leq d(x, y)$ para todo $y \in A$, entonces podemos considerar $c = \frac{1}{2}(a + b)$, que

pertenece a A por ser éste convexo. Es fácil ver que $\langle a-c, x-c\rangle = 0$, luego x, a y c forman un triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras nos dice que $d(x,a)^2 = d(x,c)^2 + d(c,a)^2 > d(x,c)^2$. Esto prueba que $d(x,c) < d(x,a)$, contradiciendo el hecho de que a está a mínima distancia de x. □

Al punto $a \in A$ dado por la proposición anterior lo llamaremos *proyección métrica* de x sobre el convexo A y lo denotaremos por $p_A(x)$. Esto da pie a dar algunas definiciones auxiliares que nos ayudarán en lo que sigue:

- El vector unitario en la dirección de $x - p_A(x)$,

$$u_A(x) = \frac{x - p_A(x)}{|x - p_A(x)|}.$$

- La semirrecta cerrada de vértice $p_A(x)$ y dirección $x - p_A(x)$,

$$R_A(x) = \{p_A(x) + t(x - p_A(x)) : t \geq 0\}.$$

- El plano ortogonal a $x - p_A(x)$ que pasa por $p_A(x)$,

$$H_A(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - p_A(x), x - p_A(x)\rangle = 0\} = H_{u_A(x), \langle p_A(x), u_A(x)\rangle},$$

  siguiendo la notación $H_{u,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = \alpha\}$.

El primer objetivo será ver que los hiperplanos de la forma $H_A(x)$ son hiperplanos soporte del conjunto A y, en segundo lugar, utilizarlos para probar la existencia de dichos hiperplanos soporte en cualquier punto de $\mathrm{fr}(A)$ y estudiar si existen en cualquier dirección de $\mathbb{R}^n$ no nula.

Lema 2.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo cerrado y no vacío. La proyección $p_A : \mathbb{R}^n \to A$ cumple las siguientes propiedades:*

(a) $p_A(x) = x$ si, y sólo si, $x \in A$.

(b) $d(p_A(x), p_A(y)) \leq d(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ (es decir, p_A es lipschitziana).

Demostración. La propiedad (a) es muy sencilla y se deja como ejercicio. Para probar (b), dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $x \in A$ ó $y \in A$ ó $p_A(x) = p_A(y)$, la desigualdad $d(p_A(x), p_A(y)) \leq d(x,y)$ es trivial, por lo que podemos suponer que $x, y \notin A$ y $p_A(x) \neq p_A(y)$. En tal caso, sean H_x y H_y los hiperplanos ortogonales al segmento $[p_A(x), p_A(y)]$ que pasan por $p_A(x)$ y $p_A(y)$, respectivamente, y sea $B \subset \mathbb{R}^n$ la región abierta delimitada por H_x y H_y. Si x e y no pertenecen a B, entonces está claro que $d(x,y) \geq d(H_x, H_y) = d(p_A(x), p_A(y))$. Si, por el contrario, $x \in B$, entonces es fácil ver que existe $z \in (p_A(x), p_A(y)) \subset A$ tal que $d(x,z) < d(x, p_A(x))$ contradiciendo la propiedad de minimización de $p_A(x)$. Análogamente, suponer que $y \in B$ también lleva a una contradicción, y hemos terminado la demostración. □

Lema 2.4. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, cerrado y no vacío.*

(a) Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, el hiperplano $H_A(x)$ soporta a A en $p_A(x)$.

(b) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ tales que $y \in R_A(x)$, entonces $p_A(x) = p_A(y)$.

Demostración. Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, tenemos que $p_A(x) \in A \cap H_A(x)$, luego bastará probar que $A \subset H_A^-(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y - p_A(x), u_A(x)\rangle \leq 0\}$ para probar el apartado (a). Por reducción al absurdo, supongamos que existe $z \in A \setminus H_A^-(x)$, es decir, existe $z \in A$ tal que $\langle z - p_A(x), u_A(x)\rangle > 0$. Definimos entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $f(t) = d(x, p_A(x) + t(z - p_A(x)))^2$, que es diferenciable y cumple

$$f'(0) = -2|x - p_A(x)| \cdot \langle u_A(x), z - p_A(x)\rangle < 0.$$

Esto nos dice que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(t) < f(0)$ para $0 < t < \varepsilon$. Como $[z, p_A(x)] \subset A$, tenemos que $p_A(x) + t(z - p_A(x) \in A$ para valores de t cercanos a cero, luego la desigualdad $f(t) < f(0)$ se traduce en que hay puntos de A más cercanos a x que el propio $p_A(x)$, y hemos encontrado la contradicción buscada.

Para probar (b), supongamos que $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ son tales que $y \in R_A(x)$. Si $y = p_A(x)$, entonces el resultado es trivial. En caso contrario, para cualquier $z \in A$, el punto de intersección $[z, y] \cap H_A(x) = \{w\}$ cumple que $d(y, w) \leq d(y, z)$, lo que nos dice que $\operatorname{dist}(y, A) \geq \operatorname{dist}(y, H_A(x)) = d(y, p_A(x))$, donde hemos usado que $y \in R_A(x)$. Por tanto, $p_A(y) = p_A(x)$. □

Lema 2.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, compacto y no vacío, y sean $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$ tales que $A \subset B_R(x_0)$. Dado $S_R(x_0) = \operatorname{fr}(B_R(x_0))$, la restricción $p_A : S_R(x_0) \to \operatorname{fr}(A)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $y \in \operatorname{fr}(A)$, probemos que existe $x \in S_R(x_0)$ tal que $p_A(x) = y$. Como $y \in \operatorname{fr}(A)$, podemos tomar una sucesión $y_n \in B_R(x_0) \setminus A$ tal que $\{y_n\} \to y$. Usando que p_A es continua como consecuencia del lema 2.3, obtenemos que $\{p_A(y_n)\} \to p_A(y) = y$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in S_R(x_0)$ tal que $R_A(y_n) \cap S_R(x_0) = \{x_n\}$. Como $S_R(x_0)$ es compacto, existe una parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a cierto $x \in S_R(x_0)$. Por continuidad, $\{p_A(x_{\sigma(n)})\} \to p_A(x)$, pero $p_A(x_n) = p_A(y_n)$ según el lema 2.4, luego $\{p_A(x_{\sigma(n)})\} = \{p_A(y_{\sigma(n)})\} \to p_A(y) = y$. Por unicidad del límite, tenemos que $p_A(x) = y$. □

Con todos estos ingredientes podemos enunciar y demostrar el teorema de existencia que estábamos buscando.

Teorema 2.6. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado.*

(a) Dado $x \in \operatorname{fr}(A)$, existe un hiperplano soporte de A en x.

(b) Si A es compacto, dado $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo, existe un hiperplano soporte de A ortogonal a u.

Demostración. Para probar (a), supongamos en primer lugar que A es compacto y tomemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$ tales que $A \subset B_R(x_0)$. El lema 2.5 nos asegura que, para cada $x \in \mathrm{fr}(A)$, existe $y \in \mathrm{fr}(B_R(x_0))$ tal que $p_A(y) = x$ luego el hiperplano $H_A(y)$ es un hiperplano soporte de A en $p_A(y) = x$ por el lema 2.4. Si A no es compacto, dado $x \in \mathrm{fr}(A)$, tenemos que $x \in \mathrm{fr}(A \cap \overline{B}_1(x))$. Como $A \cap \overline{B}_1(x)$ es convexo, compacto y no vacío, admite un hiperplano soporte en x según lo ya demostrado, pero es fácil ver que dicho hiperplano también es hiperplano soporte de A en x.

Finalmente, para probar (b), dado $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo, tomamos la función $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \langle x, u\rangle$. Como f es continua y estamos suponiendo que A es compacto, alcanzará su máximo absoluto en A, es decir, existe $x_0 \in A$ tal que $\langle x, u\rangle \leq \langle x_0, u\rangle$ para todo $x \in A$. Esto nos dice que el hiperplano $H_{u,\langle x_0,u\rangle}$ es un hiperplano soporte de A ortogonal a u, que es lo que buscábamos. □

Vamos a profundizar un poco en los resultados anteriores. En primer lugar, podemos probar un recíproco al teorema 2.6, caracterizando la condición de ser convexo mediante la existencia de hiperplanos soporte.

Proposición 2.7. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$. Si para todo $x \in \mathrm{fr}(A)$ existe un hiperplano H que soporta a A en x, entonces A es convexo.*

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que A no es convexo, esto es, supongamos que existen $x, y \in A$ y $z \in (x, y)$ tal que $z \notin A$. Tomemos cualquier punto $a \in \mathrm{int}(A)$ y sea $b \in (a, z) \cap \mathrm{fr}(A)$ (aquí usamos indirectamente que A es cerrado). Ahora tomemos un hiperplano H que soporte a A en b y escribamos $A \subset H^-$. Entonces, $a \in H^- \setminus H$ y $b \in H$ luego $z \notin H^-$. Ahora bien, $x, y \in A \subset H^-$ luego $z \in [x, y] \subset H^-$ ya que H^- es convexo, lo que nos da la contradicción buscada. □

El siguiente resultado nos dice que si conocemos todos los semiespacios soporte[8], entonces podemos recuperar el convexo como intersección de éstos. De hecho, la intersección de los semiespacios soporte tiene sentido incluso si el conjunto con es convexo, en cuyo caso lo que recuperamos es su envolvente convexa.

Proposición 2.8.

(a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y cerrado, entonces A es la intersección de todos los semiespacios cerrados que soportan a A en algún punto.

(b) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\mathrm{conv}(A)$ *es la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen a A.*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

[8] Llamamos semiespacio soporte al semiespacio asociado a un hiperplano soporte en que el conjunto en cuestión está contenido.

2.2. La función soporte

Para codificar toda la información relativa a los hiperplanos soporte, vamos a introducir una función que nos dé la información importante acerca de ellos. En la línea de la sección anterior, dado un convexo cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos su función soporte como

$$h_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad h_A(u) = \text{máx}\{\langle x, u\rangle : x \in A\}.$$

Observemos que si $h_A(u) < \infty$ para cierto $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo, entonces existe $x \in A$ tal que $h_A(u) = \langle x, u\rangle$ y $H_{u,h_A(u)}$ es un hiperplano soporte de A en x. En particular, para A compacto, esto permite recuperar todos los hiperplanos soporte de A.

Lema 2.9. *Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ convexos cerrados no vacíos:*

- *$h_A \leq h_B$ si, y sólo si, $A \subset B$.*
- *$h_{A+B} = h_A + h_B$ y $h_{\lambda A} = \lambda\, h_A$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,*

con el convenio: $a + \infty = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\lambda \cdot \infty = \infty$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para probar (a), que $A \subset B$ implica $h_A \leq h_B$ es obvio por la definición de función soporte. Recíprocamente, supongamos que $A \not\subset B$, esto es, existe $x \in A \setminus B$. Entonces, el lema 2.4 nos dice que el hiperplano ortogonal a $u_B(x)$ que pasa por $p_B(x)$ soporta a B en x, es decir, $\langle y, u_B(x)\rangle \leq \langle p_A(x), u_B(x)\rangle < \langle x, u_B(x)\rangle$ para todo $y \in B$. De la definición de función soporte se sigue que $h_A(u_B(x)) \geq \langle x, u_B(x)\rangle x, u_B(x)\rangle > \langle y, u_B(x)\rangle$ para todo $y \in B$, luego $h_A(u_B(x)) > h_B(u_B(x))$ y, por tanto, $h_A \not\leq h_B$.

La segunda afirmación de (b) es trivial luego vamos a centrarnos en la primera, que probaremos por doble desigualdad sobre cierto $u \in \mathbb{R}^n$:

($\leq$) Sea $\{z_i\} \subset A + B$ una sucesión tal que $\{\langle z_i, u\rangle\} \to h_{A+B}(u)$. Podemos escribir $z_i = x_i + y_i$ con $x_i \in A$ e $y_i \in B$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego $h_A(u) + h_B(u) \geq \langle x_i, u\rangle + \langle y_i, u\rangle = \langle x_i + y_i, u\rangle$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Tomando límites deducimos que $h_A(u) + h_B(u) \geq h_{A+B}(u)$.

($\geq$) Consideremos ahora sucesiones $\{x_i\} \subset A$ y $\{y_i\} \subset B$ tales que $\{\langle x_i, u\rangle\} \to h_A(u)$ y $\{\langle y_i, u\rangle\} \to h_B(u)$. Se cumple entonces que $\{\langle x_i + y_i, u\rangle\} \to h_A(u) + h_B(u)$. Como $\langle x_i + y_i, u\rangle \leq h_{A+B}(u)$ ya que $x_i + y_i \in A + B$ para todo $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $h_{A+B}(u) \geq h_A(u) + h_B(u)$. □

Corolario 2.10. *Sean $K, L, M \subset \mathbb{R}^n$ convexos y cerrados no vacíos, siendo K compacto. Si $K + L \subset K + M$, entonces $L \subset M$.*

Como consecuencia, en las condiciones anteriores, la suma de Minkowski tiene la propiedad cancelativa: si $K + L = K + M$, entonces $L = M$.

Demostración. La inclusión $K + L \subset K + M$ se traduce en $h_K + h_L \leq h_K + h_M$. Como K es compacto, deducimos que las función soporte h_K no toma el valor infinito, lo que permite cancelar h_K y obtener que $h_L \leq h_M$, esto es, $L \subset M$. □

Las propiedades anteriores se refieren a la dependencia de $h_A(u)$ respecto de A, pero una de las propiedades más útiles de la función soporte es que es una función sublineal en u. En otras palabras, dado un convexo cerrado y no vacío A, se cumple que

- $h_A(u+v) \leq h_A(u) + h_A(v)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^n$.
- $h_A(\lambda u) = \lambda h_A(u)$ para cualesquiera $u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$.

Su demostración es muy sencilla pero lo realmente importante es que la función soporte establece una correspondencia entre los conjuntos convexos y las funciones sublineales.

Teorema 2.11. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una función sublineal. Entonces existe un único convexo cerrado A tal que $f = h_A$.*

Una de las consecuencias de este resultado (que no demostraremos) es que para definir un convexo basta definir una función sublineal, tarea que en algunas ocasiones es más sencillo que definir el conjunto en sí.

3. Otras propiedades

3.1. Determinación de un conjunto convexo

El objetivo de esta sección es responder a la siguiente pregunta natural: dado un conjunto convexo A, ¿existe un *menor* subconjunto $A_0 \subset A$ tal que $\text{conv}(A_0) = A$? Para responder a esta cuestión, vamos a profundizar un poco en la estructura de la frontera de un conjunto convexo.

Definición 3.1. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $x \in A$,*

(a) Diremos que x es extremo si no existen $x_1, x_2 \in A$ distintos tales que $x \in (x_1, x_2)$. Al conjunto de puntos extremos de A lo denotaremos por $\text{ext}(A)$.

(b) Diremos que x es expuesto si existe un hiperplano soporte H de A en x tal que $A \cap H = \{x\}$. Al conjunto de puntos expuestos lo denotaremos por $\exp(A)$.

Una caracterización interesante de los puntos expuestos es que $x \in \text{ext}(A)$ si, y sólo si, $A \setminus \{x\}$ es convexo. También puede probarse fácilmente que, para cualquier convexo $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que

$$\exp(A) \subset \text{ext}(A) \subset \text{fr}(A).$$

Las inclusiones opuestas no son ciertas en general, aunque sí es cierto que todo punto extremo es límite de puntos expuestos (resultado que no demostraremos).

Lema 3.2. *Dado un convexo compacto $A \subset \mathbb{R}^n$, se cumple que* $\text{ext}(A) \subset \text{cl}(\exp(A))$.

Lema 3.3. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y que H es un hiperplano soporte de A. Entonces,* $\text{ext}(A \cap H) = \text{ext}(A) \cap H$.

Demostración. Probemos la doble inclusión. Si $x \in \text{ext}(A \cap H)$, entonces claramente $x \in H$ y veamos que $x \in \text{ext}(A)$ por reducción al absurdo: si así no fuera, tendríamos que $x \in (x_1, x_2)$ para ciertos $x_1, x_2 \in A$ distintos, pero, como A se queda en uno de los semiespacios que determina H, necesariamente $x_1, x_2 \in H$, lo que contradice el hecho de que $x \in \text{ext}(A \cap H)$.

Recíprocamente, usando de nuevo reducción al absurdo, si $x \in \text{ext}(A) \cap H$ es tal que $x \notin \text{ext}(A \cap H)$, entonces existen $x_1, x_2 \in A \cap H \subset A$ distintos tales que $x \in (x_1, x_2)$, lo que contradice el hecho de que $x \in \text{ext}(A)$. □

Teorema 3.4 (Minkowski-Straszewicz). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y compacto. Entonces,*

$$A = \text{conv}(\text{ext}(A)) = \text{cl}(\text{conv}(\text{exp}(A))).$$

Demostración. Probemos la primera igualdad por doble inclusión. Por un lado tenemos que $\text{ext}(A) \subset A$, luego $\text{conv}(\text{ext}(A)) \subset A$ por ser A convexo. Para probar la otra inclusión, procedamos por inducción sobre la dimensión de A: si $\dim(A) = 0$, entonces es trivial, y si $\dim(A) = 1$, entonces $A = [x, y]$ para ciertos $x, y \in \mathbb{R}^n$, luego $\text{ext}(A) = \{x, y\}$ y claramente la igualdad es cierta. Supuesto cierto para dimensión menor que k, probémoslo para $\dim(A) = k$; restringiéndonos a $\text{aff}(A)$, podemos suponer que $\text{int}(A) \neq \emptyset$ sin perder generalidad. Dado $x \in A$, tenemos dos posibilidades:

- Si $x \in \text{fr}(A)$, entonces tomamos un hiperplano soporte H de A en x. Como x pertenece al convexo $A \cap H$ de dimensión menor que k, por hipótesis de inducción y por el lema 3.3, obtenemos que $x \in \text{conv}(\text{ext}(H \cap A)) = \text{conv}(H \cap \text{ext}(A))) \subset \text{conv}(\text{ext}(A))$.
- Si $x \in \text{int}(A)$, entonces consideremos una recta R que pase por x. Como $A \cap R$ es convexo y compacto, se sigue que $A \cap R = [y, z]$ para ciertos $y, z \in \text{fr}(A)$. Por tanto, $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ para cierto $\lambda \in [0, 1]$. Según el caso anterior, $y, z \in \text{conv}(\text{ext}(A))$ luego $x \in [y, z] \subset \text{conv}(\text{ext}(A))$ por ser $\text{conv}(\text{ext}(A))$ convexo.

Queda por probar la segunda igualdad del enunciado, pero si usamos el lema 3.2, obtenemos que

$$A = \text{conv}(\text{ext}(A)) \subset \text{conv}(\text{cl}(\text{exp}(A))) \subset \text{cl}(\text{conv}(\text{exp}(A))) = \text{cl}(A) = A,$$

y hemos terminado. □

La primera igualdad del teorema es debida a Minkowski (1911) mientras que la segunda la probó Straszewicz (1935). El teorema resuelve el problema de encontrar el menor subconjunto de A cuya envolvente convexa es el propio A: observemos que cualquier subconjunto $B \subset A$ que cumpla $\text{conv}(B) = A$ necesariamente cumple que $\text{ext}(A) \subset B$ ya que $A \setminus \{x\}$ es convexo para cualquier $x \in \text{ext}(A)$.

Este resultado nos sirve para dar una caracterización bonita de los politopos.

Teorema 3.5. *Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, son equivalentes:*

(i) A es la envolvente convexa de una familia finita de puntos.

(ii) A es acotado y es la intersección de una familia finita de semiespacios cerrados.

Demostración. Probaremos la implicación (ii) $\Rightarrow$ (i) y dejaremos la otra como ejercicio. Para ello, supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es la intersección acotada de una familia finita $\{H_1^-, \ldots, H_p^-\}$ de semiespacios cerrados. Como el teorema 3.4 nos dice que $A = \text{conv}(\text{ext}(A))$, bastará ver que $\text{ext}(A)$ es finito. Procederemos por inducción sobre $\dim(A)$. Si $\dim(A) = 0$ ó $\dim(A) = 1$, entonces el resultado es trivial, luego supondremos que es cierto para dimensión menor que k y tomaremos A de dimensión k. Claramente tenemos que $\text{ext}(A) \subset \text{fr}(A) \subset H_1 \cup \ldots \cup H_p$, luego usando el lema 3.3, tenemos que $\text{ext}(A) = \cup_{i=1}^p (\text{ext}(A) \cap H_i) = \cup_{i=1}^p \text{ext}(A \cap H_i)$. Como cada conjunto $\text{ext}(A \cap H_i)$ es finito por hipótesis de inducción, deducimos que $\text{ext}(A)$ es finito. $\square$

3.2. El teorema de Helly y aplicaciones

En esta sección abordaremos uno de los resultados clave de la faceta combinatoria de la geometría de convexos: el teorema de Helly. Es sorprendente la cantidad de resultados que pueden relacionarse con él, hecho que ilustraremos con algunos ejemplos.

Teorema 3.6 (Helly). *Sea $\mathcal{A}$ una familia finita de al menos $n+1$ conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Si cualquier subfamilia de $n+1$ elementos tiene intersección no vacía, entonces $\mathcal{A}$ tiene intersección no vacía.*

Antes de entrar en la demostración merece la pena pararse a dibujar convexos en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que 3 cualesquiera de ellos se corten para darse cuenta intuitivamente de por qué todos tienen que cortarse.

Demostración. Procedamos por inducción sobre el número k de elementos de $\mathcal{A}$. Si $k = n + 1$, entonces el resultado es obvio. Supuesto cierto el resultado para cualquier familia de menos de k elementos, supongamos que $\mathcal{A}$ tiene exactamente $k > n + 1$ elementos, esto es, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ consideremos $\mathcal{A}_i = \{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k\}$, es decir, la subfamilia que se obtiene al eliminar el convexo A_i. Es obvio que $\mathcal{A}_i$ cumple la hipótesis de inducción para todo i luego existe $x_i \in \cap_{A_i \in \mathcal{A}_i} A_i = \cap_{j \neq i} A_j$. Consideremos entonces el sistema de ecuaciones lineales $\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0$, con la condición adicional $\sum_{i=1}^k \mu_i = 0$. Este es un sistema de $n + 1$ ecuaciones (una por cada componente en la ecuación $\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0$, más la condición adicional) con k incógnitas $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R}$.

Como $k > n+1$, este sistema es compatible indeterminado y existe una solución $(\mu_1, \ldots, \mu_k) \neq (0, \ldots, 0)$. No hay pérdida de generalidad en reordenar los términos para que $\mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0$ y $\mu_{s+1}, \ldots, \mu_k < 0$ para cierto $s \in \{1, \ldots, k-1\}$. Definimos

$$x = \sum_{i=1}^{s} \frac{\mu_i}{\mu_1 + \ldots + \mu_s} x_i = \sum_{i=s+1}^{k} \frac{\mu_i}{\mu_{s+1} + \ldots + \mu_k} x_i.$$

Esto nos dice que x es combinación convexa de $\{x_1, \ldots, x_s\}$, luego $x \in A_{s+1} \cap \ldots \cap A_k$, pero y también es combinación convexa de $\{x_{s+1}, \ldots, x_k\}$, con lo que $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_s$. Así, x es un punto en la intersección de la familia $\mathcal{A}$ como queríamos probar. □

Corolario 3.7. *Consideremos una familia finita $\mathcal{F}$ de hipercubos compactos en $\mathbb{R}^n$ con caras paralelas a los ejes coordenados, es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son de la forma*

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

Si dos elementos cualesquiera de $\mathcal{F}$ tienen intersección no vacía, entonces todos los elementos de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

Demostración. Consideremos la proyección natural $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sobre el factor i-ésimo. Para cada i, está claro que $\mathcal{F}_i = \{\pi_i(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es una familia de segmentos compactos en $\mathbb{R}$ con la propiedad de que dos cualesquiera de ellos se intersecan. El teorema de Helly en $\mathbb{R}$ nos dice que existe x_i en la intersección de todos los conjuntos de $\mathcal{F}_i$. Deducimos que el punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pertenece a la intersección $\cap_{F \in \mathcal{F}} F$ que, por tanto, es no vacía. □

Corolario 3.8. *Sea $\mathcal{F}$ una familia finita de segmentos paralelos en el plano con la propiedad de que dados tres cualesquiera de ellos podemos trazar una recta que interseque a los tres. Entonces, existe una recta que interseca a todos los convexos.*

Demostración. Podemos suponer, tras aplicar una rotación conveniente, que todos los segmentos son verticales, es decir, siguen la dirección del eje OY. Para cada segmento $S \in \mathcal{F}$, definimos $A_S = \{(m, n) \in \mathbb{R}^2 : \text{la recta } y = mx + n \text{ corta a } S\} \subset \mathbb{R}^2$. El hecho de que S es un segmento vertical permite demostrar que A_S es convexo (¿por qué?). Además, la familia $\{A_S : S \in \mathcal{F}\}$ cumple que tres cualesquiera de sus elementos tienen intersección no vacía, luego el teorema de Helly en $\mathbb{R}^2$ nos dice que todos sus elementos han de cortarse en un punto $(m_0, n_0) \in \mathbb{R}^2$, esto es, la recta $y = m_0 x + n_0$ corta a todos los elementos de $\mathcal{F}$. □

Corolario 3.9. *Sean $\mathcal{F}$ una familia de convexos de $\mathbb{R}^n$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ otro conjunto convexo con la propiedad de que, para cualesquiera $n+1$ elementos de $\mathcal{F}$, existe un trasladado de C que corta a todos ellos. Entonces, existe un trasladado de C que corta a todos los elementos de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Un trasladado de C corta a $A \in \mathcal{F}$ si, y sólo si, $(t + C) \cap A \neq \emptyset$ para algún $t \in \mathbb{R}^n$, es decir, si y sólo si, existen $c \in C$, $a \in A$ y $t \in \mathbb{R}^n$ tales que $t + c = a$. Por tanto, $t + C$ corta a A si, y sólo si, $t \in C - A$. Basta aplicar el teorema de Helly a la familia $\{C - A : A \in \mathcal{F}\}$. □

Este corolario, que puede verse como una generalización del teorema de Helly (basta tomar $C = \{0\}$) tiene algunos casos particulares destacables:

- Si $\mathcal{F}$ una familia de convexos de $\mathbb{R}^n$ tal que, para cualesquiera $n + 1$ elementos de $\mathcal{F}$, existe un punto que está a distancia menor que r de todos ellos, entonces existe un punto que está a distancia menor que r de todos los elementos de $\mathcal{F}$.
- Dado un convexo $C \subset \mathbb{R}^n$, sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto finito con la propiedad de que cualesquiera $n + 1$ puntos de P pueden cubrirse con un trasladado de C. Entonces P puede cubrirse completamente con un trasladado de C.

Observación 3.10. Por otro lado, nos preguntamos si podemos pasar a familias infinitas y esto es falso en general, aunque si los convexos involucrados son compactos, entonces sí es cierta dicha versión infinita y se deduce fácilmente de la *propiedad de la intersección finita* de los compactos: una familia infinita de cerrados en un espacio compacto tiene intersección no vacía si, y sólo si, cualquier subfamilia finita suya tiene intersección no vacía. Para aplicar esto al teorema de Helly, observemos que, aunque $\mathbb{R}^n$ no es compacto, podemos fijar a uno de los elementos de la familia y trabajar dentro de él, ya que estamos tomando intersecciones.

Reuniendo toda esta información, podemos dar el siguiente resultado (nada trivial) que relaciona el diámetro de un conjunto con el radio de una bola en la que cabe. Se puede generalizar a dimensión arbitraria sin problemas.

Corolario 3.11. *Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunto arbitrario tal que* $\operatorname{diam}(P) \leq 1$. *Entonces, P está contenido en una bola cerrada de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Demostración. Usando el corolario 3.9 en su versión infinita aplicado a P como familia de puntos (compactos) y tomando como C una bola cerrada de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (también compacta), bastará probar que cualesquiera tres puntos de P se pueden cubrir por una bola cerrada de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$. En otras palabras, habrá ver que todo triángulo cuyos lados tienen longitud menor o igual que 1 está contenido en una bola cerrada de radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dejamos los detalles de este último paso como ejercicio. □

Este resultado no se puede mejorar ya que, al tomar P como un triángulo equilátero de lado 1, se tiene que $\operatorname{diam}(P) = 1$ y la menor bola que contiene a P es su circunferencia circunscrita, que tiene radio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. La distancia de Hausdorff

Denotaremos por $\mathcal{C}^n$ a la familia de subconjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, mientras que $\mathcal{K}^n$ denotará la familia de subconjuntos compactos y convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$. A los elementos de $\mathcal{K}^n$ también se les llama *cuerpos convexos* en la literatura.

Definición 4.1. *Sean $K, L \in \mathcal{C}^n$. La distancia de Hausdorff entre K y L se define por*

$$\delta(K, L) = \text{mín}\{\alpha > 0 : K \subset L + \alpha\overline{B}, L \subset K + \alpha\overline{B}\},$$

donde $\overline{B} = \overline{B}_1(0)$ denota la bola unidad en $\mathbb{R}^n$ centrada en el origen.

Observemos que el mínimo de la definición existe y se alcanza por ser los conjuntos compactos. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado, entonces $A + \alpha\overline{B}$ es el entorno métrico cerrado de A de radio α. Por tanto, siempre que escribamos $\delta(K, L) \leq \varepsilon$, estaremos diciendo que $K \subset L + \varepsilon\overline{B}$ (K está en el entorno tubular cerrado de L de radio ε) y $L \subset K + \varepsilon\overline{B}$ (L está en el entorno tubular cerrado de K de radio ε).

Por otro lado, notemos que δ extiende a la distancia euclídea entre puntos y entre un punto y un conjunto, esto es, $\delta(\{x\}, \{y\}) = d(x, y)$ y $\delta(\{x\}, A) = \text{dist}(x, A)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

Comenzaremos probando que $(\mathcal{C}^n, \delta)$ es un espacio métrico completo.

Lema 4.2. *La aplicación δ es una distancia en $\mathcal{C}^n$.*

Demostración. En primer lugar, de la definición de distancia de Hausdorff deducimos que $\delta(K, L) = 0$ si, y sólo si, $K \subset L$ y $L \subset K$, es decir, $K = L$. También es fácil darse cuenta de que $\delta(K, L) = \delta(L, K)$ para cualesquiera $K, L \in \mathcal{C}^n$.

Bastará ver que δ cumple la desigualdad triangular, es decir, $\delta(K, L) \leq \delta(K, M) + \delta(M, L)$ para cualesquiera $K, M, L \in \mathcal{C}^n$. En efecto, si llamamos $\alpha = \delta(K, M)$ y $\beta = \delta(M, L)$, tenemos que $K \subset M + \alpha\overline{B}$, $M \subset K + \alpha\overline{B}$, $M \subset L + \beta\overline{B}$ y $L \subset M + \alpha\overline{B}$, luego $K \subset L + \alpha\overline{B} + \beta\overline{B} = L + (\alpha + \beta)\overline{B}$ y, análogamente, $L \subset K + \beta\overline{B} + \alpha\overline{B} = K + (\alpha + \beta)\overline{B}$, de donde $\delta(K, L) \leq \alpha + \beta$. □

Lema 4.3. *Sea $\{K_i\} \subset \mathcal{C}^n$ una sucesión decreciente de compactos (esto es, $K_i \supset K_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$). Entonces $\{K_i\} \xrightarrow{\delta} K = \cap_{i=1}^{\infty} K_i$.*

Demostración. Hemos de probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(K_i, K) \leq \varepsilon$ para todo $i \geq i_0$, es decir, $K \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$ y $K_i \subset K + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \geq i_0$. Como quiera que $K \subset K_i \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tendremos que probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \subset K + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \geq i_0$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión parcial $\{K_i'\}$ de $\{K_i\}$ tal que $K_i' \not\subset K + \varepsilon\overline{B}$. Entonces, los conjuntos $A_i = K_i' \setminus \text{int}(K +$

$\varepsilon\overline{B}$) forman una sucesión decreciente de compactos no vacíos[9] y, por tanto, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$. Por otro lado, tenemos que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = (\cap_{i=1}^{\infty} K_i') \setminus \operatorname{int}(K+\varepsilon\overline{B}) = K \setminus \operatorname{int}(K+\varepsilon\overline{B}) = \emptyset$, ya que $K \subset \operatorname{int}(K+\varepsilon\overline{B})$ y tenemos la contradicción. □

Proposición 4.4. *El par $(\mathcal{C}^n, \delta)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{K_i\}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ y probemos que es convergente. En primer lugar, observamos que la condición de Cauchy implica que $\cup_{i=1}^{\infty} K_i$ es un conjunto acotado. En efecto, para $\varepsilon = 1$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(K_i, K_{i_0}) \leq \varepsilon$ para todo $i \geq i_0$, lo que nos dice que $K_i \subset K_{i_0} + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \geq i_0$. Así, $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \subset (\cup_{i=1}^{i_0-1} K_i) \cup (K_{i_0} + \varepsilon\overline{B})$ y este último conjunto es acotado como unión finita de compactos.

Consideremos, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_i = \overline{\cup_{j=i}^{\infty} K_j}$. Es fácil ver que A_i es un compacto ya que es cerrado y está contenido en el conjunto acotado $\overline{\cup_{i=1}^{\infty} K_i}$. Más aún, $\{A_i\}$ forma una sucesión decreciente de compactos, luego el lema 4.3 nos asegura que $\{A_i\} \xrightarrow{\delta} A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$. Probaremos que $\{K_i\} \xrightarrow{\delta} A$ y habremos terminado. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(A_i, A) \leq \varepsilon$ para todo $i \geq i_1$, luego $K_i \subset A_i \subset A + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \geq i_1$. Por otro lado, la condición de Cauchy nos dice que existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(K_i, K_j) \leq \varepsilon$ para todo $i, j \geq i_2$, luego $A \subset A_i \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \geq i_2$ (ya que $K_j \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$ para $j \geq i \geq i_2$ y $A_i = \overline{\cup_{j=i}^{\infty} K_j}$). Finalmente, tomando $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$, hemos probado que $K_i \subset A + \varepsilon\overline{B}$ y $A \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$ para todo $i \geq i_0$. □

Proposición 4.5. *Toda sucesión acotada en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ admite una parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{K_i\}$ una sucesión acotada en $(\mathcal{C}^n, \delta)$, esto es, existen $K \in \mathcal{C}^n$ y $R > 0$ tales que $\delta(K_i, K) \leq R$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, $K_i \subset K + R\overline{B}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \subset K + R\overline{B}$ y deducimos que $\cup_{i=1}^{\infty} K_i$ está acotado.

Consideremos el cubo $T = [-a, a]^n \subset \mathbb{R}^n$ para cierto $a > 0$ tal que $\cup_{i=1}^{\infty} K_i \subset T$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$, definamos $\mathcal{T}_m$ como el conjunto de los 2^{mn} cubos en que se divide T al dividir sus aristas en 2^m partes iguales, es decir,

$$\mathcal{T}_m = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left[\tfrac{k_i a}{2^{m-1}}, \tfrac{(k_i+1)a}{2^{m-1}} \right] : k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z} \cap [-2^{m-1}, 2^{m-1} - 1] \right\}.$$

Para cada compacto $K \subset T$, definimos $A_m(K) = \cup\{S \in \mathcal{T}_m : S \cap K \neq \emptyset\}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $K_i^0 = K_i$ y, dado $m \in \mathbb{N}$, definimos $\{K_i^m\}$ como una parcial de $\{K_i^{m-1}\}$ para la que $A_m(K_i^m)$ es constante (observemos que $A_m(K_i^{m-1})$ sólo tiene un número finito de posibilidades con lo cual alguna de ellas se tendrá que dar para infinitos valores de i). El resto de la demostración consistirá en probar que la sucesión diagonal $\{K_m^m\}$ es de Cauchy (luego convergente por la proposición 4.4).

[9] El teorema de Cantor nos dice que toda sucesión decreciente de compactos no vacíos en un espacio métrico completo tiene intersección no vacía.

Dados $m, p, q \in \mathbb{N}$, observemos que $A_m(K_p^m) = A_m(K_q^m)$, luego cada punto de K_p^m (resp. K_q^m) está a distancia menor que el diámetro de un cubo de arista $\frac{a}{2^{m-1}}$ del compacto K_q^m (resp. K_p^m). Como el diámetro del cubo de arista $\frac{a}{2^{m-1}}$ es igual a la longitud de su diagonal principal y ésta es igual a $\frac{a}{2^{m-1}}\sqrt{n}$, la discusión anterior nos asegura que $\delta(K_p^m, K_q^m) \leq \frac{a}{2^{m-1}}\sqrt{n}$ para cualesquiera $m, p, q \in \mathbb{N}$. En particular, $\delta(K_m^m, K_q^m) \leq \frac{a}{2^{m-1}}\sqrt{n}$ y, tomando $h \geq m$, como el conjunto K_h^h es de la forma K_j^m para algún $j \in \mathbb{N}$ (ya que $\{K_i^h\}$ es una parcial de $\{K_i^m\}$), deducimos que $\delta(K_m^m, K_h^h) \leq \frac{a}{2^{m-1}}\sqrt{n}$ para cualesquiera $m, h \in \mathbb{N}$, $h \geq m$ y se sigue que $\{K_m^m\}$ es de Cauchy. □

Proposición 4.6. *$\mathcal{K}^n$ es un cerrado en $(\mathcal{C}^n, \delta)$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$ es un abierto, esto es, dado $K \in \mathcal{C}^n$ no convexo, encontraremos $\varepsilon > 0$ tal que cualquier $K' \in \mathcal{C}^n$ con $\delta(K, K') \leq \varepsilon$ tampoco es convexo.

Si K es compacto y no convexo, entonces existen $x, y \in K$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que $z = (1-\lambda)x + \lambda y \notin K$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_{2\varepsilon}(z) \cap K = \emptyset$. Dado $K \in \mathcal{C}^n$ con $\delta(K, K') \leq \varepsilon$, veamos que K' no es convexo, para lo que razonaremos por contradicción suponiendo que sí lo es. Como $x, y \in K$ y $\delta(K, K') \leq \varepsilon$, deducimos que existen $x', y' \in K'$ tales que $d(x, x') \leq \varepsilon$ y $d(y, y') \leq \varepsilon$. Como K' es convexo, tendremos que $z' = (1-\lambda)x' + \lambda y' \in K'$. Es fácil ver que $d(z, z') \leq \varepsilon$ y, como $\delta(K, K') \leq \varepsilon$, existe $w \in K$ tal que $d(w, z') \leq \varepsilon$, luego $d(z, w) \leq d(z, z') + d(z', w) \leq 2\varepsilon$, esto es, $w \in \overline{B}_{2\varepsilon}(z) \cap K = \emptyset$, y hemos encontrado la contradicción buscada. □

Con esto ya podemos enunciar las propiedades más relevantes del espacio métrico $(\mathcal{K}^n, \delta)$ que obtenemos al restringir la distancia de Hausdorff a $\mathcal{K}^n$. Señalamos que el apartado 2 se conoce como teorema de selección de Blaschke.

Teorema 4.7.

1. *$(\mathcal{K}^n, \delta)$ es un espacio métrico completo.*
2. *Toda sucesión acotada en $(\mathcal{K}^n, \delta)$ admite una parcial convergente en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.*
3. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^n$ es compacto en $(\mathcal{K}^n, \delta)$ si, y sólo si, es cerrado y acotado.*
4. *La familia de politopos es densa en $(\mathcal{K}^n, \delta)$. En particular, $(\mathcal{K}^n, \delta)$ es separable[10].*

Demostración. El apartado 1 es consecuencia de que la métrica inducida sobre un cerrado de un espacio métrico completo también es completa. El apartado 2 es consecuencia de la proposición 4.5 y de que $\mathcal{K}^n$ es cerrado. Para probar 3, observemos que todo compacto en un espacio métrico ha de ser cerrado y acotado y, para la implicación contraria, la proposición 4.5 nos dice que si $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^n$ es cerrado y acotado, entonces es secuencialmente compacto; como las nociones de compacidad y compacidad secuencial son equivalentes para espacios métricos, deducimos que $\mathcal{A}$ es compacto.

[10] En general, un espacio métrico es IIAN si, y sólo si, es separable, lo que prueba que $(\mathcal{K}^n, \delta)$ es IIAN.

Para probar que los politopos son densos en $\mathcal{K}^n$, vamos a ver que, dados $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, existe un politopo P tal que $\delta(P, K) \leq \varepsilon$. Para ello, como K es compacto, sabemos que podemos extraer un subrecubrimiento finito del recubrimiento por abiertos $K \subset \cup_{x \in K} B_\varepsilon(x)$, es decir, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Tomando el politopo $P = \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, tenemos que $P \subset K \subset K + \varepsilon\overline{B}$ por ser K convexo y $K \subset \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i) \subset P + \varepsilon\overline{B}$, lo que prueba que $\delta(K, P) \leq \varepsilon$. Finalmente, para ver que $(\mathcal{K}^n, \delta)$ es separable, es suficiente darse cuenta de que el conjunto de politopos con vértices de coordenadas racionales es denso y numerable en $(\mathcal{K}^n, \delta)$. □

El resto de esta sección está dedicado a probar que algunas funciones son continuas respecto de la distancia de Hausdorff. En los ejercicios pueden encontrarse más.

Proposición 4.8. *La aplicación envolvente convexa* $\operatorname{conv} : \mathcal{C}^n \to \mathcal{K}^n$ *es lipschitziana con constante de Lipschitz igual a* 1.

Demostración. Si $K, L \in \mathcal{C}^n$ satisfacen que $K \subset L + \alpha\overline{B}$, entonces $K \subset L + \alpha\overline{B} \subset \operatorname{conv}(L) + \alpha\overline{B}$ y, como $\operatorname{conv}(L) + \alpha\overline{B}$ es convexo, se sigue que $\operatorname{conv}(K) \subset \operatorname{conv}(L) + \alpha\overline{B}$. Usando esta propiedad es fácil ver que $\delta(\operatorname{conv}(K), \operatorname{conv}(L)) \leq \delta(K, L)$ para cualesquiera $K, L \in \mathcal{C}^n$, lo que nos dice que conv es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que 1. Para ver que dicha constante es 1 basta darse cuenta de que, para cualesquiera convexos distintos K, L, se tiene que $\delta(\operatorname{conv}(K), \operatorname{conv}(L)) = \delta(K, L)$. □

Todo compacto es Lebesgue-medible, ya que es un cerrado de $\mathbb{R}^n$ y la σ-álgebra de Lebesgue contiene a todos los cerrados. Entonces, tiene sentido definir la aplicación volumen $\operatorname{vol} : \mathcal{C}^n \to \mathbb{R}$, siendo $\operatorname{vol}(K) < \infty$ la medida de Lebesgue de $K \in \mathcal{C}^n$. Esta aplicación no es continua respecto de la distancia de Hausdorff[11], aunque sí lo es cuando nos restringuimos a $\mathcal{K}^n$.

Proposición 4.9. *La aplicación* $\operatorname{vol} : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ *es continua.*

Demostración. Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, probaremos que existe $\alpha > 0$ tal que si $K' \in \mathcal{K}^n$ cumple que $\delta(K, K') \leq \alpha$, entonces $|\operatorname{vol}(K) - \operatorname{vol}(K')| \leq \varepsilon$, lo que demostrará la continuidad. Distinguimos dos casos:

- Si $\operatorname{int}(K) = \emptyset$, entonces $\dim(K) < n$ y existe un hiperplano H tal que $K \subset H$. Como H tiene medida de Lebesgue nula, deducimos que $\operatorname{vol}(K) = 0$. Podemos suponer, aplicando una isometría en $\mathbb{R}^n$, que $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.

  Tomemos $R > 0$ tal que $K \subset B_R(0)$. Dado $K' \in \mathcal{K}^n$ tal que $\delta(K, K') \leq \alpha \leq 1$, tenemos que $K' \subset K + \alpha\overline{B} \subset \overline{B}_{R+1}(0)$, pero por otro lado, $K' \subset K + \alpha\overline{B} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [-\alpha, \alpha]$, con lo que $K' \subset (B_{R+1}(0) \cap H) \times [-\alpha, \alpha]$. De aquí deducimos que

[11] Por ejemplo, para cada $p \in \mathbb{N}$, consideremos $C_p = \{\frac{a}{p} : a \in \mathbb{Z} \cap [0, p]\}$ el conjunto de puntos racionales del intervalo $[0, 1]$ con denominador p. Entonces, $\operatorname{vol}(C_p) = 0$ para todo p, mientras que $\{C_p\} \xrightarrow{\delta} [0, 1]$ y $\operatorname{vol}([0, 1]) = 1$.

$\mathrm{vol}(K') \leq 2C\alpha$, siendo $C = \mathrm{vol}_H(B_{R+1}(0) \cap H) < \infty$. Por tanto, tomando $\alpha = \min\{\frac{\varepsilon}{2C}, 1\}$, tenemos que $\mathrm{vol}(K') \leq \varepsilon$ para todo $K' \in \mathcal{K}^n$ tal que $\delta(K, K') \leq \alpha$.

- Supongamos ahora que $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$ (luego $\mathrm{vol}(K) > 0$). Aplicando una traslación si es necesario, podemos suponer que $0 \in \mathrm{int}(K)$. La demostración en este caso se basará en las siguientes dos afirmaciones:

  Afirmación 1. Supongamos que $K' \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda > 1$ cumplen que $K \subset \lambda K'$ y $K' \subset \lambda K$. Entonces, $|\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K')| < \lambda^n(\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K)$.

  En efecto, por un lado, como $K \subset \lambda K'$, se tiene que $\mathrm{vol}(K) \leq \lambda^n \mathrm{vol}(K')$, de donde $\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K') \leq (\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K')$. Por otro lado, como $K' \subset \lambda K$, tenemos que $\mathrm{vol}(K') \leq \lambda^n \mathrm{vol}(K)$, de donde $\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K') \leq (\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K') \leq \lambda^n(\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K)$. Ahora bien, tenemos que $\mathrm{vol}(K') - \mathrm{vol}(K) \leq (\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K) < \lambda^n(\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K)$, lo que termina la demostración de la afirmación 1.

  Afirmación 2. Sea $\rho > 0$ tal que $\rho\overline{B} \subset \mathrm{int}(K)$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\rho\overline{B} \subset K'$ para todo $K' \in \mathcal{K}^n$ cumpliendo que $\delta(K, K') \leq \alpha$.

  En efecto, como $\rho\overline{B} \subset \mathrm{int}(K)$, podemos tomar $\alpha > 0$ tal que $\rho\overline{B} + \alpha\overline{B} = (\rho + \alpha)\overline{B} \subset K$. Si $K' \in \mathcal{K}^n$ tal que $\delta(K, K') \leq \alpha$, entonces $\rho\overline{B} + \alpha\overline{B} \subset K \subset K' + \alpha\overline{B}$, luego $\rho\overline{B} \subset K'$ usando la propiedad de cancelación de la suma de Minkowski.

  Procedamos ya a la demostración. Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\lambda > 1$ tal que $\lambda^n(\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K) < \varepsilon$ y $\rho > 0$ tal que $\rho\overline{B} \subset \mathrm{int}(K)$, luego la afirmación 2 nos dice que existe $0 < \alpha \leq (\lambda - 1)\rho$ tal que $\rho\overline{B} \subset K'$ para todo $K' \in \mathcal{K}^n$ con $\delta(K, K') \leq \alpha$. Para un K' en tales condiciones se tiene que $K' \subset K + \alpha\overline{B} \subset K + (\lambda - 1)\rho\overline{B} \subset K + (\lambda - 1)K \subset \lambda K$. Análogamente, $K \subset \lambda K'$, luego estamos en condiciones de aplicar la afirmación 1 para concluir que $|\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K')| < \lambda^n(\lambda^n - 1)\,\mathrm{vol}(K) < \varepsilon$ siempre que $\delta(K, K') \leq \alpha$. □

5. La desigualdad isodiamétrica

Nuestro objetivo en esta última sección es probar el siguiente resultado, que ilustra cómo pueden aplicarse las técnicas desarrolladas en las secciones anteriores para resolver un problema que excede el ámbito de los conjuntos convexos:

Teorema 5.1 (Desigualdad isodiamétrica). *Dado $K \in \mathcal{C}^n$, se cumple que*

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(\overline{B})} \leq \left(\frac{\mathrm{diam}(K)}{\mathrm{diam}(\overline{B})}\right)^n,$$

y la igualdad se cumple si, y sólo si, K es una bola cerrada.

Reducción de la desigualdad: convexidad + compacidad

El siguiente lema nos dice que podemos reducir la desigualdad a convexos.

Lema 5.2. *Dado $K \in \mathcal{C}^n$, se cumple que* $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(K)) \geq \mathrm{vol}(K)$ *y* $\mathrm{diam}(\mathrm{conv}(K)) = \mathrm{diam}(K)$.

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Una estrategia para demostrar este tipo de resultados, que mostraremos en este caso concreto, es la siguiente: dado $K \in \mathcal{K}^n$, consideraremos

$$\mathcal{N}(K) = \{L \in \mathcal{K}^n : \mathrm{vol}(L) \geq \mathrm{vol}(K), \mathrm{diam}(L) \leq \mathrm{diam}(K)\}.$$

Observemos que los elementos de $\mathcal{N}(K)$ son mejores competidores que K en el sentido de que, para cualquier $L \in \mathcal{N}(K)$, se tiene que

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(\overline{B})} \leq \frac{\mathrm{vol}(L)}{\mathrm{vol}(\overline{B})} \boxed{*} \left(\frac{\mathrm{diam}(L)}{\mathrm{diam}(\overline{B})}\right)^n \leq \left(\frac{\mathrm{diam}(K)}{\mathrm{diam}(\overline{B})}\right)^n.$$

Si probamos que hay una bola $L \in \mathcal{N}(K)$, entonces el asterisco $\boxed{*}$ se convierte en una igualdad, lo que prueba la desigualdad original. Por tanto, probaremos que hay una bola en cada conjunto $\mathcal{N}(K)$ y que, si K no es una bola, entonces dicha bola mejora estrictamente las desigualdades anteriores.

La idea ahora consistirá en utilizar una función distinta para minimizar: el circunradio. Esta función nos dará un criterio útil para distinguir a la bola de entre los elementos de $\mathcal{N}(K)$.

Lema 5.3. *Dado $K \in \mathcal{K}^n$, se define el circunradio de A como*

$$R(A) = \min\{\rho > 0 : A \subset \overline{B}_\rho(x_0) \text{ para algún } x_0 \in \mathbb{R}^n\} \geq 0.$$

(a) Existe una única bola de radio $R(A)$ en $\mathbb{R}^n$ que contiene a A.

(b) La aplicación $R : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ es continua respecto de la distancia de Hausdorff.

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Lema 5.4. *La aplicación diámetro* $\mathrm{diam} : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ *es continua respecto de la distancia de Hausdorff.*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

Lema 5.5. *Dado $K \in \mathcal{K}^n$, existe un elemento de $\mathcal{N}(K)$ contenido en $B(K)$ que minimiza el circunradio de entre todos los elementos de $\mathcal{N}(K)$.*

Demostración. Sea $R(K)$ y $B(K)$ el circunradio y la bola asociada a él proporcionados por el lema 5.3. Si denotamos por R_0 al ínfimo de los circunradios de los elementos de X, que queremos probar que es un mínimo. Considerando $\mathcal{H} = \{F \in \mathcal{K}^n : F \subset B(K)\}$,

como quiera que $R_0 \leq R(K)$, deducimos que $R_0 = \inf_{K \in \mathcal{H} \cap \mathcal{N}(K)} R(K)$. Ahora bien, $\mathcal{H} \cap \mathcal{N}(K)$ está acotado en la distancia de Hausdorff, luego podemos tomar una parcial convergente de cualquier sucesión minimizante del circunradio, esto es, existe una sucesión $\{K_i\} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{N}(K)$ convergiendo a cierto $K_\infty \in \mathcal{K}^n$ tal que $\{R(K_i)\} \to R_0$. Como el circunradio, el volumen y el diámetro son continuos, deducimos que $R(K_\infty) = R_0$, $\mathrm{vol}(K_\infty) \geq \mathrm{vol}(K)$ y $\mathrm{diam}(K_\infty) \leq \mathrm{diam}(K)$, luego $K_\infty \in \mathcal{N}(K)$ materializa el ínfimo y hemos terminado. □

Observemos lo que hemos conseguido. Para demostrar la desigualdad isodiamétrica, sea $K \in \mathcal{K}^n$, que podemos suponer con $\mathrm{vol}(K) > 0$ (en caso contrario, la desigualdad es trivial), y tomemos B el cuerpo convexo que minimiza el circunradio en $\mathcal{N}(K)$. Si probamos que B tiene que ser una bola, habremos terminado, porque las condiciones $\mathrm{vol}(L) \geq \mathrm{vol}(K)$ y $\mathrm{diam}(L) \leq \mathrm{diam}(K)$ nos dirán que B es mejor competidor que K en la desigualdad isodiamétrica y para B se da la igualdad. Como decíamos antes, el hecho de usar el circunradio sólo aparece para cazar la bola, pero tendremos que introducir alguna herramienta adicional.

Caracterización de la igualdad: simetrización

Sean $K \in \mathcal{K}^n$ un cuerpo convexo y $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano. Para cada $x \in H$, definimos L_x como la recta ortogonal a H que pasa por x. Si consideramos la proyección ortogonal $P : \mathbb{R}^n \to H$, entonces, $L_x \cap K$ es un intervalo compacto no vacío para todo $x \in P_H(K)$ y esto nos permite definir la función $\lambda : P(K) \to \mathbb{R}_0^+$, siendo $\lambda(x)$ la longitud de $L_x \cap K$. Si tomamos $u \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario ortogonal a H, definimos el *simetrizado de Steiner* de K respecto de H como

$$K_H = \left\{ x + tu : x \in P(K), |t| \leq \tfrac{\lambda(x)}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

En otras palabras, trasladamos cada segmento L_x en la dirección de u de forma que el punto medio del segmento trasladado pertenezca a H. Está claro que K_H es simétrico respecto del hiperplano H.

Lema 5.6. *En las condiciones anteriores, $P(K) \subset H$ es un conjunto convexo y la función $\lambda : P(K) \to \mathbb{R}$ es cóncava y semicontinua superiormente*[12].

Demostración. Está claro que $P_H(K) \subset H$ es un conjunto convexo por ser la imagen por la aplicación lineal P del convexo K. Dados $x, y \in P(H)$ y $t \in (0,1)$, probemos que $\lambda((1-t)x + ty) \geq (1-t)\lambda(x) + t\lambda(y)$. Para ello, escribamos $L_x \cap K = [a_1, b_1]$ y $L_y \cap K = [a_2, b_2]$, donde podemos suponer que $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$ apuntan en el mismo sentido. Por la convexidad de K, tenemos que $a = (1-t)a_1 + ta_2 \in K$ y

[12] Esto quiere decir que, para cualquier $x \in P(K)$, se cumple que $\limsup_{y \to x} \lambda(y) \leq \lambda(x)$. En otras palabras, el subgrafo de λ es cerrado.

$b = (1-t)b_1 + tb_2 \in K$ cumplen que $P(a) = P(b) = (1-t)x + ty$. Esto nos dice, usando otra vez la convexidad de K, que $[a,b] \subset L_{(1-t)x+ty} \cap K$, por lo que $d(a,b)$, la longitud de $[a,b]$ es menor o igual que $\lambda((1-t)x+ty)$. No obstante, podemos desarrollar $d(a,b) = |(1-t)(a_1-b_1)+t(a_2-b_2)| = (1-t)d(a_1b_1)+td(a_2,b_2) = (1-t)\lambda(x)+t\lambda(y)$, donde hemos usado que $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$ tienen el mismo sentido.

La semicontinuidad superior de λ se deja como ejercicio. □

Proposición 5.7. *Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que*

(a) $K_H \in \mathcal{K}^n$,

(b) $\mathrm{vol}(K_H) = \mathrm{vol}(K)$,

(c) $\mathrm{diam}(K_H) \leq \mathrm{diam}(K)$.

Demostración. Está claro que K_H está acotado. Como K_H puede verse como la intersección del subgrafo de λ con el epigrafo de $-\lambda$, como grafos sobre H, y la λ es semicontinua superiormente y cóncava, deducimos que K_H es cerrado y convexo. Por lo tanto, $K_H \in \mathcal{K}^n$ y tenemos probado (a). El apartado (b) es consecuencia inmediata del teorema de Fubini.

Finalmente, para probar (c), tomemos $x_1, x_2 \in K_H$ tales que $d(x,y) = \mathrm{diam}(K_H)$ y escribamos $L_x \cap K = [a_1, b_1]$ y $L_y \cap K = [a_2, b_2]$, así como $z_1 = P(x_1)$ y $z_2 = P(x_2)$. Entonces, no es difícil ver que x_1 y x_2 tienen que estar a distintos lados de H y en la frontera de X_H, luego usando Pitágoras:

$$d(x_1,x_2)^2 = d(z_1,z_2)^2 + \tfrac{1}{4}(\lambda(z_1)+\lambda(z_2))^2.$$

Fijada una dirección u unitaria y ortogonal a H y $f(x) = \langle x, u\rangle$ la distancia orientada en la dirección de u, podemos suponer que $f(a_i) \leq f(b_i)$ para $i \in \{1,2\}$ y $f(x_1) \leq f(x_2)$, luego si denotamos por $\alpha = |f(\frac{a_1+b_1}{2}) - f(\frac{a_2+b_2}{2})| \geq 0$, la diferencia de alturas entre los puntos medios de los segmentos, se tiene que

$$d(a_1,b_2)^2 = d(z_1,z_2)^2 + \tfrac{1}{4}(\lambda(z_1)+\lambda(z_2)+\alpha)^2 \geq d(x_1,x_2)^2,$$

Como $a_1, b_2 \in K$, esto prueba que $\mathrm{diam}(K) \geq \mathrm{diam}(K_H)$. □

Volvemos ya a la demostración de la desigualdad isodiamétrica.

Lema 5.8. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ distinto de una bola, entonces pueden elegirse una familia finita de hiperplanos de $\mathbb{R}^n$, tales que la simetrización sucesiva de K respecto de ellos reduce estrictamente su circunradio.*

Demostración. Sea $S = \mathrm{fr}(B(K))$, luego podemos suponer que $S \cap K \neq \emptyset$ y $S \setminus K \neq \emptyset$. Sea $x \in S \setminus K$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_{2\varepsilon}(x) \cap K = \emptyset$. Además, por la compacidad de $S \cap K$,

existen $x_1, \ldots, x_k \in S \cap K$ tales que $S \cap K \subset \cup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea H_i el hiperplano ortogonal al segmento $[x, x_i]$ pasando por su punto medio.

Sea K_i el resultado de simetrizar respecto de $H_1, \ldots, H_i$ en ese orden. Es fácil ver que $K_i \subset B(K)$ para todo i ya que $B(K)$ se queda invariante por la reflexión respecto de H_i. Ahora bien,en cada simetrización K_i decrece la intersección con S estrictamente y desaparece $K_i \cap S \cap B_\varepsilon(x_i) = \emptyset$, lo que nos dice que, después de todas las simetrizaciones, tendremos que $K_k \cap S = \emptyset$, esto es, podrá reducirse su circunradio. □

Supongamos que un elemento minimizante del circunradio en $\mathcal{N}(K)$ no es una bola. Aplicando este último lema y la proposición 5.7, podremos producir otro elemento de $\mathcal{N}(K)$ con circunradio estrictamente menor, lo cual es una contradicción. Esto prueba que todo elemento que minimiza el circunradio en $\mathcal{N}(K)$ es una bola cerrada.

6. Ejercicios y soluciones

Ejercicio 1.

(a) Sea $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una norma[13] en $\mathbb{R}^n$ y sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Demuestra que las bolas abierta y cerrada

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}, \qquad \overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\},$$

son conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, simétricos respecto del origen, que contienen a x en su interior.

(b) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, compacto y simétrico respecto del origen, tal que $0 \in \operatorname{int}(A)$. ¿Existe una norma en $\mathbb{R}^n$ para la que A es una bola cerrada centrada en el origen?

Solución. Dados $y, z \in \mathbb{R}^n$ y $t \in [0, 1]$, se tiene que

$$\|((1-t)y + tz) - x\| = \|(1-t)(y-x) + t(z-x)\| \leq (1-t)\|y - x\| + t\|z - x\|,$$

donde hemos usado la desigualdad triangular. Ahora bien, si $y, z \in B_r(x)$, entonces $\|y - x\| < r$ y $\|z - x\| < r$, de donde $\|((1-t)y + tz) - x\| < (1-t)r + tr = r$, es decir, $(1-t)y + tz \in B_r(x)$. Análogamente, si $y, z \in \overline{B}_r(x)$, entonces $\|y - x\| \leq r$ y $\|z - x\| \leq r$, de donde $(1-t)y + tz \in \overline{B}_r(x)$. Del hecho de que $\|-x\| = \|x\|$ se sigue que tanto $B_r(x)$ como $\overline{B}_r(x)$ son simétricos respecto del origen.

El hecho de que $x \in \operatorname{int}(B_r(x))$ se deduce de que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas generan la misma topología y, en particular, $B_r(x)$ es abierto en la topología usual independientemente de la norma que estemos considerando.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto en las condiciones de (b). Para dar una respuesta afirmativa a la pregunta formulada, nuestra candidata a norma será la aplicación

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \geq 0.$$

Es claro que el ínfimo anterior es un mínimo ya que el conjunto es compacto. De hecho, podemos recuperar $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, por lo que bastará ver que $\|\cdot\|$ es una norma y habremos terminado.

Como A está acotado, es fácil ver que $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$. Además, dados $\mu \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, tenemos que $\|\mu x\| = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda A\}$. Como $\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda A\} = \{\lambda \cdot |\mu| : \lambda > 0, x \in \lambda A\}$, deducimos que $\|\mu x\| = |\mu| \cdot \|x\|$ (aquí hemos usado la simetría de A). Finalmente, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, veamos que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Por la definición de $\|\cdot\|$, tenemos que $x \in \|x\| \cdot A$ e $y \in \|y\| \cdot A$. De la convexidad de A se deduce que $x + y \in \|x\| \cdot A + \|y\| \cdot A = (\|x\| + \|y\|)A$ y, otra vez por la definición de $\|\cdot\|$, se tiene que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

[13] La aplicación $\|\cdot\|$ es una norma si cumple (1) $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$; (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; y (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2.

(a) Dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados, demuestra que $A + B$ no tiene por qué ser cerrado. En cambio, si A es cerrado y B es compacto, demuestra que $A + B$ es cerrado.

(b) Encuentra $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado tal que $\text{conv}(A)$ no es cerrado.

Solución. Dados $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con $\frac{a}{b}$ irracional, consideremos los subconjuntos cerrados $A = \{na : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ y $B = \{mb : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, y probemos que $0 \in \text{cl}(A + B) \setminus (A + B)$, lo que implica que $A + B$ no es cerrado. En primer lugar, es fácil darse cuenta de que si $0 \in A + B$, entonces existen $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $0 = na + mb$, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$, lo que es una contradicción y, por tanto, $0 \notin A+B$. No obstante, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existirán sucesiones de enteros $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim\{\frac{m_i}{n_i}\} = \frac{a}{b}$. De aquí es fácil ver que $\lim\{m_i b - n_i a\} = 0$, pero $m_i b - n_i a \in A + B$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego hemos probado que $0 \in \text{cl}(A + B)$. Este ejemplo sirve para todo $n \geq 1$ si vemos la recta real $\mathbb{R}$ como un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos ahora que A es cerrado y B es compacto, y veamos que $\text{cl}(A + B) \subset (A+B)$, lo que nos dirá que $A+B$ es cerrado. Dado $x_0 \in \text{cl}(A+B)$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset A + B$ convergiendo a x_0, y cada x_n puede escribirse como $x_n = a_n + b_n$ con $a_n \in A$ y $b_n \in B$. Como B es compacto, existirá una parcial $\{b_{\sigma(n)}\}$ convergiendo a cierto $b_0 \in B$. Ahora bien, tenemos que $\{a_{\sigma(n)}\} = \{x_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)}\} \to x_0 - b_0$, lo que prueba que $\{a_n\}$ tiene una parcial convergente a $a_0 = x_0 - b_0$. Como A es cerrado, deducimos que $a_0 \in A$, lo que finalmente implica que $x_0 = a_0 + b_0 \in A + B$.

Para responder al apartado (b) basta tomar el siguiente ejemplo en $\mathbb{R}^2$, que puede extenderse[14] a $\mathbb{R}^n$ para todo $n \geq 2$: $A = \{(x, \arctan(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. No es difícil comprobar que A es cerrado y $\text{conv}(A) = \mathbb{R} \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ no es cerrado (de hecho es abierto).

Ejercicio 3. Sean $K \in \mathcal{K}^n$ y $f : K \to \mathbb{R}$ una función convexa.

(a) Demuestra que si f tiene un mínimo relativo en un punto de K, entonces el valor en dicho punto es un mínimo absoluto de f.

(b) Demuestra que f alcanza su máximo absoluto en un punto extremo de K.

Este resultado es especialmente interesante cuando K es un politopo, pues reducimos la búsqueda del máximo absoluto de la función a evaluar la función en un número finito de puntos (los vértices del politopo). Es un resultado muy utilizado en programación lineal y existen generalizaciones para cuando K es cerrado y no acotado.

Solución. Consideremos el epigrafo $\text{epi}(f) \subset K \times \mathbb{R}$, que es un convexo en $\mathbb{R}^{n+1}$ y supongamos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in K$. Esto quiere decir que existe un entorno U de x_0 en K tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in U$, luego el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_0)\}$ soporta a $\text{epi}(f)$ en un entorno de $(x_0, f(x_0))$, lo que implica que $\text{epi}(f) \subset H^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq f(x_0)\}$. En otras palabras, $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in K$ y f alcanza su mínimo absoluto en x_0.

[14] El resultado para $n = 1$ es falso: si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado, entonces $\text{conv}(A) \subset \mathbb{R}$ también es cerrado.

Para probar (b), procedamos por inducción sobre la dimensión de K. Si $\dim(K) = 0$, entonces es trivial. Supuesto cierto para cuerpos convexos hasta de dimensión r, consideremos $K \in \mathcal{K}^n$ con $\dim(K) = r+1$ y sea $x_0 \in K$ un punto donde se alcanza el máximo de f. Si existen $x, y \in K$ distintos y $t \in (0,1)$ tales que $x_0 = (1-t)x + ty$. La convexidad de f nos dice que $f(x_0) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$. Como f alcanza su máximo en x_0, esto nos dice que f es constante en $[x, y]$. Así, f es constante en cualquier intervalo que contenga a x_0 en su interior. Si $x_0 \in \operatorname{rel\,int}(K)$, entonces $f(x)$ es constante en K y el resultado es trivial; si $x_0 \in \operatorname{rel\,fr}(K)$, entonces existe un hiperplano soporte (relativo) $H \subset \operatorname{aff}(K)$ en x_0, que reduce el problema al convexo $H \cap K$ que tiene dimensión menor que la de K.

Ejercicio 4. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y convexo. Demuestra que toda función convexa $f : A \to \mathbb{R}$ es continua.

Solución. Seguiremos la demostración dada por R. Schneider. Dado $x_0 \in A$, como A es abierto, existen puntos afínmente independientes $x_1, \ldots, x_{n+1} \in A$ tales que que $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}))$. Dado $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, con $\lambda_i \geq 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, la desigualdad de Jensen nos asegura que $f(x) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \leq c$, siendo $c = \max\{f(x_1), \ldots, f(x_i)\}$. Por tanto, $f(x)$ está acotada superiormente por una constante $c \in \mathbb{R}$ en el símplice $\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\})$.

Ahora podemos tomar $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x_0) \subset \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\})$. Dado $y \in \overline{B}_r(x_0)$ podemos expresar $y = tx + (1-t)x_0$ para cierto $x \in S_r(x_0) = \operatorname{fr}(B_r(x_0))$ y $t = \frac{|y-x_0|}{r} \in [0,1]$. La convexidad de f nos dice que $f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(x_0)$, luego $f(y) - f(x_0) \leq t(f(x) - f(x_0)) \leq t(c - f(x_0))$. Por tanto,

$$f(y) - f(x_0) \leq \frac{c - f(x_0)}{r}|y - x_0|, \quad \text{para todo } y \in \overline{B}_r(x_0). \tag{4}$$

Por otro lado, también podemos expresar $x_0 = sz + (1-s)y$ para ciertos $z \in S_r(x_0)$ y $s = \frac{|x_0-y|}{r+|x_0-y|} \in [0,1]$ (justamente z es el antípoda de x en $S_r(x_0)$), luego otra vez la convexidad nos asegura que $f(x_0) \leq sf(z) + (1-s)f(y)$. De la expresión de s y de que $f(z) \leq c$ deducimos que $(r + |x_0 - y|)f(x_0) \leq |x_0 - y|c + rf(y)$, de donde

$$f(x_0) - f(y) \leq \frac{c - f(x_0)}{r}|y - x_0|, \quad \text{para todo } y \in \overline{B}_r(x_0). \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) nos aseguran que $|f(y) - f(x_0)| \leq M|y - x_0|$ para todo $y \in \overline{B}_r(x_0)$, donde $M = \frac{c-f(x_0)}{r}$ no depende de y, luego f es continua en x_0. De la arbitrariedad de x_0 deducimos que f es continua en A.

Ejercicio 5. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo.

(a) Demuestra que A es no acotado si, y sólo si, A contiene una semirrecta.

(b) Demuestra que si A es abierto y contiene una recta R, entonces A es un cilindro sobre un convexo, es decir, si tomamos H un hiperplano ortogonal a R, existe un convexo $B \subset H$ tal que $A = \{b + tu : b \in B, t \in \mathbb{R}\}$ donde u es un vector director de R.

Solución. Dado un conjunto A no acotado, podemos suponer (pasando a $\mathrm{aff}(A)$ si es necesario) que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ y tomar $B_r(a) \subset \mathrm{int}(A)$ para ciertos $a \in A$ y $r > 0$. Dada una sucesión $\{x_n\} \subset A$ divergente, podemos suponer, pasando a una parcial, que $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ converge a cierto $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Probemos que la semirrecta $R = \{a + tu : t \geq 0\}$ está contenida en A por reducción al absurdo, suponiendo que $a + t_0 u \notin A$ para cierto $t_0 > r$. Afirmamos que $B_{r(t-t_0)/t_0}(a + tu) \cap A = \emptyset$ para todo $t > t_0$, contradiciendo la existencia de la sucesión $\{x_n\}$ (notemos que la sucesión $\{x_n\}$ tiene que diverger y, a la vez, acumularse sobre la semirrecta R, pero la hemos cubierto de bolas de radios cada vez más grandes que no cortan a A).

Para probar la afirmación, procederemos a su vez por reducción al absurdo, suponiendo que existe $y \in B_{r(t-t_0)/t_0}(a + tu) \cap A$, esto es, existe $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| < \frac{r(t-t_0)}{t_0}$ tal que $y = a + tu + v$. Consideremos $x = a - \frac{t_0}{t-t_0} v \in B_r(a) \subset A$ y $\lambda = \frac{t_0}{t} \in (0, 1)$. Tenemos entonces que

$$a + t_0 u = \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)\left(a - \frac{t_0}{t - t_0} v\right) + \frac{t_0}{t}(a + tu + v) = (1 - \lambda)x + \lambda y \in A,$$

que es la contradicción buscada.

Para probar el apartado (b), podemos suponer que $n \geq 2$ ya que el caso $n = 1$ es trivial. Tras aplicar un movimiento rígido de $\mathbb{R}^n$, también podemos suponer que la recta es $R = \{(0, \ldots, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. En tal caso, vamos a probar que $A = \pi(A) \times \Omega$ y habremos terminado, siendo $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección ortogonal sobre las $n - 1$ primeras coordenadas. Por un lado, está claro que $A \subset \pi^{-1}(\pi(A)) = \pi(A) \times \mathbb{R}$, luego bastará ver la inclusión opuesta. Dado $(z, t) \in \pi(A) \times \mathbb{R}$, existirá $s \in \mathbb{R}$ tal que $(z, s) \in A$, luego existe $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(z, s) \subset A$ ya que A es abierto. Si $z = 0$, entonces $(z, t) \in R \subset A$ y hemos terminado. En caso contrario, tomemos el vector unitario $u = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{R}^{n-1}$, con lo que $q = (z + ru, s) \in \overline{B}_r(z, s) \subset A$. Tomando el punto $q = \left(0, \frac{|z|+r}{r} t - \frac{|z|}{r} s\right) \in R \subset A$ y $\lambda = \frac{|z|}{|z|+r} \in [0, 1]$, no es difícil comprobar que $(z, t) = \lambda p + (1 - \lambda)q \in A$ por la convexidad de A, probando así la inclusión que buscábamos.

Ejercicio 6. Usando la desigualdad de Jensen, demuestra la desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$: dados $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Indicación: Utiliza la función convexa $f(x) = x^p$.

En particular, tenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $p = q = 2$.

Solución. Como $p \geq 1$, la función $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^p$ es convexa y la desigualdad de Jensen nos dice que $f(\sum_{i=1}^n t_i z_i) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(z_i)$ para cualesquiera $z_i, t_i \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Para obtener la desigualdad de Hölder, vamos a tomar

$$z_i = |x_i| \cdot |y_i|^{1-q}, \quad t_i = \frac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}, \qquad \text{para } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Todo está bien definido salvo en el caso $y_1 = \ldots = y_n = 0$, pero en tal caso la desigualdad que buscamos es trivial. Si algún y_i es no nulo, podemos calcular

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i z_i\right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}\right)^p,$$
$$\sum_{i=1}^n t_i f(z_i) = \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q |x_i|^p |y_i|^{p(1-q)}}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q},$$

donde hemos usado que $|y_i|^q |y_i|^{p(1-q)} = |y_i|^{p+q-pq} = 1$ (notemos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ puede escribirse como $p + q = pq$). Imponiendo la desigualdad de Jensen llegamos a que

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} \iff \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1-1/p}.$$

Como $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, esto concluye la demostración.

Ejercicio 7. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado. Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \sup\{\langle a, u\rangle : a \in A\}$ es la función soporte del convexo $\operatorname{conv}(A)$.

Solución. Dado $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo, probar la igualdad $f(u) = h_{\operatorname{conv}(A)}(u)$ es equivalente, según las definiciones de $h_{\operatorname{conv}(A)}$ y de $f(u)$, a probar que $\sup\{\langle a, u\rangle : a \in A\} = \sup\{\langle a, u\rangle : a \in \operatorname{conv}(A)\}$. Como $A \subset \operatorname{conv}(A)$, es evidente que se cumple la desigualdad $\leq$ en la igualdad anterior, luego nos centraremos en probar la desigualdad $\geq$. Si $\sup\{\langle a, u\rangle : a \in A\} = \infty$ no hay nada que probar, luego supongamos que $\lambda = \sup\{\langle a, u\rangle : a \in A\} \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a afirmar que $A \subset H^-_{u,\lambda}$, luego $\operatorname{conv}(A) \subset H^-_{u,\lambda}$ por ser $H^-_{u,\lambda}$ un convexo que contiene a A, de donde $\langle a, u\rangle \leq \lambda$ para todo $a \in \operatorname{conv}(A)$. Tomando supremos en $a \in \operatorname{conv}(A)$, deducimos que $\sup\{\langle a, u\rangle : a \in \operatorname{conv}(A)\} \leq \lambda = \sup\{\langle a, u\rangle : a \in A\}$ y hemos terminado.

Ejercicio 8. Demuestra que si A es la envolvente convexa de una familia finita de puntos, entonces A es la intersección de una familia finita de semiespacios cerrados.

Demostración. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene dimensión n sin perder generalidad, pasando a $\operatorname{aff}(A)$ si es necesario, y escribamos $A = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}$. Consideraremos todas los subconjuntos de n puntos afínmente independientes de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ tales que los hiperplanos que generan contienen a A en un semiespacio de los que determinan. El número de tales subconjuntos es finito, a lo sumo $\binom{k}{n}$, y denotaremos por $\mathcal{S} = \{H_1, \ldots, H_m\}$ a la familia de hiperplanos generados por ellas de forma que $A \subset H_i^-$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Veamos que $A = \cap_{i=1}^m H_i^-$ y habremos terminado. La inclusión $A \subset \cap_{i=1}^m H_i^-$ es evidente y, para probar la opuesta, veremos que si $x \notin A$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $A \notin H_i^-$.

Tomemos $W \subset \mathbb{R}^n$ la unión de las envolventes convexas de x y $n-1$ puntos afínmente independientes de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ y sea $y \in \operatorname{int}(A) \setminus W$. Notemos que este último

conjunto es no vacío ya que estamos quitando del abierto $\operatorname{int}(A)$ una cantidad finita de símplices $(n-1)$-dimensionales. Existirá entonces un punto $z \in]x, y[\cap \operatorname{fr}(A)$ ya que $y \in \operatorname{int}(A)$ y $x \notin A$. Como $z \in \operatorname{fr}(A) \subset A$, podemos expresar $z = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_{j_i}$ para ciertos $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n+1}}\} \subset \{x_1, \ldots, x_k\}$ linealmente independientes, que podemos suponer que son $x_1, \ldots, x_{n+1}$ reordenándolos. Como $z \in \operatorname{fr}(A)$ y $z \notin W$, existirá un único coeficiente λ_i igual a cero, que podemos suponer es λ_{n+1}. Como los demás coeficientes son no nulos, podemos asegurar que $z \in \operatorname{rel\,int}(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Ahora consideremos el hiperplano $H = \operatorname{aff}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, que soporta a A en z luego $A \subset H^-$ y, por tanto, H es un elemento de $\mathcal{S}$, pero $x \notin H^-$ ya que, si así fuera, tendríamos que $[x, y] \subset H^-$ por la convexidad de H^- y, como $y \in \operatorname{int}(A)$, se seguiría que $z \in \operatorname{int}(A)$, pero $z \in \operatorname{fr}(A)$. Este argumento concluye la demostración. □

Ejercicio 9. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Diremos que $F \subset A$ es una cara de A si F es convexo y, para cualesquiera $x, y \in A$ tales que $\frac{1}{2}(x + y) \in F$ se sigue necesariamente que $x, y \in F$. Al conjunto de todas las caras de A lo denotaremos por $\mathcal{F}(A)$. Demuestra las siguientes propiedades:

(a) $\mathcal{F}(A)$ es cerrado para intersecciones.

(b) Si H es un hiperplano soporte de A, entonces $A \cap H$ es una cara de A. A las caras de este tipo se les llama *caras expuestas* de A[15].

(c) La relación binaria *ser una cara de* es una relación de orden.

(d) Dadas $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(A)$ caras distintas se tiene que $\operatorname{rel\,int}(F_1) \cap \operatorname{rel\,int}(F_2) = \emptyset$.

(e) Si A es cerrado, entonces toda cara de A es cerrada y, además, podemos expresar como unión disjunta

$$A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(A)} \operatorname{rel\,int}(F).$$

De la definición 3.1 se deduce que los puntos extremos (resp. expuestos) de A son las caras (resp. caras expuestas) de A que tienen dimensión 0, luego podemos ver este ejercicio como una generalización de esos conceptos a dimensión mayor.

Solución. Para probar (a), supongamos que $\{F_i : i \in I\}$ es una familia de caras de A, luego $F = \cap_{i \in I} F_i$ es convexo como intersección de convexos y, si $x, y \in A$ son tales que $\frac{1}{2}(x + y) \in F$, entonces $\frac{1}{2}(x + y) \in F_i$ para todo $i \in I$ por definición de intersección, luego $x, y \in F_i$ para todo $i \in I$ por definición de cara, de donde $x, y \in F$. Por tanto F es una cara de A.

Con respecto a (b), si H es un hiperplano soporte de A, entonces $\emptyset \neq A \cap H$ es convexo como intersección de convexos. Sean $x, y \in A$ tales que $\frac{1}{2}(x + y) \in A \cap H$ y pongamos $H = H_{u,\alpha}$ con $A \subset H^-_{u,\alpha}$ para ciertos $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si suponemos por reducción al absurdo que $x \notin H$, entonces $\langle x, u \rangle < \alpha$, luego como $\langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle =$

[15] Estamos diciendo que toda cara expuesta de A es una cara de A, aunque no es cierto que toda cara de A (distinta del propio A) sea expuesta, de la misma forma que no todos los puntos extremos son puntos expuestos.

$2\langle\frac{1}{2}(x+y),u\rangle = 2\alpha$ se sigue que $\langle y,u\rangle > \alpha$, lo cual contradice que $y \in A$. Esto prueba que $x \in A \cap H$ y, de la misma forma, $y \in A \cap H$. Por tanto, $A \cap H \in \mathcal{F}(A)$.

Vamos a probar ahora (c). La relación es reflexiva ya que todo convexo es una cara de sí mismo de forma trivial, y es antisimétrica puesto que si F es una cara de A y A es una cara de F, entonces $F \subset A$ y $A \subset F$, luego $F = A$. Para ver que es transitiva, si F es una cara de A y G es una cara de F, dados $x, y \in A$ tales que $\frac{1}{2}(x+y) \in G \subset F$, se sigue que $x, y \in F$ por ser F una cara de A, luego $x, y \in G$ por ser G una cara de F. Como además G es convexo, esto demuestra que G es una cara de A.

Para probar (d), si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(A)$ son distintas, supongamos por reducción al absurdo que existe $z \in \operatorname{rel\,int} F_1 \cap \operatorname{rel\,int} F_2 \neq \emptyset$. Como $F_1 \neq F_2$, no perdemos generalidad al tomar $x \in F_1$ tal que $x \notin F_2$ (basta cambiar los papeles de F_1 y F_2 si fuera necesario). Consideremos $y \in F_1$ tal que $z \in (x,y)$, que existe ya que $z \in \operatorname{rel\,int} F_1$. Ahora bien, $x, y \in F_1 \subset A$ y $z \in (x,y) \cap F_2$, luego $x, y \in F_2$ por definición de cara, lo cual es una contradicción con la suposición de que $x \notin F_2$.

Para terminar, vamos con (e). Probemos que si A es cerrado y $F \in \mathcal{F}(A)$, entonces $\operatorname{cl}(F) \subseteq F$, luego F es cerrado. Efectivamente, si $x \in \operatorname{cl}(F)$ y tomamos $y \in \operatorname{rel\,int}(F)$, entonces $]x,y] \subset \operatorname{rel\,int}(F) \subset F$ por ser F convexo, pero $x, y \in \operatorname{cl}(F) \subset \operatorname{cl}(A) = A$ y $\frac{1}{2}(x+y) \in (x,y] \subseteq F$. Como F es una cara de A, deducimos que $x \in F$. Finalmente, que la unión del apartado (e) es disjunta se sigue de (d), luego bastará probar que, dado $x \in A$, existe una cara $F \in \mathcal{F}(A)$ tal que $x \in \operatorname{rel\,int}(F)$. Definimos el candidato a dicha cara F como la intersección de todas las caras de A que contienen a x, que vuelve a ser una cara por el apartado (a). Supongamos por reducción al absurdo que $x \notin \operatorname{rel\,int}(F)$, luego $x \in \operatorname{rel\,fr}(F)$ y podemos considerar $H \subset \operatorname{aff}(F)$ un hiperplano soporte de F en x. Entonces, $H \cap F \neq F$ es una cara de F por el apartado (b) y, por tanto, una cara de A, por el apartado (c), tal que $x \in H \cap F$. No obstante, esto contradice la definición de F como la intersección de todas las caras de K que contienen a x.

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathcal{K}^n$, y denotemos por h_A a la función soporte de A. Para cada $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo, definimos

$$H(A,u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle = h_A(u)\},$$
$$F(A,u) = \{x \in A : \langle x,u\rangle = h_A(u)\}.$$

Observa que $H(A,u)$ no es más que el hiperplano soporte de A en la dirección (orientada) u, mientras que $F(A,u)$ es su intersección con A, esto es, la cara expuesta de A en la dirección de u.

(a) Demuestra que $H(A,u)$ y $F(A,u)$ son convexos.

(b) Demuestra que $H(A+B,u) = H(A,u) + H(B,u)$ y $F(A+B,u) = F(A,u) + F(B,u)$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{K}^n$ y $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo.

Esto demuestra el buen comportamiento de la estructura de la frontera respecto de la suma de Minkowski, y es cierto incluso cuando A y B son cerrados, tomando como convenio $\emptyset + M = M + \emptyset = \emptyset$ para todo $M \subset \mathbb{R}^n$.

Solución. El apartado (a) es inmediato ya que $H(A,u)$ es un hiperplano, que es convexo, y $F(A,u) = H(A,u) \cap A$ es también convexo como intersección de convexos. Por tanto, vamos a centrarnos en (b) y probaremos sólo la identidad $H(A+B,u) = H(A,u) + H(B,u)$ pues la otra es similar. Usaremos doble inclusión.

Dado $x \in H(A+B,u)$ tenemos que $\langle x,u\rangle = h_{A+B}(u) = h_A(u) + h_B(u)$. Por tanto, podemos descomponer $x = y + z$ de forma que $\langle y,u\rangle = h_A(u)$ y $\langle z,u\rangle = h_B(u)$ para ciertos $y, z \in \mathbb{R}^n$, luego $y \in H(A,u)$ y $z \in H(B,u)$. De aquí que $x = y+z \in H(A,u)+H(B,u)$. Recíprocamente, si $x \in H(A,u)+H(B,u)$, entonces existen $y \in H(A,u)$ y $z \in H(B,u)$ tales que $x = y+z$, luego $\langle y,u\rangle = h_A(u)$ y $\langle z,u\rangle = h_B(u)$, de donde $\langle x,u\rangle = \langle y,u\rangle + \langle z,u\rangle = h_A(u) + h_B(u) = h_{A+B}(u)$, luego $x \in H(A+B,u)$.

Dado $x \in F(A+B,u)$ tenemos que $\langle x,u\rangle = h_{A+B}(u) = h_A(u) + h_B(u)$. Como $x \in A+B$, podremos expresar $x = a+b$ con $a \in A$ y $b \in B$, luego podemos transformar la identidad anterior$\langle a,u\rangle + \langle b,u\rangle = h_A(u) + h_B(u)$. Como $\langle a,u\rangle \leq h_A(u)$ y $\langle b,u\rangle \leq h_B(u)$ por definición de función soporte, llegamos a que $\langle a,u\rangle = h_A(u)$ y $\langle b,u\rangle = h_B(u)$, esto es, $a \in F(A,u)$ y $b \in F(B,u)$, luego $x = a+b \in F(A,u)+F(B,u)$. Recíprocamente, si $x \in F(A,u)+F(B,u)$, entonces existen $a \in F(A,u)$ y $b \in F(B,u)$ tales que $x = a+b \in A+B$, luego $\langle a,u\rangle = h_A(u)$ y $\langle b,u\rangle = h_B(u)$, de donde $\langle x,u\rangle = \langle a,u\rangle + \langle b,u\rangle = h_A(u) + h_B(u) = h_{A+B}(u)$, luego $x \in F(A+B,u)$.

Ejercicio 11. Demuestra que la suma de Minkowski de dos politopos es otro politopo.

(a) Si vemos los politopos como envolvente convexa de un conjunto finito de vértices, ¿hay alguna relación entre los vértices de los sumandos y los vertices de la suma?

(b) Si por el contrario los vemos como intersección de semiespacios cerrados, ¿hay alguna relación entre los semiespacios asociados a los sumandos y los semiespacios asociados a la suma?

Solución. Supongamos que $A = \text{conv}(S)$ y $B = \text{conv}(T)$ son dos politopos, siendo $S, T \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos finitos. Entonces $A+B = \text{conv}(S) + \text{conv}(T) = \text{conv}(S+T)$. Como el conjunto $S+T = \{s+t : s \in S, t \in T\}$ es finito, tenemos que $A+B$ es también un politopo. Esto da también una respuesta al apartado (a), ya que nos dice que todos los vértices de la suma son suma de vértices de los sumandos. En general, no todos los puntos de $S+T$ son puntos extremos de $A+B$, lo que nos dice que podríamos eliminarlos al hacer la envolvente por el teorema de Minkowski (es decir, no son vértices de la suma sino puntos interiores al politopo o a alguna de sus caras).

La respuesta a (b) es un poco más ambigua, pues es en general más difícil tratar con los semiespacios que con los vértices. Vamos a suponer aquí los hiperplanos que generan el politopo son los que contienen caras $(n-1)$-dimensionales y que, siguiendo la notación del ejercicio 10, existe un número finito de direcciones unitarias $u_1, \ldots, u_k$ tales que $F(A+B,u_i)$, la cara en la dirección de u_i, tiene dimensión $n-1$. Ahora bien, el ejercicio 10 nos dice que $n-1 = \dim(F(A+B,u_i)) = \dim(F(A,u_i)+F(B,u_i))$, es decir, las caras $(n-1)$-dimensionales de $A+B$ surgen en aquellas direcciones en las que $\dim(F(A,u_i)+F(B,u_i)) = n-1$. Si tomamos X_i (resp. Y_i) como el subespacio

vectorial asociado a la variedad afín $\mathrm{aff}(F(A,u_i))$ (resp. $\mathrm{aff}(F(B,u_i))$), puede probarse que $\dim(F(A,u_i)+F(B,u_i)) = \dim(X_i+Y_i) = \dim(X_i)+\dim(Y_i)-\dim(X_i\cap Y_i)$, donde hemos usado la identidad de Grassmann del álgebra lineal.

En particular, tenemos una relación entre las dimensiones de las caras de los sumandos y las dimensiones de la cara de la suma en una dirección dada. Deducimos que si $\dim(F(A,u_i)) = n-1$ ó $\dim(F(B,u_i)) = n-1$, entonces $\dim(F(A,u_i)+F(B,u_i)) = n-1$, es decir, en todas las direcciones en que uno de los sumandos tiene una cara $(n-1)$-dimensional, también $A+B$ tiene una cara $(n-1)$-dimensional. El recíproco no es cierto, pues tal cara puede aparecer como suma de caras de dimensión menor.

Ejercicio 12. Sea $\mathbb{S}^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ la esfera unidad. Diremos que un subconjunto $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ es esféricamente convexo si el cono $C(A) = \{\lambda a : \lambda \geq 0, a \in A\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

(a) Demuestra que si $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ es esféricamente convexo y $A \neq \mathbb{S}^{n-1}$, entonces A está contenido en un hemisferio cerrado de $\mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Demuestra que un conjunto $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ contenido en un hemisferio abierto es esféricamente convexo si, y sólo si, para cada par de puntos $x, y \in A$, existe una geodésica[16] en la geometría de la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ contenida en A y uniendo x e y.

(c) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $x \in \mathrm{fr}(C)$. Tomemos $A \subset \mathbb{R}^n$ formado por las direcciones $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ tales que $H_{u,\alpha}$ es un hiperplano soporte de A en x y $A \subset H^-_{u,\alpha}$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestra que A es un esféricamente convexo.

Este ejercicio pretende dar una idea del comportamiento de las singularidades de la frontera de un conjunto convexo. La dimensión del conjunto A del apartado (c) está relacionada con la dimensión del punto x como punto de la frontera.

Solución. Veamos en primer lugar que si $C(A)$ es convexo y $C(A) \neq \mathbb{R}^n$, entonces existe un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que $C(A) \subset H^-$, esto es, A está contenido en un hemisferio cerrado de $\mathbb{S}^{n-1}$ y habremos probado el apartado (a). Si $C(A) \neq \mathbb{R}^n$, entonces existe $u \in \mathbb{R}^n$ unitario tal que $u \notin C(A)$, luego $\lambda u \notin C(A)$ para todo $\lambda > 0$ por definición de cono. Esto nos lleva a que $0 \in \mathrm{fr}(C(A))$, luego el convexo $C(A)$ admite un hiperplano soporte H en 0, esto es, $C(A) \subset H^-$ como queríamos demostrar.

Dado $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$ contenido en un hemisferio cerrado, probemos la doble implicación de (b). Si A es esféricamente convexo, entonces dados $x, y \in A$ distintos, tenemos que $x, y \in C(A)$ ya que $A \subset C(A)$, luego para todo $t \in [0,1]$ se cumple que $(1-t)x + ty \in C(A)$, de donde $\Gamma = \{\frac{(1-t)x+ty}{|(1-t)x+ty|} : t \in [0,1]\} \subset A$ (notemos que $(1-t)x + ty \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$ debido a que A está contenido en un hemisferio abierto). Es fácil ver que Γ es una geodésica de $\mathbb{S}^{n-1}$, justamente la intersección de $\mathbb{S}^{n-1}$ con el plano afín generado por $\{0, x, y\}$, que son tres puntos afínmente independientes. Recíprocamente, si A cumple la propiedad de las geodésicas, veamos que $C(A)$ es convexo. Para ello, dados $x, y \in C(A)$, se tiene que $\frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|} \in A$ luego existe una geodésica $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$

[16] Las geodésicas de la esfera son la intersección de planos afines (de dimensión 2) que pasan por el origen en $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{S}^{n-1}$.

contenida en A y conectando $\frac{x}{|x|}$ e $\frac{y}{|y|}$. No es difícil ver que $[x,y] \subset C(\Gamma) \subset C(A)$, lo que prueba que $C(A)$ es convexo.

Finalmente, para probar (c), observamos que el cono $C(A)$ en este caso está formado por todas las direcciones $v \in \mathbb{R}^n$ (unitarias o no) tales que $H_{v,\langle x,v\rangle} = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v\rangle = \langle x, v\rangle\}$ es hiperplano soporte en x con $A \subset H^-_{v,\langle x,v\rangle} = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v\rangle \leq \langle x, v\rangle\}$. Para ver que $C(A)$ es convexo, tomemos $v, w \in C(A)$, $t \in [0,1]$ y probemos que $z = (1-t)v + tw \in C(A)$, para lo que tenemos que ver que $H_{z,\langle x,z\rangle}$ es hiperplano soporte de A en x con $A \subset H^-_{z,\langle x,z\rangle}$. Observamos que $x \in H_{z,\langle x,z\rangle}$ luego bastará probar que $A \subset H^-_{z,\langle x,z\rangle}$. Dado $a \in A$, se sigue que $a \in H^-_{v,\langle x,v\rangle} \cap H^-_{w,\langle x,w\rangle}$ ya que $v, w \in C(A)$, luego $\langle a, v\rangle \leq \langle x, v\rangle$ y $\langle a, w\rangle \leq \langle x, w\rangle$. Por tanto, $\langle a, z\rangle = (1-t)\langle a, v\rangle + t\langle a, w\rangle \leq (1-t)\langle x, v\rangle + t\langle x, w\rangle = \langle x, z\rangle$, esto es, $a \in H^-_{v,\langle z,v\rangle}$ y hemos probado la inclusión $A \subset H^-_{z,\langle x,z\rangle}$, lo que termina la demostración.

Ejercicio 13. Dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$, diremos que un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ separa fuertemente A y B si $A \subset H^+$, $B \subset H^-$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $\operatorname{dist}(A, H) > \varepsilon$ y $\operatorname{dist}(B, H) > \varepsilon$.

(a) Sea A un convexo cerrado y $x \notin A$. Demuestra que existe un hiperplano que separa fuertemente A y $\{x\}$.

(b) Demuestra que dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se pueden separar fuertemente si, y sólo si, los conjuntos $A - B$ y $\{0\}$ se pueden separar fuertemente.

(c) Usando los resultados anteriores, demuestra que, dados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ convexos tales que A es cerrado y B compacto, con $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B se pueden separar fuertemente por un hiperplano.

(d) Encuentra dos convexos cerrados y disjuntos A y B que no puedan separarse fuertemente por un hiperplano.

La propiedad del apartado (c) tiene su análogo en espacios de dimensión infinita, donde juega un papel fundamental como herramienta en análisis funcional. La demostración en dimensión infinita es una consecuencia del teorema de Hahn-Banach.

Solución. Sea A un convexo cerrado y $x \notin A$. Entonces, está bien definida la proyección $p_A(x) \neq x$ y podemos tomar el hiperplano $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, u_A(x)\rangle = \langle \frac{1}{2}(x + p_A(x)), u_A(x)\rangle$, esto es, el hiperplano ortogonal a $u_A(x)$ que pasa por el punto medio $\frac{1}{2}(x + p_A(x))$. Tomando $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|p_A(x) - x|$ es fácil ver que $\operatorname{dist}(A, H) > \varepsilon$ y $\operatorname{dist}(\{x\}, H) > \varepsilon$, lo que prueba que H separa fuertemente A y $\{x\}$, tal y como se afirma en el apartado (a).

Supongamos ahora que A y B se pueden separar fuertemente por un hiperplano H tal que $A \subset H^+$, $B \subset H^-$, $\operatorname{dist}(A, H) > \varepsilon$ y $\operatorname{dist}(B, H) > \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$. Tomando $u \in \mathbb{R}^n$ unitario normal a H apuntando al interior de H^+, la desigualdad $\operatorname{dist}(A, H) > \varepsilon$ puede reescribirse como $\langle a, u\rangle > \varepsilon$ para todo $a \in A$ y, análogamente, $\langle b, u\rangle < -\varepsilon$ para todo $b \in A$. Por tanto, $\langle a - b, u\rangle > 2\varepsilon$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Esto nos dice que $\{0\}$ y $A - B$ están separados fuertemente por el hiperplano

$H_{u,\varepsilon}$. Recíprocamente, si existe un hiperplano $H_{u,\alpha}$ que separa fuertemente $A-B$ y $\{0\}$ tal que $A-B \subset H^+$, $\{0\} \subset H^-$, $\operatorname{dist}(A-B,H) > \varepsilon$ y $\operatorname{dist}(\{0\},H) > \varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$, tenemos que $\langle a-b,u\rangle > \alpha+\varepsilon$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, mientras que $0 = \langle 0,u\rangle < \alpha-\varepsilon$. Por tanto, $\langle a,u\rangle > \langle b,u\rangle + 2\varepsilon$, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Tomando $\alpha = \frac{1}{2}(\sup\{\langle a,u\rangle : a \in B\} + \text{ínf}\{\langle b,u\rangle : b \in A\} \geq 2\varepsilon$, el hiperplano $H_{\alpha,u}$ separa fuertemente A y B. Completar los detalles se deja como ejercicio.

Para probar (c), supongamos que $A, B \subset \mathbb{R}^n$ convexos tales que A es cerrado y B compacto, con $A \cap B = \emptyset$. Estos dos conjuntos se pueden separar fuertemente si, y sólo si, $\{0\}$ y $A-B$ se pueden separar fuertemente según el apartado (b). Notemos que $A-B$ es cerrado por ser A cerrado y $-B$ compacto (ver ejercicio 2), y además $0 \notin A-B$ ya que $A \cap B = \emptyset$, luego el apartado (a) nos asegura que $\{0\}$ y $A-B$ se pueden separar fuertemente y hemos terminado.

Finalmente, para el apartado (d) podemos considerar $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. No es difícil ver A y B son cerrados disjuntos pero no hay ningún hiperplano que no corte a A ni a B.

Ejercicio 14. Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto finito tal que cualesquiera tres puntos de P pueden cubrirse con un triángulo de área 1. Demuestra que $\operatorname{conv}(P)$ puede cubrirse con un triángulo de área 4.

Solución. Consideremos $x_1, x_2, x_3 \in P$ tales que el triángulo $\operatorname{conv}(\{x_1,x_2,x_3\})$ tiene área máxima. Si este área es cero, es porque todos los puntos de P están alineados y no hay nada que probar, luego supongamos que no es cero. En dicho caso, podemos considerar $T = \operatorname{conv}(\{y_1,y_2,y_3\})$, donde $x_1 = \frac{1}{2}(y_2+y_3)$, $x_2 = \frac{1}{2}(y_1+y_3)$ y $x_3 = \frac{1}{2}(y_1+y_2)$, esto es, x_1, x_2, x_3 son los puntos medios de los lados de T. Como x_1, x_2, x_3 están contenidos en un triángulo de área menor o igual que 1, el área de T, que es 4 veces el área de $\operatorname{conv}(\{x_1,x_2,x_3\})$, será menor o igual que 4. Si probamos que $P \subset T$, entonces $\operatorname{conv}(P) \subset T$ por ser T un convexo que contiene a P.

Supongamos por reducción al absurdo que existe $x \in P$ tal que $x \notin T$. Como $T = S_1 \cap S_2 \cap S_3$, siendo S_i el semiplano cerrado que tiene un lado de T contenido en su frontera y a x_i en su interior, podemos afirmar que x no pertenece a alguno de los S_i, pongamos $x \notin S_1$ sin perder generalidad. Entonces, el triángulo $\operatorname{conv}(\{x,x_2,x_3\})$ tiene área mayor que $\operatorname{conv}(\{x_1,x_2,x_3\})$ ya que ambos tienen el lado $[x_2,x_3]$ común y la altura sobre dicho lado es mayor (x está más allá del lado $[y_2,y_3]$, que es paralelo a $[x_2,x_3]$). Esto contradice el haber elegido $\operatorname{conv}(\{x_1,x_2,x_3\})$ de área máxima.

Ejercicio 15. Dado $K \in \mathcal{C}^n$ compacto con $\operatorname{vol}(K) > 0$, demuestra que existe un único $b(K) \in \mathbb{R}^n$ tal que, para cualquier $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle b(K),u\rangle = \frac{\int_K \langle x,u\rangle \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\operatorname{vol}(K)},$$

donde $x = (x_1,\ldots,x_n)$ representa el vector posición en $\mathbb{R}^n$. Al punto $b(K)$ se le llama baricentro (o centro de masa) de K. Este concepto puede extenderse para $K \in \mathcal{K}^n$ sin

más que restringirnos a la variedad afín $\mathrm{aff}(K)$ generada por K.

(a) Demuestra que $b(K) \in K$ para todo $K \in \mathcal{K}^n$.

(b) Demuestra que si $K = \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_k\})$, siendo $y_1, \ldots, y_k$ afínmente independientes, entonces $b(K) = \frac{1}{k}(y_1 + \ldots + y_k)$.

(c) ¿Es la aplicación baricentro $b : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}^n$ continua respecto de la distancia de Hausdorff en $\mathcal{K}^n$?

Solución. La aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \mathrm{vol}(K)^{-1} \int_K \langle x, u\rangle \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$ es claramente lineal, pero sabemos que entonces $f(u) = \langle b(K), u\rangle$ para cierto $b(K) \in \mathbb{R}^n$. En otras palabras, $b(K) = f^\flat$ usando isomorfismos musicales respecto del producto escalar usual, luego $b(K)$ está bien definido por la identidad del enunciado.

Para probar (a), dado $u \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $\int_K \langle x, u\rangle \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \leq \mathrm{máx}\{\langle x, u\rangle : x \in K\} \cdot \mathrm{vol}(K) = h_K(u) \cdot \mathrm{vol}(K)$, donde $h_K(u)$ denota la función soporte de K en la dirección u. Por tanto, la identidad del enunciado nos asegura que $\langle b(K), u\rangle \leq h_K(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Ahora bien, $\langle b(K), u\rangle = h_{\{b(K)\}}(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$, luego tenemos que $h_{\{b(K)\}} \leq h_K$ y, por tanto, $\{b(K)\} \subset K$ por las propiedades de las funciones soporte, es decir, $b(K) \in K$.

El apartado (b) consiste en calcular el baricentro de un ejemplo concreto, para lo que la definición es muy útil: si sustituimos u por elementos de la base canónica, obtendremos las correspondientes coordenadas de $b(K)$. No obstante, un cálculo directo es muy laborioso, por lo que reduciremos primero el problema: por un lado, podemos suponer que $k = n + 1$ sin más que restringirnos a $\mathrm{aff}(\{y_1, \ldots, y_k\})$ (notemos que la linealidad de la definición hace que dichas restricciones sean consistentes); por otro lado, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación afín, el teorema del cambio de variable nos asegura que $b(T(K)) = T(b(K))$ para cualquier $K \in \mathcal{K}^n$, luego podemos suponer que $y_1 = e_1, \ldots, y_n = e_n$ e $y_{n+1} = 0$, siendo $e_i = (0, \ldots, 1^{(i}, \ldots, 0)$ el i-ésimo vector de la base canónica. Como $e_1 + \ldots + e_{n+1} = (1, \ldots, 1)$, si probamos que, para esta elección de $y_1, \ldots, y_{n+1}$, se cumple que la i-ésima coordenada $\langle b(K), e_i\rangle$ es igual a $\frac{1}{n+1}$ para todo i, habremos terminado. Por simetría además, podemos probarlo sólo para $i = 1$. Ahora bien, después de esta simplicación, tenemos que

$$\langle b(K), e_1\rangle = \frac{\int_{\mathrm{conv}\{0, e_1, \ldots, e_n\}} x_1 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{\int_{\mathrm{conv}\{0, e_1, \ldots, e_n\}} 1 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n}.$$

El teorema de Fubini nos permite expresar, para cualquier función $f(x)$,

$$\int_{\mathrm{conv}\{0, e_1, \ldots, e_n\}} f(x) \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \cdots \int_0^{1-x_1-\ldots-x_{n-1}} f(x) \mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_1,$$

de donde es fácil (aunque no es inmediato) deducir que

$$\int_{\mathrm{conv}\{0,e_1,\dots,e_n\}} x_1 \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{n(n+1)},$$
$$\int_{\mathrm{conv}\{0,e_1,\dots,e_n\}} 1 \,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{n}.$$

con lo que queda probado (b).

Finalmente, vamos a dar una respuesta negativa a la pregunta establecida en (c), proporcionando una sucesión $\{K_n\}$ convergiendo a cierto K_0 de forma que la sucesión de baricentros $\{b(K_n)\}$ no converge a $b(K_0)$. Concretamente, dado $n \in \mathbb{N}$, definimos K_n como el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,\frac{1}{n})$. Como estos tres puntos son afínmente independientes, del apartado (b) se deduce que $b(K_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3n})$, luego la sucesión de baricentros converge a $(\frac{1}{3}, 0)$. No obstante $\{K_n\}$ converge al segmento K_0 que une los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$, como puede comprobarse fácilmente, cuyo baricentro es $b(K_0) = (\frac{1}{2}, 0)$, otra vez por el apartado (b).

Ejercicio 16. Un conjunto cerrado, convexo y no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice regular si para todo punto $x \in \mathrm{fr}(A)$ existe un único hiperplano soporte de A en x.

(a) Demuestra que si A es regular, entonces $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$.

(b) Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y $r > 0$, demuestra que $A = K + r\overline{B}$ es regular.

(c) Concluye que los conjuntos regulares son densos en $\mathcal{K}^n$ con la topología de la distancia de Hausdorff.

Solución. El apartado (a) se sigue del hecho de que si $\mathrm{int}(A) = \emptyset$, entonces A está contenido en un subespacio afín propio $U \subset \mathbb{R}^n$. En tal caso, cualquier hiperplano que contenga a U es un hiperplano soporte de A en cualquiera de sus puntos, luego A no puede ser regular.

Para probar (b), consideremos $K \in \mathcal{K}^n$ y $r > 0$, y tomemos $A = K + r\overline{B}$. Dado un punto $x \in \mathrm{fr}(A)$, podemos considerar su proyección $y = p_K(x) \in K$, que cumple $d(x,y) = r$. Para probar esto último, observamos que, por definición de proyección, $d(x,y) = d(x,K) \leq r$; si tuviéramos una desigualdad estricta $d(x,y) < r$, entonces $x \in B_r(y) \subset K + rB$, pero $K + rB$ es un abierto contenido en A, lo que nos dice que $x \in \mathrm{int}(A)$, contradiciendo que $x \in \mathrm{fr}(A)$. Tenemos entonces que $d(x,y) = r$, de donde deducimos que $x \in \mathrm{fr}(\overline{B}_r(y)) \subset \overline{B}_r(y) \subset A$, por lo que el único hiperplano soporte posible de A en x es el hiperplano tangente a $\overline{B}_r(y)$ en x, lo que prueba que es único.

El apartado (c) se deduce fácilmente de lo anterior. Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, el convexo $K + \varepsilon\overline{B}$ es regular en vista de (b) y cumple $\delta(K, K + \varepsilon\overline{B}) \leq \varepsilon$ de forma trivial. En otras palabras, dado $K \in \mathcal{K}^n$, existe un convexo regular arbitrariamente cercano en la distancia de Hausdorff a K, esto es, los conjutos regulares son densos en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.

Ejercicio 17. Demuestra que las aplicaciones unión y suma de Minkowski son aplicaciones continuas en $\mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n$ respecto de la distancia de Hausdorff, probando que:

- $\delta(K \cup L, K' \cup L') \leq \max\{\delta(K, K'), \delta(L, L')\}$.
- $\delta(K + L, K' + L') \leq \delta(K, K') + \delta(L, L')$

para cualesquiera $K, K', L, L' \in \mathcal{C}^n$.

Demuestra, en cambio, que la intersección no es continua respecto de la distancia de Hausdorff, encontrando sucesiones $\{K_i\}$ y $\{L_i\}$ en $\mathcal{K}^n$ tales que $\{K_i\} \xrightarrow{\delta} K$, $\{L_i\} \xrightarrow{\delta} L$ y, sin embargo, $\{K_i \cap L_i\}$ no converja a $K \cap L$.

Indicación: ¿Qué ocurre si $K \cap L = \emptyset$?

Solución. Llamemos en lo que sigue $\alpha = \delta(K, K')$ y $\beta = \delta(L, L')$, luego $K \subset K' + \alpha\overline{B}$, $K' \subset K + \alpha\overline{B}$, $L \subset L' + \beta\overline{B}$ y $L' \subset L + \beta\overline{B}$.

- Respecto de la unión tenemos que $K \cup L \subset (K' + \alpha\overline{B}) \cup (L' + \beta\overline{B}) \subset (K' + \max\{\alpha, \beta\}\overline{B}) + (L' + \max\{\alpha, \beta\}\overline{B}) = (K' \cup L') + \max\{\alpha, \beta\}\overline{B}$ y, de forma similar, $K' \cup L' \subset (K \cup L) + \max\{\alpha, \beta\}\overline{B}$, lo que demuestra que $\delta(K \cup L, K' \cup L') \leq \max\{\alpha, \beta\}$ tal y como se afirma en el enunciado.
- Para la suma tenemos que $K + L \subset (K' + \alpha\overline{B}) + (L' + \beta\overline{B}) = (K' + L') + (\alpha + \beta)\overline{B}$ y, de forma similar, $K' + L' \subset (K + L) + (\alpha + \beta)\overline{B}$, de donde $\delta(K + L, K' + L') \leq \alpha + \beta$.

Para finalizar la demostración, sólo hay que observar que $d_\infty((K, L), (K', L')) = \max\{\delta(K, L), \delta(K', L')\}$ y $d_1((K, L), (K', L')) = \delta(K, L) + \delta(K', L')$ son distancias en el espacio producto $\mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n$ que generan la topología producto de considerar en cada uno de los factores la distancia de Hausdorff (esto se deja como ejercicio estándar de topología de espacios métricos).

Finalmente, que la intersección no es continua es consecuencia de que puede que la distancia no esté ni siquiera bien definida ya que la distancia de Hausdorff no está definida sobre el conjunto vacío. Dadas dos sucesiones $\{K_n\} \xrightarrow{\delta} K$ y $\{L_n\} \xrightarrow{\delta} L$ en $\mathcal{K}^n$, puede ocurrir que $K_n \cap L_n = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $K \cap L \neq \emptyset$, o bien que $K_n \cap L_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $K \cap L = \emptyset$. No obstante, vamos a dar un ejemplo en el que todas las intersecciones son no vacías y aún así no hay continuidad. Para ello, dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos $K_n = [(0, 0), (1, 0)]$ y $L_n = [(0, 0), (1, \frac{1}{n})]$. Es obvio que $\{K_n\}$ es constante y, por tanto, su límite es el propio segmento $K = [(0, 0), (1, 0)]$. La sucesión $\{L_n\}$ también converge a $L = [(0, 0), (1, 0)]$; sin embargo, $K_n \cap L_n = \{(0, 0)\}$ no converge a $K \cap L$.

Ejercicio 18. Dado $A \in \mathcal{C}^n$, sabemos que el diámetro de A se define como

$$\operatorname{diam}(A) = \max\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

(a) Demuestra que $\operatorname{diam} : \mathcal{C}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua respecto a la distancia de Hausdorff.

(b) Demuestra que $\operatorname{diam}(K) = \operatorname{diam}(\operatorname{conv}(K))$ para cualquier $K \in \mathcal{C}^n$.

(c) Demuestra que, si $A \in \mathcal{K}^n$, entonces $\operatorname{diam}(A) = \max\{w_A(u) : u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1\}$, siendo $w_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función anchura de A, dada por $w_A(u) = |h_A(u) - h_A(-u)|$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Solución. Veamos que, de hecho, el diámetro es lipschitziana respecto de la distancia

de Hausdorff. Dados $K, L \in \mathcal{K}^n$, escribamos $\alpha = \delta(K, L)$, con lo que $K \subset L + \alpha\overline{B}$ y $L \subset K + \alpha\overline{B}$. Dados dos puntos $x, y \in K$, existirán, por tanto, $x', y' \in L$ tales que $d(x, x') \leq \alpha$ y $d(y, y') \leq \alpha$, de donde $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y')' + d(y', y) \leq 2\alpha + \operatorname{diam}(L)$. Tomando el supremo en $x, y \in K$, deducimos que $\operatorname{diam}(K) \leq 2\alpha + \operatorname{diam}(L)$ y, de forma análoga, $\operatorname{diam}(L) \leq 2\alpha + \operatorname{diam}(K)$. Esto nos permite decir que $|\operatorname{diam}(K) - \operatorname{diam}(L)| \leq 2\delta(K, L)$ y tenemos probado (a).

Para probar (b), observemos que $\operatorname{diam}(K) \leq \operatorname{diam}(\operatorname{conv}(K))$ dado que $K \subset \operatorname{conv}(K)$, luego bastará ver la desigualdad opuesta, para lo que podemos suponer que K consta de más de un punto (en caso contrario el resultado es inmediato). Como $\operatorname{conv}(K)$ es compacto y consta de más de un punto, deducimos que existen $x, y \in \operatorname{conv}(K)$ distintos tales que $d(x, y) = \operatorname{diam}(K)$, y podemos tomar H_x el hiperplano ortogonal al segmento $[x, y]$ que pasa por x. Por la definición de diámetro, tenemos que $H_x \cap K \subset H_x \cap \operatorname{conv}(K) = \{x\}$ y $K \subset \operatorname{conv}(K) \subset S$, siendo S uno de los semiespacios cerrados determinados por H_x. Si $x \notin K$, entonces $\operatorname{int}(S)$ es un convexo que contiene a K, luego $\operatorname{conv}(K) \subset \operatorname{int}(S)$, lo cual es una contradicción ya que $x \in H_x \cap \operatorname{conv}(K) \neq \emptyset$. Esto demuestra que $x \in K$ y, de la misma forma, $y \in K$, luego $\operatorname{diam}(\operatorname{conv}(K)) = d(x, y) \leq \operatorname{diam}(K)$, como queríamos probar.

Finalmente, vamos a demostrar (c). Dado $A \in \mathcal{K}^n$, podemos suponer que A tiene más de un punto, luego existen $x, y \in A$ distintos tales que $d(x, y) = \operatorname{diam}(A)$. Los hiperplanos H_x y H_y ortogonales al segmento $[x, y]$ en x e y, respectivamente, son hiperplanos soporte de A en x e y (es un argumento similar al del apartado anterior). Por ser dichos hiperplanos ortogonales a $[x, y]$, deducimos que $\operatorname{dist}(H_x, H_y) = d(x, y) = \operatorname{diam}(A)$, pero está claro que $\operatorname{dist}(H_x, H_y) = w_A(u)$, siendo u un vector unitario en la dirección de $x - y$, lo que demuestra que $\operatorname{diam}(A) \leq \max\{w_A(u) : u \in \mathbb{R}^n, |u| = 1\}$. Para probar la desigualdad opuesta, veamos que si $u \in \mathbb{R}^n$ cumple $|u| = 1$, entonces $w_A(u) \leq \operatorname{diam}(A)$. En efecto, por la definición de h_A existirán $x, y \in A$ tales que $h_A(u) = \langle x, u\rangle$ y $h_A(-u) = \langle y, u\rangle$, luego $w_A(u) = |h_A(u) - h_A(-u)| = |\langle x - y, u\rangle|$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice que $w_A(u) \leq |x - y| = d(x, y) \leq \operatorname{diam}(A)$ y hemos terminado.

Ejercicio 19. Dado $K \in \mathcal{C}^n$, se define el circunradio de A como

$$R(K) = \min\{\rho \geq 0 : K \subset \overline{B}_\rho(x_0) \text{ para algún } x_0 \in \mathbb{R}^n\} \geq 0.$$

(a) Demuestra que existe una bola cerrada de radio $R(K)$ en $\mathbb{R}^n$ que contiene a K (es decir, el mínimo está bien definido) y que ésta es única.

(b) Demuestra que la aplicación circunradio $R : \mathcal{C}^n \to \mathbb{R}$ es continua respecto de la distancia de Hausdorff, probando que, de hecho, es lipschitziana y satisface $|R(K) - R(L)| \leq \delta(K, L)$ para cualesquiera $K, L \in \mathcal{C}^n$.

Solución. Definimos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \max\{d(x, y) : y \in K\}$ (es fácil ver que el máximo se alcanza por ser $x \mapsto d(x, \cdot)$ continua y K compacto). Ahora bien, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $d(y, z) \leq d(x, z) + d(x, y) \leq f(x) + d(x, y)$

para todo $z \in K$ luego, tomando supremo, $f(y) \leq f(x) + d(x,y)$. Análogamente tenemos que $f(x) \leq f(y) + d(x,y)$, de donde $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$ y hemos probado que f es lipschitiana (en particular, continua). No es difícil ver que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, de donde deducimos que f alcanza su mínimo absoluto en cierto punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. De la definición de circunradio, es inmediato que $R(K) = f(x_0)$ y $K \subset \overline{B}_{f(x_0)}(x_0)$ lo que prueba la existencia de la bola.

Razonaremos la unicidad por reducción al absurdo. Si existieran dos bolas distintas $\overline{B}_{R(K)}(x_1)$ y $\overline{B}_{R(K)}(x_2)$ de radio $R(K)$ tales que $K \subset \overline{B}_{R(K)}(x_1) \cap \overline{B}_{R(K)}(x_2)$, entonces la bola de centro $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ y radio $(R(K)^2 - \frac{1}{4}d(x_1,x_2)^2)^{1/2} < R(K)$ contiene a $\overline{B}_{R(K)}(x_1) \cap \overline{B}_{R(K)}(x_2)$ y, por tanto, a K. Esto contradice la minimalidad de $R(K)$.

Para el apartado (b), consideremos $K, L \in \mathcal{C}^n$ y llamemos $\alpha = \delta(K,L)$, con lo que $K \subset L + \alpha\overline{B}$ y $L \subset K + \alpha\overline{B}$. Como quiera que $L \subset \overline{B}_{R(L)}(x_0)$ para cierto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, deducimos que $K \subset L + \alpha\overline{B} \subset \overline{B}_{R(L)}(x_0) + \alpha\overline{B} = \overline{B}_{R(L)+\alpha}(x_0)$. De la definición de $R(K)$ se sigue que $R(K) \leq R(L) + \alpha$ y, análogamente, $R(L) \leq R(K) + \alpha$, esto es, $|R(K) - R(L)| \leq \alpha = \delta(K,L)$ y hemos terminado.

Ejercicio 20. Dado $A \in \mathcal{K}^n$, se define el inradio de A como

$$r(A) = \text{máx}\{\rho \geq 0 : \overline{B}_\rho(x_0) \subset A \text{ para algún } x_0 \in \mathbb{R}^n\} \geq 0.$$

(a) Demuestra que existe una bola de radio $r(A)$ en $\mathbb{R}^n$ contenida en A (es decir, el máximo está bien definido), pero que dicha bola no es necesariamente única.

(b) Dado $0 \leq \rho \leq r(A)$, demuestra que el conjunto C_ρ formado por los centros de todas las bolas cerradas de radio ρ que están contenidas en A cumple $C_\rho \in \mathcal{K}^n$.

(c) Demuestra que la aplicación inradio $r : \mathcal{K}^n \to \mathbb{R}$ es continua respecto de la distancia de Hausdorff.

Solución. Si $\text{int}(A) = \emptyset$ está claro que $r(A) = 0$, luego supongamos que $\text{int}(A) \neq \emptyset$ y consideremos la función $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{dist}(x, \text{fr}\, A) = \text{mín}\{d(x,y) : y \in A\}$. Esta función es continua y, por tanto, alcanza su máximo en cierto $x_0 \in A$ (ya que A es compacto), pero trivialmente igual a $f(x_0) = r(A)$ y $\overline{B}_{r(A)}(x_0) \subset A$, lo que demuestra la existencia de la bola inscrita. Para ver que no es única, basta tomar $A = [0,1] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$, donde $r(A) = \frac{1}{2}$ y cualquier bola de radio $\frac{1}{2}$ centrada en un punto del segmento que une $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ está contenida en A.

Para probar (b), consideremos el conjunto C_ρ para cierto $0 \leq \rho \leq r(A)$. Dados $x, y \in C_\rho$ y $t \in [0,1]$, tenemos que $\overline{B}_\rho(x), \overline{B}_\rho(y) \subset A$ y hemos de probar que $\overline{B}_\rho((1-t)x + ty) \subset A$. En efecto, dado $z \in \overline{B}_\rho((1-t)x + ty)$, existirá $u \in \overline{B}$ tal que $z = (1-t)x + ty + \rho u = (1-t)(x + \rho u) + t(y + \rho u)$. Como quiera que $x + \rho u \in B_\rho(x) \subset A$ e $y + \rho u \in B_\rho(y) \subset A$, de la convexidad de A se sigue que $z \in A$.

Para la continuidad de r, necesitamos un lema previo: $r(K + \alpha\overline{B}) = r(K) + \alpha$ para cualesquiera $K \in \mathcal{K}^n$ y $\alpha \geq 0$. En efecto, si $\overline{B}_{r(K)}(x_0) \subset K$, entonces $\overline{B}_{r(K)+\alpha}(x_0) = \overline{B}_{r(K)}(x_0) + \alpha\overline{B} \subset K + \alpha\overline{B}$, de donde $r(K) + \alpha \leq r(K + \alpha\overline{B})$; para probar la desigualdad contraria, razonemos por contradicción: si $r(K) + \alpha = r(K + \alpha\overline{B}) - \varepsilon$, para cierto $\varepsilon > 0$,

entonces podríamos escribir

$$\overline{B}_{r(K)+\varepsilon}(y_0) + \alpha\overline{B} = B_{r(K+\alpha\overline{B})}(y_0) \subset K + \alpha\overline{B}$$

para cierto $y_0 \in K + \alpha\overline{B}$. Por la propiedad de cancelación de la suma de Minkowski, obtenemos que $\overline{B}_{r(K)+\varepsilon}(y_0) \subset K$, contradiciendo que $r(K)$ es el mayor radio de una bola contenida en K y hemos probado el lema.

Usando esto, podemos probar finalmente que r es lipschitziana: dados $K, L \in \mathcal{K}^n$ y denotando $\alpha = \delta(K, L)$, tenemos que $K \subset L + \alpha\overline{B}$ y $L \subset K + \alpha\overline{B}$, de donde $r(K) \leq r(L + \alpha\overline{B}) = r(L) + \alpha$ y $r(L) \leq r(K + \alpha\overline{B}) = r(K) + \alpha$. En consecuencia, $|r(K) - r(L)| \leq \delta(K, L)$ para cualesquiera $K, L \in \mathcal{K}^n$ y hemos terminado.

Ejercicio 21. Sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano y $S_H : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^n$ la aplicación que a cada cuerpo convexo K le asigna su simetrizado de Steiner $S_H(X)$ respecto de H. ¿Es S_H una aplicación continua respecto a la distancia de Hausdorff?

Solución. La respuesta es negativa, para lo que vamos a dar un hiperplano H y una sucesión $\{K_n\} \subset \mathcal{K}^2$ que converge a cierto $K_0 \in \mathcal{K}^2$, tal que la sucesión $\{S_H(K_n)\}$ no converge a $S_H(K_0)$. Este ejemplo se puede extender fácilmente a dimensión mayor que 2 (en dimensión 1 no es difícil ver que la simetrización sí es continua).

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $K_n = [(0, 0), (1, \frac{1}{n})]$, de donde es claro que la sucesión $\{K_n\}$ converge a $K_0 = [(0, 0), (1, 0)]$ según δ. Consideremos ahora el hiperplano $H = \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, esto es, el eje Y. Es fácil comprobar que $S_H(K_n) = [(0, 0), (0, \frac{1}{n})]$ converge a $\{(0, 0)\}$, que es distinto de $S_H(K_0) = [(\frac{-1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0)]$.