# Tema 0: Preliminares

José Miguel Manzano Prego

## Índice

**1 Nociones elementales de lógica matemática** **1**

**2 Conjuntos: propiedades y construcciones** **3**

**3 Aplicaciones entre conjuntos** **6**

**4 Relaciones binarias** **9**

**5 Números reales y complejos** **13**

**6 Matrices y determinantes** **17**

**7 Sistemas de ecuaciones lineales** **29**

**8 Ejercicios** **34**

El objetivo de este tema introductorio de Álgebra Lineal y Geometría del primer curso del Grado en Física es repasar y ampliar conceptos básicos en teoría de conjuntos y operaciones con números y matrices. El dominio de estos conocimientos como punto de inicio de la asignatura será indispensable en el desarrollo de la misma. No obstante, estos apuntes pretenden dar una visión práctica de los conceptos involucrados, ya que un enfoque más teórico puede encontrarse en cualquier libro de Lógica y Teoría de Conjuntos y se escapa del alcance de la asignatura[1].

## 1. Nociones elementales de lógica matemática

La lógica es una parte indisociable de las matemáticas que estudia las reglas que permiten hacer razonamientos válidos. Aquí nos familiarizaremos con el lenguaje más

[1] Versión revisada el 19 de septiembre de 2017.

básico de la lógica matemática: la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la negación ($\neg$), la implicación o condicional ($\Rightarrow$) y la equivalencia ($\Leftrightarrow$), así como los cuantificadores existencial ($\exists$) y universal ($\forall$).

En lógica, un enunciado o proposición es una afirmación que puede ser verdadera o falsa, por ejemplo, "Hoy es jueves", "Tengo 19 años", "El conjunto tiene tres elementos" ó "Todos los españoles son rubios". Para simplificar, diremos que se cumple un enunciado A cuando A es verdadero y que no se cumple cuando es falso.

- **Conjunción ($\wedge$).** Dados dos enunciados $A$ y $B$, diremos que se cumple $A \wedge B$ (se lee "$A$ y $B$") cuando se cumplen simultáneamente los dos enunciados.

  Ejemplo: Sea $A$ el enunciado "Hoy hace sol" y $B$ el enunciado "Hoy es domingo". El enunciado $A \wedge B$ sólo será cierto los domingos soleados.

- **Disyunción ($\vee$).** Dados dos enunciados $A$ y $B$, diremos que se cumple $A \vee B$ (se lee "$A$ o $B$") cuando se cumpla alguno de los dos enunciados, es decir, se cumple $A$, se cumple $B$ o bien se cumple $A \wedge B$.

  Ejemplo: Sea $A$ el enunciado "Tengo más de mil euros", $B$ el enunciado "Tengo menos de mil euros" y $C$ el enunciado "Tengo menos de dos mil euros". El enunciado $A \vee B$ será cierto excepto en el caso de que tenga exactamente mil euros, el enunciado $A \vee C$ será cierto siempre y el enunciado $B \vee C$ será cierto siempre que tenga menos de dos mil euros.

- **Negación ($\neg$).** La negación de un enunciado $A$, que suele denotarse por $\neg A$, es el enunciado que es cierto cuando $A$ es falso y falso cuando $A$ es cierto. Suele usarse la frase "no $A$" para denotar $\neg A$.

  Ejemplo: La negación de "Juan tiene un coche amarillo" es "Juan no tiene un coche amarillo". La negación de "No tengo amigos" es "Tengo algún amigo". La negación de "Todos los actores son guapos" es "Hay al menos un actor que no es guapo".

- **Condicional ($\Rightarrow$).** Dados dos enunciados $A$ y $B$, escribimos $A \Rightarrow B$ (se lee "si $A$ entonces $B$") cuando siempre que ocurra $A$ también ocurre $B$. También se dice que $A$ implica $B$, que $B$ se deduce de $A$, $A$ es condición suficiente para $B$ ó que $B$ es condición necesaria para $A$. Al enunciado $A$ se le llama *hipótesis* y al $B$ se le llama *tesis*. Cuando $B$ no se deduce de $A$, suele escribirse $A \not\Rightarrow B$.

  Ejemplo 1: Sea $A$ el enunciado "El conjunto tiene 5 elementos" y $B$ el enunciado "El conjunto tiene más de 3 elementos". Entonces, $A \Rightarrow B$ y $B \not\Rightarrow A$.

  Ejemplo 2: Supongamos que $A \Rightarrow B$ y que sabemos que $B$ es falso (no se cumple), entonces $A$ también es falso. Por ejemplo, si $A$ es el enunciado "Ha llovido en la última media hora" y $B$ el enunciado "El suelo de la calle está mojado", entonces todo el mundo acepta que $A \Rightarrow B$. Por lo tanto, si el suelo está seco, entonces no ha podido llover en la última media hora. Este modo de razonar es muy común en matemáticas y se llama *razonamiento por contrarrecíproco*, aunque en lógica

también es conocido como *modus tollendo tollens* (modo que negando niega).

- **Equivalencia ($\Leftrightarrow$).** Dados dos enunciados $A$ y $B$, escribir $A \Leftrightarrow B$ es una forma simplificada de escribir $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, es decir, que $A$ implica $B$ y a la vez $B$ implica $A$. En otras palabras, que se cumpla $A$ es equivalente a que se cumpla $B$ y suele leerse "$A$ si, y sólo si, $B$". Por tanto, estos dos enunciados son lógicamente indistinguibles.

  Ejemplo 1: Sea $A$ el enunciado "Amancio es la persona más rica de España" y $B$ "Todos los españoles tienen menos dinero que Amancio". Entonces, $A \Leftrightarrow B$.

  Ejemplo 2: Sea $A$ el enunciado "$x$ es un número par", $B$ el enunciado "$x$ es múltiplo de 2" y $C$ el enunciado "$x$ es el número 4". Entonces, $A \Leftrightarrow B$, $C \Rightarrow B$, $C \Rightarrow A$, $A \not\Rightarrow B$ y $B \not\Rightarrow C$.

Combinando estos elementos ya pueden hacerse construcciones lógicas bastante complejas, aunque hemos visto en los ejemplos anteriores que los enunciados pueden ser muy variopintos, algunos se refieren a elementos individuales (por ejemplo, "Juan tiene un coche amarillo") y otros a una cantidad de elementos en principio sin determinar (por ejemplo, "Todos los actores son guapos").

- **Cuantificador universal ($\forall$).** Es la forma lógica de hacer referencia a todos los elementos que cumplen una propiedad que depende del elemento. Si el enunciado $A$ depende de $x$ y decimos que se cumple $A$ para todo $x$, es que $A$ es cierto independientemente del valor de $x$.

  Ejemplo: Sea $x$ un número real indeterminado y $A$ el enunciado "$x^2$ es mayor o igual que cero". Entonces podríamos decir que $A$ es cierto para todo $x$.

- **Cuantificador existencial ($\exists$).** Es la forma lógica de hacer referencia al menos a un elemento que cumple una propiedad. Si el enunciado $A$ depende de $x$ y decimos que existe $x$ para el que se cumple $A$, es que $A$ es cierto para algún valor de $x$ dentro del rango de valores posibles. Una variante de este cuantificador es $\exists_1$, que se lee "existe un único" y hace referencia a que un solo elemento cumple la propiedad especificada.

  Ejemplo: Supongamos que $x$ es un número real indeterminado, $A$ el enunciado "$x^2$ es mayor o igual que cero" y $B$ el enunciado "$x^2$ es igual a 2". Entonces podríamos decir que $A$ es cierto para todo $x$ y que existe $x$ tal que $B$ es cierto, pero no existe un único $x$ para el que $B$ es cierto.

## 2. Conjuntos: propiedades y construcciones

Los conjuntos son las estructuras más básicas de las matemáticas y, por tanto, los más difíciles de definir de forma rigurosa. Aquí diremos simplemente que un conjunto es una reunión de objetos, que se llamaremos elementos del conjunto. Hay dos formas de

definir conjuntos:

- Por especificación, es decir, haciendo una lista de todos los elementos del conjunto, que se colocan entre llaves y separados por comas. Por ejemplo, el conjunto $A$ de los números primos menores que 50 es el conjunto

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}.$$

- Por descripción, es decir, utilizando una propiedad que los caracteriza. Suele escribirse $\{x : x \text{ cumple } P\}$ y se lee "el conjunto de los $x$ que cumplen $P$". Es obvio que $x$ cumple $P$ puede ser sustituido por un enunciado todo lo complejo que se quiera que involucre a $x$. Por ejemplo, en el apartado anterior, podíamos haber escrito

$$A = \{x : x \text{ es un número primo menor que } 50\}.$$

Decimos que un objeto $x$ pertenece a un conjunto $A$ cuando $x$ sea un elemento de $A$, y lo escribimos como $x \in A$. Si, por el contrario, $x$ no es un elemento de $A$, entonces escribimos $x \notin A$. En el ejemplo anterior, tenemos que $3 \in A$ mientras que $48 \notin A$.

Curiosamente, en matemáticas, para decir que un objeto $x$ cumple una propiedad $P$ suele ser habitual decir que *$x$ pertenece al conjunto de los objetos que cumplen $P$*. Por ejemplo, para decir que un número es primo, puede decirse que el número pertenece al conjunto de los números primos. Pronto veremos que, para decir que $A$ es una matriz es cuadrada de orden $2 \times 2$ con entradas reales, diremos que $A$ pertenece al conjunto de las matrices cuadradas de orden $2 \times 2$ con entradas reales. Esto puede parecer muy sofisticado, pero realmente permite abreviar la notación: como dicho conjunto de matrices se denotará por $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, será suficiente escribir $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Un conjunto que merece una especial atención es el conjunto vacío $\emptyset$, es que el conjunto que no contiene ningún elemento, es decir, no existe ningún $x$ tal que $x \in \emptyset$. Aunque puede parecer poco útil considerar este conjunto, veremos que hace que muchos razonamientos se simplifiquen.

**Definición 2.1 (Subconjuntos e igualdad de conjuntos).** *Dados dos conjuntos $A$ y $B$, decimos que $A$ es un subconjunto de $B$ cuando todo elemento de $A$ pertenezca a $B$, y lo escribiremos como $A \subset B$. También suele decirse que $A$ está contenido en $B$ o que $B$ contiene a $A$. Diremos que $A$ y $B$ son iguales, y escribiremos $A = B$, cuando $A \subset B$ y $B \subset A$, es decir, todo elemento de $A$ es un elemento de $B$ y todo elemento de $B$ es un elemento de $A$.*

Vamos a ver ahora algunas formas de construir nuevos conjuntos a partir de otros.

**Definición 2.2 (Unión, intersección y diferencia).** *Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.*

- *La unión de $A$ y $B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ o pertenecen a $B$ y se denota por $A \cup B$.*

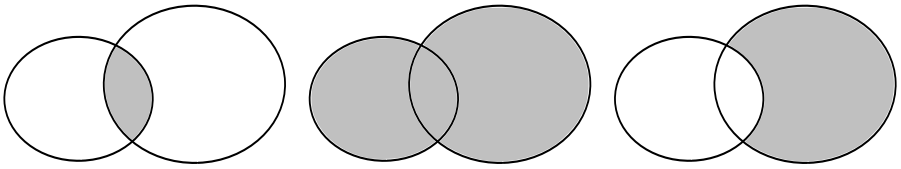

Figura 1: Diagramas de Venn para la intersección (izquierda), la unión (centro) y la diferencia (derecha) de dos conjuntos.

- *La intersección de $A$ y $B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ y a $B$ y se denota por $A \cap B$.*
- *La diferencia $A \setminus B$ es el conjunto de elementos de $A$ que no pertenecen a $B$.*

Como podemos ver, la unión es la versión en conjuntos de la disyunción lógica, mientras que la intersección es la versión en conjuntos de la conjunción lógica. También podemos expresar estas tres construcciones más formalmente como

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$
$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$
$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Las demostración de las siguientes propiedades para tres conjuntos $A$, $B$ y $C$ se deja como ejercicio (una forma visual de entender estos resultados es utilizar un diagrama de Venn, véase la figura 1):

1. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$.
   La unión y la intersección de conjuntos son simétricas.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ y $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
   La unión y la intersección de conjuntos son asociativas.
3. $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.
   El vacío es neutro para la unión y absorbente para la intersección.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   La intersección y la unión son distributivas una respecto de la otra.
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ y $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Estas son las conocidas como leyes de De Morgan.

**Definición 2.3 (Producto cartesiano).** *Dados dos objetos $x$ e $y$, el par ordenado $(x, y)$ es otro objeto en el que se distingue a $x$ como primer objeto y a $y$ como segundo. De esta forma, el producto cartesiano de $A$ y $B$ se define como el conjunto $A \times B$ formado por los pares ordenados $(a, b)$ tales que $a \in A$ y $b \in B$, es decir,*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

El producto cartesiano puede generalizarse fácilmente a más de dos factores siempre que generalicemos el concepto de par ordenado al concepto de $n$-upla, siendo $n$ un número natural: una $n$-upla es una sucesión ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de objetos matemáticos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. De esta forma, dados $n$ conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, su producto cartesiano se define como el conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ de $n$-uplas tales que el primer elemento pertenece a $A_1$, el segundo a $A_2$ y así sucesivamente, es decir,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

En las unidades siguientes este concepto tendrá especial importancia pues el principal marco donde trabajaremos será $\mathbb{R}^n$, que es una forma resumida de escribir el producto de $n$ factores $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ representa el conjunto de los números reales.

# 3. Aplicaciones entre conjuntos

Una aplicación es una forma de asociar a cada uno de los elementos de un conjunto un elemento de otro conjunto. Por ejemplo, a cada habitante de España le podemos asociar el dinero que tiene en el banco, a cada punto de la Tierra le podemos asociar la temperatura en ese punto, a cada número entero le podemos asociar su cuadrado,... Evidentemente la libertad para definir aplicaciones es inmensa, ya que la única restricción es que a un elemento del primer conjunto no podemos asociarle más de un elemento del segundo.

En general, si $f$ es una aplicación que asocia a los elementos de un conjunto $A$ elementos de otro conjunto $B$, escribiremos $f : A \to B$. Al conjunto $A$ se le llama *dominio* de $f$, mientras que $B$ se conoce como *codominio*, *rango* o *recorrido* de $f$. Si $a \in A$, entonces al elemento de $B$ que $f$ le asocia a $a$, se denota por $f(a)$ y se conoce como *imagen* de $a$.

Ejemplo: Sea $H$ el conjunto de todas las personas que han vivido en la Tierra en algún momento de la historia y sean $m : H \to H$ la aplicación que a cada una de esas personas le asigna a su madre biológica y $p : H \times H$ la aplicación que le asigna a su padre biológico. Como la madre y el padre de una persona son únicos, la aplicación está bien definida, es decir, para cada $x \in H$, los elementos $m(x)$ y $p(x)$ están unívocamente determinados, ¡aunque no sepamos quienes son! Por ejemplo, dado un individuo $x$, $m(x)$ representa a su madre y $m(m(x))$ representa a su abuela materna. También es posible considerar la aplicación $f : H \to H \times H$ que le asigna a cada individuo el par ordenado formado por madre y padre, es decir, $f(x) = (m(x), p(x))$. No estamos asignando dos elementos a un elemento, sino un solo elemento del conjunto producto cartesiano $H \times H$.

**Definición 3.1.** *Sea $f : A \to B$ una aplicación entre dos conjuntos $A$ y $B$.*

- *Diremos que $f$ es inyectiva cuando no haya dos elementos distintos de $A$ a los que se les haga corresponder el mismo elemento de $B$.*

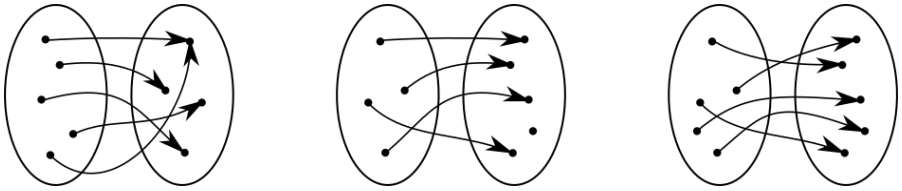

Figura 2: Tres aplicaciones: una sobreyectiva pero no inyectiva (izquerda), otra inyectiva pero no sobreyectiva (centro) y otra biyectiva (derecha).

- *Diremos que $f$ es sobreyectiva cuando todos los elementos de $B$ sean imagen de algún elemento de $A$.*
- *Diremos que $f$ es biyectiva cuando sea inyectiva y sobreyectiva.*

Podemos representar aplicaciones entre conjuntos mediante flechas que unan un elemento del dominio con su imagen en el codominio, tal y como hemos representado en la figura 2 (obviamente, esto sólo es práctico para conjuntos muy pequeños). La aplicación es inyectiva cuando no haya elementos en la imagen a los que llegue más de una flecha, sobreyectiva cuando a cada elemento de la imagen llega al menos una flecha y biyectiva cuando a cada elemento de la imagen llegue exactamente una flecha.

Ejemplo: Las aplicación "madre" $m$ del ejemplo anterior no es inyectiva ya que si una mujer tiene dos hijos $x$ e $y$, entonces $m(x) = m(y)$, es decir, distintos hijos de una misma mujer tienen la misma imagen por $m$. Tampoco es sobreyectiva ya que existen mujeres que nunca han tenido hijos.

Ejemplo: Consideremos la aplicación $d$ que a cada número entero $x$ le asocia el número real resultante de dividir $x$ entre 2. Si denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros y por $\mathbb{R}$ al de los números reales, entonces $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cumple que $d(x) = \frac{x}{2}$ para todo número entero $x$. La aplicación es inyectiva pero no sobreyectiva. En cambio, la aplicación $e : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ que cumple que $e(x)$ es el menor entero mayor o igual que $x$ es sobreyectiva pero no es inyectiva. La aplicación $e$ se conoce como función parte entera.

**Aplicaciones y subconjuntos.** Las aplicaciones no sólo permiten transformar elementos sino también subconjuntos. Las siguientes operaciones suelen ser muy útiles para comprender la naturaleza de las aplicaciones:

- Si $f : A \to B$ es una aplicación y $M \subset A$, se define la imagen de $M$ por $f$ como el conjunto de las imágenes por $f$ de todos los elementos de $M$, es decir,

  $$f(M) = \{f(x) : x \in M\} \subset B.$$

  Es fácil darse cuenta de que $f$ es sobreyectiva si, y sólo si, $f(A) = B$. También es fácil ver que si *restringimos* el codominio $B$ a $f(A)$, automáticamente $f$ se vuelve sobreyectiva, esto es, $f : A \to f(A)$ es sobreyectiva.

- Si $f : A \to B$ es una aplicación y $N \subset B$, se define la preimagen de $N$ por $f$

como el conjunto de los elementos de $A$ que se aplican por $f$ en $N$, es decir,

$$f^{-1}(N) = \{x \in A : f(x) \in N\} \subset A.$$

**Composición de aplicaciones.** Si tenemos dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, entre tres conjuntos $A$, $B$ y $C$, dado un elemento $x \in A$, tenemos que $f(x) \in B$ luego podemos aplicarle $g$ para obtener $g(f(x)) \in C$. A la aplicación que a cada $x$ le asigna $g(f(x))$ se le llama composición de $f$ y $g$, y se denota por $g \circ f$. En otras palabras, tenemos definida una nueva aplicación

$$g \circ f : A \to C, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ para todo } x \in A.$$

Cuando la composición entra en juego es usual hacer diagramas como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: consideremos el diagrama de la figura 3, donde hemos representado seis conjuntos $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ y $F$ y ocho aplicaciones entre ellos (el nombre de la aplicación suele indicarse sobre la correspondiente flecha entre dominio y codominio). Supongamos que queremos ir desde $A$ hasta $F$, para lo cual hay muchos caminos, tres de los cuales son los siguientes:

- El primero es seguir el camino $A \to B \to C \to F$, lo que se corresponde con aplicar primero $f$, después $g$ y finalmente $l$. En otras palabras, dado $a \in A$, pasamos a $f(a) \in B$, de ahí a $g(f(a)) \in C$ y finalmente a $l(g(f(a))$. Por lo tanto, seguir este camino corresponde a aplicar la composición $l \circ g \circ f$.
- Una segunda opción consiste en seguir el camino más directo $A \to B \to F$, que se corresponde con la composición $m \circ f$.
- Análogamente, una tercera opción es $A \to D \to E \to B \to C \to F \to E \to B \to F$, que se corresponde con $m \circ k \circ i \circ l \circ g \circ k \circ h \circ j$.

El diagrama se dice conmutativo cuando no importa el camino elegido para ir desde cualquier conjunto a cualquier otro (por ejemplo, tendríamos que $l \circ g \circ f = m \circ f$ en el ejemplo anterior). Los diagramas conmutativos son muy comunes en matemáticas pues permitan visualizar de forma precisa las relaciones entre distintas aplicaciones. La conmutatividad del diagrama de la figura 3 se traduce en que el "cuadrado" de la izquierda y los dos "triángulos" de la derecha sean conmutativos, es decir, que se cumplan las relaciones sencillas

$$f = k \circ h \circ j, \qquad m \circ k \circ i = 1_F, \qquad m = l \circ g.$$

Esta aplicación $1_F$ es la identidad en el conjunto $F$, que definimos a continuación junto con otras propiedades útiles de la composición de aplicaciones:

1. Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son aplicaciones, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, es decir, la composición es asociativa.

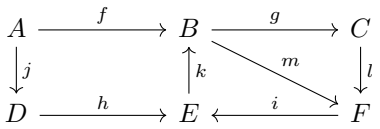


Figura 3: Un diagrama conmutativo complejo

2. Dado un conjunto $A$, consideremos la aplicación $1_A : A \to A$ dada por $1_A(x) = x$ para todo $x \in A$. A esta aplicación se le llama aplicación identidad en el conjunto $A$ y tiene el papel de elemento neutro respecto de la composición, es decir, si $f : A \to B$ y $g : C \to A$ son otras aplicaciones, entonces $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$.

3. Supongamos que una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva, es decir, a cada elemento de $B$ le corresponde por $f$ algún elemento de $A$ (por ser $f$ sobreyectiva) y este elemento es único (por ser $f$ inyectiva). Por tanto, podemos definir una nueva aplicación $g : B \to A$ tal que $g(y)$ es el único elemento de $A$ tal que $f(g(y)) = y$. A $g$ se le llama aplicación *inversa* de $f$, se denota por $f^{-1}$, y cumple que $f \circ f^{-1} = 1_B$ y $f^{-1} \circ f = 1_A$, como puede comprobarse sin mucha dificultad.

**Proposición 3.2.** *Sea $f : A \to B$ una aplicación.*

*(a) Si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$, entonces $f$ es sobreyectiva.*

*(b) Si existe $h : B \to A$ tal que $h \circ f = 1_A$, entonces $f$ es inyectiva.*

*Demostración.* Supongamos que existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$. Entonces, para cualquier $b \in B$ tenemos que $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = b$, lo que nos dice que $g(b) \in A$ se aplica por $f$ en $b$ y, por tanto, existe un elemento de $A$ que se aplica en $b$. Como $b \in B$ es cualquier elemento, deducimos que $f$ es sobreyectiva.

Supongamos ahora que existe $h : B \to A$ tal que $h \circ f = 1_A$. Dados $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$, vamos a ver que necesariamente $x = y$, lo que probará que $f$ es inyectiva. Aplicando $g$ a la igualdad $f(x) = f(y)$, tenemos que $g(f(x)) = g(f(y))$, es decir, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, pero como $g \circ f = 1_A$, se sigue que $x = y$. □

# 4. Relaciones binarias

Una relación binaria $R$ en un conjunto $A$ es una regla que expresa un cierto vínculo entre pares de elementos de $A$. Por ejemplo, "ser menor que" o bien "tener el mismo número de amigos" son relaciones binarias que se aplican a pares de personas. En el sentido más amplio y formal posible, una relación se puede definir como un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$, de forma que $a \in A$ esté relacionado con $b \in A$ precisamente cuando el par $(a, b)$ pertenezca a dicho subconjunto.

Observemos que, si $a \neq b$, entonces $(a, b)$ y $(b, a)$ son elementos distintos de $A \times A$, luego en las relaciones binarias el orden es un factor importante.

Nos centraremos en dos tipos de relaciones: las de orden y las de equivalencia, siendo estas últimas bastante importantes para la comprensión de la asignatura. Para ello, necesitamos formalizar algunos conceptos que simplificarán las discusiones. En primer lugar, si $R$ es una relación binaria en $A$, escribiremos $xRy$ para decir que "$x$ está relacionado con $y$ mediante $R$", esto es, que $(x, y)$ es un elemento del subconjunto de $A \times A$ dado por la relación. En segundo lugar, consideraremos las siguientes propiedades genéricas de las relaciones:

- Diremos que $R$ es reflexiva cuando $xRx$ para todo $x \in A$.
- Diremos que $R$ es transitiva cuando $xRy$ e $yRz$ impliquen $x = z$.
- Diremos que $R$ es simétrica cuando $xRy$ si, y sólo si, $yRx$.
- Diremos que $R$ es antisimétrica cuando $xRy$ e $yRx$ impliquen $x = y$.

Finalmente, podemos definir las relaciones en que estamos interesados:

**Definición 4.1 (relación de orden y de equivalencia).** *Dada una relación binaria $R$ sobre un conjunto,*

*(a) diremos que $R$ es de orden cuando sea reflexiva, transitiva y antisimétrica;*

*(b) diremos que $R$ es de equivalencia cuando sea reflexiva, transitiva y simétrica.*

## Relaciones de orden

No entraremos en mucho detalle sobre las relaciones de orden ya que aparecen en el álgebra lineal de forma muy tangencial. En lo que sigue, $\leq$ denotará una relación de orden sobre el conjunto $A$, que (por definición) cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva: $x \leq x$ para todo $x \in A$.
- Transitiva: si $x, y, z \in A$ cumplen que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.
- Antisimética: si $x, y \in A$ cumplen que $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$.

A la vista de esta forma de escribir las propiedades, todo queda mucho más intuitivo ya que uno piensa instintivamente en la relación de orden de los números reales, que comentaremos en la siguiente sección.

No obstante, existen muchas más relaciones de orden que gozan de propiedades similares y de otras no tan similares. Un ejemplo de ello es la inclusión de conjuntos. Dado un conjunto $A$ y una familia $\Omega$ de subconjuntos de $A$, podemos definir una relación orden en $\Omega$ mediante la relación inclusión (con igualdad) $\subseteq$.

Algunos conceptos clave en el estudio de una relación de orden $\leq$ sobre un conjunto $A$ son los siguientes:

- El orden dado por $\leq$ se dice total si cualesquiera $x, y \in A$ están ordenados, es decir, $x \leq y$ o bien $y \leq x$. En caso contrario, el orden se dice parcial.

  El orden de los números reales es total mientras que el dado por la inclusión no tiene por qué serlo (basta pensar en subconjuntos de un conjunto dado que no están contenidos uno en el otro).

- Dado un conjunto $B \subseteq A$ y $x \in A$, se dice que $x$ es una cota superior de $B$ si $b \leq x$ para todo $b \in B$. Se dice que $x$ es el supremo de $B$ si $x$ es una cota superior de $B$ y, para cualquier otra cota superior $x'$ de $B$, se tiene que $x \leq x'$ (dicho supremo ha de ser único por la propiedad antisimétrica). Se dice que $x$ es el máximo de $B$ si $x$ es supremo de $B$ y además $x \in B$.

  De la misma forma podemos definir cota inferior, ínfimo y mínimo de $B \subseteq A$.

Estos conceptos son centrales en análisis. Por ejemplo, si tomamos el orden total de los números reales y el intervalo abierto $B = [0, 1)$, tenemos que el supremo e ínfimo de $B$ son 1 y 0, respectivamente. No obstante, 0 es el mínimo de $B$ mientras que $B$ no tiene máximo ($1 \notin B$).

Por otro lado, es usual utilizar la notación $x > y$ para indicar la negación de $x \leq y$, así como la notación $x < y$ para indicar que $x \leq y$ pero $x \neq y$, y su negación $x > y$. Podemos expresarlos (en términos de $\leq$ y $=$) usando notación lógica como

$$\begin{aligned} x > y &\Leftrightarrow \neg(x \leq y), \\ x < y &\Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (\neg(x = y)), \\ x \geq y &\Leftrightarrow \neg(x \leq y) \vee (x = y). \end{aligned}$$

## Relaciones de equivalencia

Si las relaciones de orden abstraen propiedades de números reales, las relaciones de equivalencia hacen lo propio con el concepto de clasificación. Todo el mundo usa relaciones de equivalencia constantemente de forma inconsciente. Por ejemplo, cuando decimos "tengo que ir a la tienda a comprar un melón", la palabra *melón* hace referencia a una clase concreta de plantas herbáceas de la familia de las cucurbitáceas. No estamos pensando en un melón concreto, pero tampoco saldríamos contentos del supermercado con un kiwi si hemos ido a comprar un melón. Más formalmente, en el conjunto de todas las frutas hemos establecido una clasificación: dos elementos están relacionados si, y sólo si, son iguales desde el punto de vista taxonómico. Si $A$ es el conjunto de todas las frutas del planeta, entonces hemos descompuesto

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n,$$

donde cada conjunto $A_i$ corresponde a una de las clases de frutas y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualesquiera $i, j$ (uno de esos conjuntos será el de los melones y otro el de los kiwis, y todo el mundo acepta que no hay frutas que sean a la vez kiwi y melón).

Podemos decir entonces que dos frutas $x, y \in A$ están relacionadas si, y sólo si, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x, y \in A_k$ y esta es una relación de equivalencia.

**Definición 4.2 (Partición).** *Una partición de un conjunto $A$ es una colección de subconjuntos de $A$ cuya unión es $A$ y tales que la intersección de cualesquiera dos de ellos es vacía.*

Vamos a probar que dar una relación de equivalencia es lo mismo que dar una partición, y sabemos que una partición es lo mismo que una clasificación. Por tanto, ¡dar una relación de equivalencia es dar un criterio de clasificación! En lo que sigue, vamos a adoptar la notación $\sim$ para hacer referencia a una relación de equivalencia.

- Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto $A$. Dado $x \in A$, definimos la clase de equivalencia de $x$ como

  $$[x] = \{y \in A : x \sim y\},$$

  es decir, el conjunto formado por los elementos que están relacionados con $x$. Al conjunto de clases de equivalencia se le llama conjunto cociente y se denota por

  $$A/\sim = \{[x] : x \in A\}.$$

  Aunque hay una clase de equivalencia por cada elemento de $A$, en realidad muchas de ellas coinciden ya que $[x] = [y]$ si $x \sim y$, mientras que $[x] \cap [y] = \emptyset$ si $x \not\sim y$ (¿por qué?). De esta manera, las clases de equivalencia (descartando las que se repitan) nos dan una partición del conjunto $A$.

- Si ahora tenemos una partición de $A$, entonces definimos una relación binaria $\sim$ en $A$ de forma que $x \sim y$ si, y sólo si, $x$ e $y$ pertenecen al mismo subconjunto de la partición. Se demuestra fácilmente que esta relación es de equivalencia y que el conjunto cociente está formado por los subconjuntos de la partición original.

Las relaciones de equivalencia son elementos muy apreciados en matemáticas ya que permiten meter en un mismo saco a todos los objetos que se comportan de la misma manera respecto de algún proceso o que comparten una propiedad que los caracteriza y tratarlos como una unidad. Ejemplos de relaciones de equivalencia aparecen en las clases de congruencia de números enteros, la igualdad de conjuntos, la complejidad algorítmica asintótica en informática (por ejemplo, la notación O grande), la orientación de un espacio vectorial o la equivalencia de matrices que estudiaremos en este curso.

# 5. Números reales y complejos

En las secciones anteriores ya hemos usado números para dar ejemplos de conjuntos y aplicaciones, pero ahora vamos a centrarnos más en detalle en las propiedades de dichos conjuntos numéricos, concretamente en los cuerpos de números reales y complejos, que jugarán un papel fundamental en la asignatura.

El conjunto de números más sencillo es el de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, pues estos números que sirven para contar, y con ellos se pueden hacer sin problemas operaciones de suma y producto (hay quienes también consideran el cero como número natural). Si intentamos hacer restas, entonces los números naturales son insuficientes y, para que no haya problemas, hay que completarlos con los números negativos, dando lugar al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Si queremos hacer divisiones entre números enteros (siendo el divisor distinto de cero), tenemos que completarlos con los números racionales $\mathbb{Q}$, que no son otra cosa que el conjunto de todas las fracciones. No obstante, aunque ya podemos hacer sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, los números racionales son insuficientes para describir la realidad física porque, en cierto sentido, no representan un continuo, sino que van dejando muchos huecos entre ellos. Además, ecuaciones tan sencillas como $x^2 = 2$ no tienen solución dentro de este conjunto. Por ello, se completan los números racionales con los números reales, que suelen representarse en una recta que ya no deja ningún hueco. El conjunto de números reales lo denotaremos por $\mathbb{R}$.

No vamos a entrar en detalle sobre cómo se construyen los números reales pues esto excede el ámbito de esta asignatura, sino que nos centraremos en las propiedades básicas que necesitaremos de ellos, que se resumen en las dos operaciones por excelencia: la suma y el producto. Se dice que éstas son leyes de composición interna, en tanto, dados dos números reales, proporcionan otro número real; en otras palabras, la suma y el producto son aplicaciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

**Suma de números reales.** La suma de dos números reales $x$ e $y$ es otro número real, que denotaremos por $x + y$ y que cumple las siguientes propiedades:

1. Asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Conmutativa: $x + y = y + x$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Existe un elemento neutro 0 tal que $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. Cualquier $x \in \mathbb{R}$ tiene un opuesto $-x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Un conjunto con una ley de composición interna cumpliendo las propiedades 1, 3 y 4 se llama un *grupo*. La estructura de grupo es una de los objetos algebraicos más elementales y aparecerá varias veces a lo largo de la asignatura. Si la propiedad conmutativa se cumple, entonces el grupo se llama *conmutativo* o *abeliano*. Veamos algunas propiedades de esta estructura de grupo:

- El elemento neutro es único.

*Demostración.* Supongamos que 0 y $0'$ son dos elementos neutros para la suma y probemos que $0 = 0'$. En efecto, tendremos que $0 = 0 + 0'$ ya que $0'$ es neutro y, como 0 también es neutro, se tiene que $0 + 0' = 0'$, con lo que $0 = 0'$. □

- El elemento opuesto de un elemento $x$ es único.

*Demostración.* Supongamos que $y$ y $z$ son dos elementos opuestos de $x$. Tenemos entonces que $y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z$. □

**Producto de números reales.** El producto de dos números reales $x$ e $y$ es otro número real, que denotaremos por $x \cdot y$ (o bien $xy$ si no hay confusión) y que cumple las siguientes propiedades:

5. Asociativa: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$.
6. Conmutativa: $x \cdot y = y \cdot x$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.
7. Existe un elemento neutro 1 tal que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
8. Cualquier $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, tiene un inverso $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.
9. Distributiva: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\mathbb{R}$ con el producto no tiene estructura de grupo ya que todos los elementos tienen inverso salvo el cero (esta es la principal diferencia con la suma). De hecho, no puede definirse un inverso de cero (esta es la razón de que bajo ningún concepto se pueda dividir por cero) como muestra la primera de las siguientes propiedades:

- $x \cdot 0 = 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

*Demostración.* Dado $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$. Sumando el opuesto de $x \cdot 0$ a ambos miembros de la igualdad, llegamos a que $x \cdot 0 = 0$. □

- Si $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen que $x \cdot y = 0$, entonces $x = 0$ ó $y = 0$.

*Demostración.* Si $x \cdot y = 0$ y $x \neq 0$, veamos que necesariamente $y = 0$. En efecto, multiplicando por $x^{-1}$, tenemos que $0 = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 1 \cdot y = y$, luego $y = 0$. □

- El elemento neutro (también llamado uno o unidad) es único.
- El elemento inverso de un número distinto de cero es único.

La demostración de los dos últimos puntos se deja como ejercicio. A un conjunto en el que están definidas dos operaciones que cumplen las propiedades 1–9 descritas anteriormente se le dice que tiene la estructura de *cuerpo* junto con dichas operaciones.

**El orden de los números reales.** Los números reales son un cuerpo en el que existe una relación de orden $\leq$ compatible con la estructura algebraica (los números complejos que definiremos más adelante no tienen esta propiedad). Cuando hablamos de orden compatible, estamos diciendo que se cumplen las siguientes propiedades:

10. Si $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen que $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$.
11. Si $x, y \in \mathbb{R}$ cumplen que $x > 0$ e $y > 0$, entonces $xy > 0$.
12. Si $x \in \mathbb{R}$ cumple que $x \leq 0$, entonces $-x \geq 0$.

Las propiedades 1–12 no son aún suficientes para caracterizar a los números reales ya que el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ también las satisface. Para determinar completamente al cuerpo $\mathbb{R}$ es necesaria una propiedad adicional que, de alguna forma, nos dice que $\mathbb{R}$ es el cuerpo más grande que cumple 1–12.

Esta propiedad es el conocido como *axioma del supremo*, que nos dice que cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo. En otras palabras, si podemos encontrar una cota superior, entonces también hay una cota superior más pequeña que el resto. Si pensamos por un momento en $\mathbb{Q}$, el subconjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ tiene cotas superiores (por ejemplo, 10 es cota superior de $A$), pero no tiene supremo ya que no existe un menor $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x \leq q$ para todo $x \in A$ (el papel de dicho supremo lo juega el número irracional $\sqrt{2}$).

**Los números complejos.** El resto de esta sección va a consistir en considerar otro cuerpo de suma importancia en la física y la matemática: el cuerpo de los números complejos. El conjunto de los números complejos no es otro que el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ formado por los pares ordenados de números reales, sólo que al par $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lo denotaremos por $a + ib$ cuando queramos verlo como número complejo. El motivo de esto es que para multiplicar números complejos vamos a tratar a la letra $i$ con la propiedad especial de que $i^2 = i \cdot i = -1$ (evidentemente no existe ningún número real tal que $i \cdot i = -1$, ¿por qué?). Además, esta forma de tratar los números complejos nos permite considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ya que cada $x \in \mathbb{R}$ lo identificamos con $x + 0i \in \mathbb{C}$.

Cuando tenemos un número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$, siendo $a, b, \in \mathbb{R}$, los números $a$ y $b$ se conocen como *parte real* y *parte imaginaria* de $z$. Así, escribiremos $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$, es decir, tenemos definidas dos aplicaciones $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ que nos devuelven las partes real e imaginaria de un número complejo, respectivamente.

Por otro lado, el número complejo $z = a + ib \in \mathbb{C}$ suele representarse en el plano como el punto de abscisa $a$ y ordenada $b$, punto que se llama *afijo* del número complejo. Al número real positivo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se le llama *módulo* del número complejo $z$ y puede entenderse como la distancia euclídea del afijo del punto al origen de coordenadas, concepto que quedará claro más adelante.

Vamos a definir ahora las operaciones con números complejos: la suma de números se hace componente a componente, mientras que el producto es un poco más complicado.

**Suma y producto de números complejos.** Dados dos números complejos $a + ib$ y

$c + id$, se define su suma y su producto como

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d),\\ (a + ib) \cdot (c + id) &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Utilizando las funciones parte real e imaginaria, la suma y el producto quedan determinadas también por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z + z') &= \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z'), & \mathrm{Re}(zz') &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z'),\\ \mathrm{Im}(z + z') &= \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z'), & \mathrm{Im}(zz') &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z').\end{aligned}$$

**Proposición 5.1.** *El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ tiene estructura de cuerpo junto con las operaciones suma y producto antes definidas.*

*Demostración.* Tenemos que probar que se cumplen las propiedades 1–9 que hemos visto para los números reales, sustituyendo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$. Las propiedades 1–4 son muy sencillas de probar ya que la suma se hace por componentes: sólo decir que el elemento neutro es $0 = 0 + 0i$ y el opuesto de $a + ib$ viene dado por $-a - ib$. Veamos las propiedades del producto:

- 5. Propiedad asociativa: dados $a + ib$, $c + id$ y $e + if$ números complejos,

$$\begin{aligned}[(a + ib)(c + id)](e + if) &= [(ac - bd) + i(ad + bc)](e + if)\\ &= (ace - bde - adf - bcf) + i(acf - bdf + ade + bce),\\ (a + ib)[(c + id)(e + if)] &= (a + ib)[(ce - df) + i(cf + de)]\\ &= (ace - adf - bcf - bde) + i(acf + ade + bce - bdf).\end{aligned}$$

- 6. Propiedad conmutativa: es inmediato que si permutamos $a$ y $c$, así como $b$ y $d$ se tiene el mismo resultado, ya que el producto en $\mathbb{R}$ es conmutativo.
- 7. El elemento neutro del producto es $1 = 1 + 0i$.
- 8. El elemento inverso de un elemento no nulo $a + ib \neq 0$ tiene que ser

$$(a + ib)^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

La demostración de 7 y 8 y de la propiedad distributiva se deja como ejercicio. □

Al calcular el elemento inverso de un número $z = a + ib$, hemos multiplicado por el número $a - ib$ para eliminar la aparición de $i$ en el denominador. Al este número complejo que tiene la misma parte real que $z$ pero parte imaginaria opuesta se le llama *conjugado* de $z$ y suele denotarse por $\bar{z}$. Destacamos ahora algunas propiedades importantes de la conjugación:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$.
4. $z = \overline{z}$ si, y sólo si, $z \in \mathbb{R}$.

Las propiedades 1 y 2 anteriores suelen resumirse diciendo que la conjugación es un *automorfismo* de cuerpos.

# 6. Matrices y determinantes

En lo que sigue supondremos que $K$ es un cuerpo, aunque a efectos prácticos puede pensarse que $K$ denota al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o al de los números complejos $\mathbb{C}$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, llamaremos *matriz* de orden $m \times n$ sobre $K$ a cualquier disposición de elementos de $K$ en $m$ filas y $n$ columnas. Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre $K$ lo denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2/5 \\ -1/3 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} 2 & -i & 3i-1 & 0 \\ -i & 1/2-2i & 1 & -1+i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{C}).$$

En general, denotaremos las matrices mediante letras mayúsculas. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, llamaremos elemento $(i, j)$ al que ocupa la fila $i$ y la columna $j$, y normalmente lo denotaremos por $a_{ij}$ usando la letra minúscula correspondiente.

Algunas matrices merecen una distinción especial:

- Las matrices que tienen el mismo número de filas que de columnas se llaman *matrices cuadradas*. Al conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$ también se le denota por $\mathcal{M}_n(K)$. Se define además la diagonal principal de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ como el lugar que ocupan los elementos de la forma $a_{ii}$.
- Las matrices cuadradas cuyos elementos que no están en la diagonal principal son todos nulos se llaman matrices diagonales. Un caso especial es la matriz cuadrada de orden $n$ cuyos elementos de la diagonal son todos iguales a 1 mientras que el resto son iguales a 0; esta matriz se conoce como matriz identidad de orden $n$ y se denota por $I_n$.
- Otra matriz especial es la matriz cero $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ que tiene todos sus elementos iguales a cero.

## Operaciones con matrices

**Definición 6.1 (Suma de matrices).** *Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se define su suma $A+B$ como otra matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ verificando*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}.$$

Para que la suma de dos matrices esté definida, éstas han de tener el mismo orden. La definición anterior suele expresarse diciendo "para sumar dos matrices hay que sumarlas elemento a elemento". Por tanto, se heredan las propiedades de la suma del cuerpo, es decir $(\mathcal{M}_{m\times n}(K), +)$ es un grupo abeliano para $+$:

1. Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$ para cualesquiera $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
2. Conmutativa: $A+B = B+A$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
3. La matriz cero $0 \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es el elemento neutro, es decir, $A+0 = 0+A = A$ para cualquier $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
4. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, su matriz opuesta $-A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, que se obtiene al hacer el opuesto de cada uno de sus elementos, es el elemento opuesto de $A$, es decir, $A+(-A) = (-A)+A = 0$.

Otra operación que se hace *elemento a elemento* es el producto por escalares, que consiste en multiplicar todos los elementos de la matriz por un número dado.

**Definición 6.2 (Producto por escalares).** *Dados $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda \in K$, se define el producto de $\lambda$ por $A$, que denotamos por $\lambda A$, como la matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ verificando*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}.$$

Las siguientes propiedades son sencillas de demostrar:

5. Distributiva: $(\lambda_1+\lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.
6. Distributiva: $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ para todo $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda \in K$.
7. Pseudoasociativa: $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$ para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.
8. Unimodular: $1 \cdot A = A$ para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

Las propiedades 1–8 anteriores suelen resumirse diciendo que $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ tiene la estructura de *espacio vectorial* sobre el cuerpo $K$. El estudio de esta estructura será precisamente el objetivo del siguiente tema.

El siguiente paso será definir el producto de matrices, que ya no será *elemento a elemento* (la razón es que las propiedades del producto elemento a elemento no son satisfactorias como quedará demostrado a lo largo de la asignatura) sino que sigue una regla mucho más enrevesada.

**Definición 6.3 (Producto de matrices).** *Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$, se define el producto $AB$ o $A \cdot B$ como la matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times p}(K)$ verificando*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,p\}.$$

Las matrices que se multiplican no tienen porqué ser del mismo orden (simplemente el número de columnas de la primera tiene que ser igual al número de filas de la segunda). La sumatoria de la definición nos dice que para hallar el elemento $(i,j)$ de la matriz producto se toma la fila $i$-ésima de la primera matriz y la columna $j$-ésima de la segunda y se calcula la suma de los productos de los correspondientes elementos de una y otra (para que esta suma esté bien definida se ha de cumplir la hipótesis sobre los órdenes). Tenemos entonces las siguientes propiedades:

9. Asociativa: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ para cualesquiera $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$ y $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(K)$.

   *Demostración.* Como tanto un producto como otro tienen sentido, llamemos $D$ al resultado del primer miembro y $E$ al resultado del segundo. Es inmediato que $D, E \in \mathcal{M}_{m\times q}$ y, además, dados $i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,q\}$,

   $$\begin{aligned} d_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{p}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k\alpha}\right)\cdot c_{\alpha j}\right] &= \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k\alpha}c_{\alpha j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{p} a_{ik}b_{k\alpha}c_{\alpha j} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[a_{ik}\cdot\left(\sum_{\alpha=1}^{p} b_{k\alpha}c_{\alpha j}\right)\right] = e_{ij}, \end{aligned}$$

   lo que prueba la igualdad buscada. □

10. La matrices identidad actúan como elemento neutro: $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$ para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

    *Demostración.* La matriz identidad puede expresarse como $I_n = \{\delta_{ij}\}$, siendo $\delta$ la función delta de Kronecker definida por

    $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

    Si tomamos $B = I_m \cdot A$ y $C = A \cdot I_n$, entonces

    $$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij}, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij},$$

    ya que en el primer caso $\delta_{ik} = 0$ si $k \neq i$ y en el segundo $\delta_{kj} = 0$ si $k \neq j$. Hemos demostrado como queríamos que $A = B = C$. □

11. Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B, C \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$.

    *Demostración.* Ambos miembros tienen sentido y son matrices en $\mathcal{M}_{m\times p}(K)$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, p\}$, se tiene que

    $$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

    lo que nos da la igualdad de matrices. □

Lamentablemente, el producto de matrices no es conmutativo, como muestra el siguiente ejemplo con matrices cuadradas de orden 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Además, no todo elemento distinto de cero tiene inverso. Por ejemplo, la primera matriz de orden 2 en (1) no puede multiplicarse por ninguna otra matriz de orden 2 para obtener la identidad $I_2$ ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto $\mathcal{M}_n(K)$ junto con la suma y producto de matrices no tiene estructura de cuerpo (falla la conmutatividad del producto y la existencia de inverso como acabamos de ver), aunque se dice que tiene estructura de *anillo no conmutativo* respecto de estas dos operaciones ya que cumple las propiedades 1–4 y 9–11.

**Matriz traspuesta.** Una forma muy sencilla de transformar una matriz es intercambiar filas y columnas, y a esta operación se le llama trasposición de matrices. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, entonces denotaremos a su matriz traspuesta por $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}(K)$.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Algunas propiedades, cuya demostración se deja como ejercicio, son las siguientes:

1. $(A + \lambda B)^T = A^T + \lambda B^T$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $\lambda \in K$.
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ para cualesquiera $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(K)$.

## Operaciones elementales por filas

Acabamos de ver que no todas las matrices tienen inversa. No obstante, no todas las matrices "dejan de tener inversa" de la misma manera, pues internamente en la matriz

ocurren situaciones distintas con respecto a la inversión. El concepto de rango nos dirá cuánto dista la matriz de ser regular.

**Definición 6.4.** *Llamaremos operación elemental por filas en una matriz a cualquiera de los siguientes procedimientos:*

*(i) Permutar dos filas cualesquiera.*

*(ii) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.*

*(iii) Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar.*

*Dadas dos matrices $A, B$ de igual orden, diremos que son equivalentes por filas cuando pueda pasarse de $A$ a $B$ mediante operaciones elementales por filas. Lo denotaremos por $A \sim_f B$.*

La relación "ser equivalente por filas" es una relación de equivalencia, con lo que estamos dando un criterio de clasificación de matrices. En lo que queda de este capítulo, veremos que las operaciones elementales por filas son tremendamente útiles para analizar propiedades de las matrices, por lo que merece la pena ahondar en la comprensión de esta relación. Concretamente, buscamos llegar a transformar una matriz en otra más sencilla que nos dé información sobre la matriz original, así como un criterio más sencillo para decidir si dos matrices son equivalentes por filas.

Para fijar notación, diremos que una fila de una matriz es *nula* cuando todos sus elementos sean cero; si una fila es no nula, al primer elemento distinto de cero por la izquierda lo llamaremos *elemento pivote* de la fila.

**Definición 6.5.** *Diremos que una matriz es escalonada cuando se verifiquen las siguientes condiciones.*

- *Las filas de debajo de una fila nula son también nulas.*
- *Dadas dos filas no nulas, el elemento pivote de la que está por debajo se encuentra más a la derecha que el elemento pivote de la que está más arriba.*

Por ejemplo, la primera de las siguientes matrices $4 \times 4$ es escalonada (los elementos pivote están recuadrados) mientras que las otras dos no lo son (¿qué falla?):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1/3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2/5 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Algoritmo de escalonamiento.** Es fácil darse cuenta de que toda matriz es equivalente por filas a una matriz escalonada. Para ello, basta seguir el procedimiento secuencial que describimos a continuación, comenzando por $i = j = 1$:

(1) Si $a_{ij} \neq 0$, dividimos la fila $i$ por $a_{ij}$ para conseguir un uno en esta posición y lo usamos para hacer ceros debajo de él. Tenemos dos posibilidades:

(1.1) Si $i = m$ ó $j = n$, el algoritmo termina aquí.

(1.2) En caso contrario, repetimos el algoritmo sobre el elemento $a_{i+1,j+1}$.

(2) Si $a_{ij} = 0$ y existe algún elemento no nulo debajo de él, entonces permutamos las fila $i$ y la fila de dicho elemento para conseguir que $a_{ij} \neq 0$ y aplicamos el paso (1).

(3) Si $a_{ij} = 0$ y no hay elementos no nulos debajo de éste, tenemos dos posibilidades:

(3.1) Si $j = n$, el algoritmo termina aquí.

(3.2) En caso contrario, repetimos el algoritmo sobre el elemento $a_{i,j+1}$.

A partir de una misma matriz $A$ pueden obtenerse mediante operaciones por filas distintas matrices escalonadas, pero todas tienen el mismo número de filas no nulas. A este número de filas no nulas lo llamaremos *rango* de $A$ y lo denotaremos por rango$(A)$. En este momento no vamos a demostrar este hecho pues necesitaríamos más herramientas, pero a lo largo de la asignatura se verá el motivo: el rango de una matriz es el número de filas linealmente independientes de la matriz original.

**Ejemplo 6.6.** Consideremos la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{C})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & -1+2i & -2i & 1 \\ 2+2i & 1+3i & 2i & -3+i & -1-i \\ -6 & -6-3i & -2-i & -1-7i & 3-2i \\ 4 & 4+2i & -1+i & 3+i & 2i \end{pmatrix}.$$

Para calcular su rango, vamos a hacer operaciones elementales por filas para escalonar la matriz. En lo sucesivo utilizaremos la siguiente notación simplificada para hacer referencia a dichas operaciones:

| | |
|---|---|
| $F_i \leftrightarrow F_j$ | Permutar la fila $i$ y la fila $j$ |
| $F_i \to \lambda F_i$ | Multiplicar la fila $i$ por el escalar $\lambda$ |
| $F_i \to F_i + \lambda F_j$ | Sumar a la fila $i$ la fila $j$ multiplicada por $\lambda$ |

Volviendo al problema de la matriz $A$, comenzamos haciendo ceros debajo del elemento que ocupa la posición $(1,1)$, mediante las operaciones indicadas a la derecha:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+i & -1+2i & -2i & 1 \\ 2+2i & 1+3i & 2i & -3+i & -1-i \\ -6 & -6-3i & -2-i & -1-7i & 3-2i \\ 4 & 4+2i & -1+i & 3+i & 2i \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} F_2 \to F_2 - (1+i)F_1 \\ F_3 \to F_3 + 3F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos la siguiente matriz y usamos el elemento $3+i$ en la posición $(2,3)$ para

hacer más ceros debajo de él, con las operaciones indicadas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2+i & -1+2i & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 3+i & -5+3i & -2-2i \\ 0 & 0 & -5+5i & -1-13i & 6-2i \\ 0 & 0 & 1-3i & 3+5i & -2+2i \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_3 \to F_3 + \frac{5-5i}{3+i} F_2 \\ F_4 \to F_4 - \frac{1-3i}{3+i} F_2 \end{bmatrix}$$

Hemos llegado así a la siguiente matriz escalonada con sólo dos filas no nulas (los pivotes están recuadrados):

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 2+i & -1+2i & -2i & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3+i} & -5+3i & -2-2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como hay un total de dos pivotes, deducimos que $\text{rango}(A) = 2$. ▼

El siguiente resultado nos permite caracterizar cuándo una matriz tiene inversa. Su demostración también quedará clara cuando se estudien las matrices como aplicaciones lineales a lo largo de la asignatura.

**Proposición 6.7.** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ es regular si, y sólo si, es equivalente por filas a la matriz identidad. Esto ocurre si, y sólo si, $m = n$ y $\text{rango}(A) = n$.*

Este resultado se puede adaptar al proceso de escalonamiento visto anteriormente para calcular la invesa de una forma bastante sencilla.

**Método de Gauss para el cálculo de la inversa.** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, podemos calcular su inversa siguiendo este método:

(1) Consideremos la matriz resultante de yuxtaponer la matriz identidad $I_n$ a la matriz $A$ por la derecha, esto es, la matriz $(A|I_n)$, que tendrá orden $n \times 2n$.

(2) Realizar operaciones por filas a la matriz $(A|I_n)$ hasta que la matriz $A$ se convierta en la identidad, es decir, la matriz $(A|I_n)$ se transforma por filas en $(I_n|B)$ para cierta matriz $B$.

(3) La matriz inversa de $A$ es $B$.

Si $\text{rango}(A) \neq n$, entonces el paso (2) no podrá llevarse a cabo, pero deducimos de la proposición 6.7 que en tal caso $A$ no tiene inversa.

**Ejemplo 6.8.** Vamos a estudiar si la siguiente matriz tiene inversa y en caso de que tenga calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & -1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para ello, aplicamos operaciones elementales por filas a la matriz $(A|I_4)$, operaciones que indicamos a la derecha de la matriz correspondiente:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left[\begin{array}{l} F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \to F_2 + \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 \to F_3 + 4F_1 \\ F_4 \to F_4 - 3F_1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/4 & -1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 3 & 1/2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -7/2 & -3 & -3/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left[\begin{array}{l} F_2 \to 2F_2 \\ F_3 \to F_3 + \frac{7}{2}F_2 \\ F_4 \to F_4 - 4F_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -2 & 1/2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 47/4 & -13/2 & 15/4 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -27/2 & 5 & -7/2 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left[\begin{array}{l} F_3 \to \frac{4}{47}F_3 \\ F_4 \to F_4 + \frac{27}{2}F_3 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26/47 & 15/47 & 28/47 & 4/47 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -116/47 & 38/47 & 2/47 & 54/47 & 1 \end{array}\right).$$

Como cada fila tiene elemento pivote, deducimos que la matriz $A$ tiene rango 4 y, por tanto, tiene inversa. Terminamos de convertirla en la identidad haciendo ceros por encima de su diagonal principal (comenzamos haciendo las operaciones elementales $F_4 \to \frac{-47}{116}F_4$, $F_3 \to F_3 + \frac{26}{47}F_4$ y $F_2 \to F_2 + 2F_4$):

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 0 & -9/58 & 57/29 & -27/29 & -47/58 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/29 & 17/29 & -5/29 & -13/58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -19/58 & -1/58 & -27/58 & -47/116 \end{array}\right) \quad \left[\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - \frac{5}{2}F_3 \\ F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_3 \\ F_1 \to F_1 + F_2 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/29 & 6/29 & -12/29 & -4/29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/29 & 17/29 & -5/29 & -13/58 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -19/58 & -1/58 & -27/58 & -47/116 \end{array}\right).$$

Llegamos finalmente a que

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} -2/29 & 6/29 & -12/29 & -4/29 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/4 \\ 4/29 & 17/29 & -5/29 & -13/58 \\ -19/58 & -1/58 & -27/58 & -47/116 \end{array}\right) = \frac{1}{116}\left(\begin{array}{cccc} -8 & 24 & -48 & -16 \\ -58 & 58 & -58 & -29 \\ 16 & 68 & -20 & -26 \\ -38 & -2 & -54 & -47 \end{array}\right).$$

Además, este resultado puede comprobarse sin más que multiplicar $A \cdot A^{-1}$ y ver que el resultado es la matriz identidad $I_4$. ▼

## Determinantes

El determinante es una operación con los elementos de una matriz cuadrada que produce un número. Para matrices pequeñas, este número es fácil de calcular y constituye una herramienta excelente para tratar algunos problemas matriciales, aunque para matrices más grandes el cálculo se hace muy largo.

Comenzamos definiendo el determinante de una matriz $A \in \mathcal{M}_2(K)$ como

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

es decir, al producto de los elementos de la diagonal principal se le resta el producto de los otros dos elementos. Para hacer el determinante de una matriz de orden $n$ nos sirve la siguiente definición recursiva: elegimos la fila $i$ de la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y calculamos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

siendo $A_{ij}$ la matriz que se obtiene de $A$ eliminando la fila $i$ y la columna $j$. Por tanto, cada determinante de orden $n$ se reduce a $n$ determinantes de orden $n-1$, que a su vez se reducen a determinantes de orden $n-2$, etc. A esta forma de cálculo se le llama *desarrollar el determinante por la fila $i$-ésima*. También podemos desarrollar por la columna $j$-ésima como

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Vamos a ver cómo aplicar esta fórmula al cálculo del determinante de $A \in \mathcal{M}_3(K)$ desarrollándolo por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

El determinante no depende de qué fila o columna se utilice para desarrollarlo.

De hecho, el determinante de una matriz es un tensor antisimétrico aplicado a los vectores columna de la matriz, y se estudiará de esta forma en el tema de la asignatura dedicado a tensores. El hecho de que no importa la fila o columna por la que se desarrolle el determinante junto con las propiedades que listamos a continuación quedarán claros cuando se estudie el determinante como tensor antisimétrico.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si se permutan dos filas o columnas de $A$, su determinante cambia de signo.
2. Si a una fila de $A$ se le suma otra multiplicada por un elemento $\lambda \in K$, el determinante de $A$ no cambia.
3. Si a una columna de $A$ se le suma otra columna multiplicada por $\lambda \in K$, el determinante de $A$ no cambia.
4. Si multiplicamos por $\lambda \in K$ una fila o columna de $A$, el determinante de $A$ quedará multiplicado por $\lambda$.
5. Si $A$ tiene dos filas o columnas iguales, entonces $\det(A) = 0$. Si $A$ tiene una fila o columna nula entonces $\det(A) = 0$.
6. $A$ tiene inversa si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$. Además, si $A$ tiene inversa, entonces $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
7. $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$ para cualesquiera matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$.
8. $\det(A) = \det(A^T)$.

Las cuatro primeras propiedades nos dicen que podemos hacer operaciones por filas (o por columnas) en una matriz sin que su determinante cambie, excepto si multiplicamos una fila o columna por un escalar. Por lo tanto, conviene simplificar primero la matriz haciendo el mayor número posible de ceros para calcular su determinante.

**Cálculo del rango usando determinantes.** El rango de una matriz se puede caracterizar en términos de determinantes, para lo que conviene usar el concepto de submatriz. Una submatriz de $A$ es una matriz que se obtiene al eliminar algunas filas y columnas de $A$. Entonces, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 6.9.** *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$, el rango de $A$ es la mayor dimensión de una submatriz cuadrada de $A$ con determinante distinto de cero.*

**Observación 6.10.** En principio, esta regla puede ser difícil de aplicar: por ejemplo, una matriz $A \in \mathcal{M}_{10\times 15}(K)$ tiene 1051050 submatrices cuadradas de orden 3 y 772200 de orden 7... ¡Imaginemos que tenemos que probarlas todas para ver si alguna tiene determinante no nulo!

El truco que suele usarse el el conocido como *orlar* las submatrices. Orlar una submatriz de $A$ orden $k$ es obtener una de orden $k+1$ añadiéndole una fila y una columna de la matriz original. Si una submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ de orden $k$ tiene determinante distinto de cero y todas las matrices que se obtienen de ella al orlarla tienen determinante cero, entonces $\text{rango}(A) = k$. En otras palabras, sólo tenemos que probar con las matrices orladas.

**Ejemplo 6.11.** Vamos a calcular el rango de la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{C})$ del ejemplo 6.6 usando determinantes. Comenzamos encontrando una submatriz de orden 2

con determinante distinto de cero:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 2+i & -1+2i & -2i & \boxed{1} \\ 2+2i & 1+3i & 2i & -3+i & -1-i \\ -6 & -6-3i & -2-i & -1-7i & 3-2i \\ \boxed{4} & 4+2i & -1+i & 3+i & \boxed{2i} \end{pmatrix} \longrightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} = -4+4i \neq 0.$$

Esto nos dice que rango$(A) \geq 2$. Ahora tenemos que orlar esta submatriz $2 \times 2$ a una $3 \times 3$ añadiéndole una fila y una columna de $A$: hay 6 posibilidades, dos posibles filas (la 2 y la 3) y tres posibles columnas (la 2, la 3 y la 4). Vamos a hacer una tabla con las posibilidades:

| Fila añadida | Columna añadida | Submatriz $3 \times 3$ obtenida al orlar | Determinante |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | $\begin{matrix} 2 & 2+i & 1 \\ 2+2i & 1+3i & -1-i \\ 4 & 4+2i & 2i \end{matrix}$ | 0 |
| 2 | 3 | $\begin{matrix} 2 & -1+2i & 1 \\ 2+2i & 2i & -1-i \\ 4 & -1+i & 2i \end{matrix}$ | 0 |
| 2 | 4 | $\begin{matrix} 2 & -2i & 1 \\ 2+2i & -3+i & -1-i \\ 4 & 3+i & 2i \end{matrix}$ | 0 |
| 3 | 2 | $\begin{matrix} 2 & 2+i & 1 \\ -6 & -6-3i & 3-2i \\ 4 & 4+2i & 2i \end{matrix}$ | 0 |
| 3 | 3 | $\begin{matrix} 2 & -1+2i & 1 \\ -6 & -2-i & 3-2i \\ 4 & -1+i & 2i \end{matrix}$ | 0 |
| 3 | 4 | $\begin{matrix} 2 & -2i & 1 \\ -6 & -1-7i & 3-2i \\ 4 & 3+i & 2i \end{matrix}$ | 0 |

Como todas las matrices orladas tienen determinante cero[2], llegamos a la conclusión de que rango$(A) = 2$. ▼

**Cálculo de la inversa usando determinantes.** Una de las propiedades más interesantes de los determinantes es el hecho de que una matriz es regular (tiene inversa) si, y sólo si, su determinante es distinto de cero. Además, podemos usar los determinantes para calcular la inversa de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ de la siguiente forma:

(1) Calculamos $\det(A)$: si es cero, entonces la matriz no tiene inversa; si es distinto de cero, entonces sí tiene inversa y pasamos al punto (2).

[2]Si hubiéramos tenido que probar todas las submatrices $3 \times 3$ de $A$, habríamos tenido que hacer 40 determinantes de orden 3 en lugar de los 6 que hemos hecho.

(2) Si denotamos por $A_{ij}$ la matriz que se obtiene de $A$ al eliminar la fila $i$ y la columna $j$, se define el adjunto del elemento $(i,j)$ como el escalar $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. Formamos la matriz adjunta $\mathrm{adj}(A)$ cuyo elemento $(i,j)$ es el adjunto $\alpha_{ij}$.

(3) Finalmente, calculamos la inversa de $A$ como la traspuesta de la adjunta dividida entre el determinante, es decir,

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)^T}{\det(A)}.$$

**Ejemplo 6.12.** Vamos a calcular la inversa de la matriz $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ del ejemplo 6.8. Comenzamos calculando su determinante desarrollándolo por la primera fila:

$$\begin{aligned}\det(A) &= 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \\ &= 2\cdot 2 + 2\cdot(-29/2) + 1\cdot(-4) = -29.\end{aligned}$$

Como $\det(A) = -29 \neq 0$, deducimos que $A$ es regular. Para calcular su inversa, tenemos que calcular los adjuntos de sus elementos:

$$\alpha_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 2, \qquad \alpha_{12} = -\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{29}{2},$$

$$\alpha_{13} = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -4, \qquad \alpha_{14} = -\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{19}{2},$$

$$\alpha_{21} = -\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -6, \qquad \alpha_{22} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{-29}{2},$$

$$\alpha_{23} = -\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = -17, \qquad \alpha_{24} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{31} = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 12, \qquad \alpha_{32} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{29}{2},$$

$$\alpha_{33} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 5, \qquad \alpha_{34} = -\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{27}{2},$$

$$\alpha_{41} = -\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 4, \qquad \alpha_{42} = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{29}{4},$$

$$\alpha_{43} = -\det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{13}{2}, \qquad \alpha_{44} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -4 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{47}{4}.$$

Por consiguiente, la matriz adjunta y su traspuesta están dadas por

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{29}{2} & -4 & \frac{19}{2} \\ -6 & -\frac{29}{2} & -17 & \frac{1}{2} \\ 12 & \frac{29}{2} & 5 & \frac{27}{2} \\ 4 & \frac{29}{4} & \frac{13}{2} & \frac{47}{4} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(A)^T = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 4 \\ \frac{29}{2} & -\frac{29}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{4} \\ -4 & -17 & 5 & \frac{13}{2} \\ \frac{19}{2} & \frac{1}{2} & \frac{27}{2} & \frac{47}{4} \end{pmatrix},$$

y basta con dividir por el determinante para obtener la inversa de $A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-29}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 12 & 4 \\ \frac{29}{2} & -\frac{29}{2} & \frac{29}{2} & \frac{29}{4} \\ -4 & -17 & 5 & \frac{13}{2} \\ \frac{19}{2} & \frac{1}{2} & \frac{27}{2} & \frac{47}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{116}\begin{pmatrix} -8 & 24 & -48 & -16 \\ -58 & 58 & -58 & -29 \\ 16 & 68 & -20 & -26 \\ -38 & -2 & -54 & -47 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que este proceso es mucho más tedioso que el del ejemplo 6.8. ▼

# 7. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

donde los números $a_{ij}$ y $b_i$ son elementos de $K$ y los $x_i$ juegan el papel de incógnitas. El sistema se puede expresar equivalentemente como la identidad matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

y, si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

entonces resolver el sistema equivale a encontrar las posibles matrices columna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ tales que $AX = B$. A la matriz $A$ se llama matriz de coeficientes y a $B$ matriz de términos independientes.

En consecuencia, el sistema quedará determinado por la matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}$, llamada matriz ampliada del sistema, dada por

$$M = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Si denotamos por $S_M$ el conjunto de las soluciones del sistema dado por $M$, es decir,

$$S_M = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K) : AX = B\},$$

entonces se nos presentan varias posibilidades:

- Si $S_M = \emptyset$, el sistema no tiene soluciones y diremos que es incompatible (S.I.).
- Si $S_M \neq \emptyset$, el sistema tiene soluciones y diremos que es compatible.
  - Si la solución es única, es compatible determinado (S.C.D.).
  - Si la solución no es única, es compatible indeterminado (S.C.I.).

La táctica que usaremos para resolver un sistema es el hecho de que hacer operaciones elementales por filas en la matriz ampliada $M$ no altera el conjunto de soluciones $S_M$. Esto podemos codificarlo de la siguiente forma:

**Proposición 7.1.** *Si $M \sim_f N$, entonces $S_M = S_N$.*

A raíz de este resultado, lo primero que podemos hacer es hacer operaciones por filas en la matriz $M = (A|B)$ hasta obtener una matriz escalonada $(\widetilde{A}|\widetilde{B})$. Esto nos permite discutir el número de soluciones:

- Si hay elementos principales en $\widetilde{B}$ entonces el sistema es incompatible ($S_M = \emptyset$) puesto que la ecuación a que se refiere esa fila es de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0.$$

- Si no hay elementos principales en $\widetilde{B}$, entonces el sistema es compatible.
  - Si el número de elementos principales en $A$ es el mismo que el número de incógnitas, es decir, podemos conseguir que $\widetilde{A}$ sea la identidad (más algunas filas nulas), entonces el sistema es compatible determinado. En este caso, las incógnitas se despejan fácilmente.
  - Si el número de elementos principales en $\widetilde{A}$ es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Las incógnitas (columnas) que no tengan pivote se toman como parámetros y se despejan las incógnitas con pivote como expresión de estos parámetros.

Observemos que las filas nulas de $(\widetilde{A}|\widetilde{B})$ nos dicen que las ecuaciones de las que provenían esas filas no aportan información alguna ya que se deducen de las otras. En el caso de sistema compatible indeterminado, al número de parámetros se le llama grado de libertad del sistema ya que para cada conjunto de valores reales asignado los parámetros se obtiene una solución del sistema.

Otra forma de enfocar esta discusión de casos es calculando los rangos de $A$ y $M$, y comparándolos con el número de incógnitas (columnas de $A$):

**Proposición 7.2 (Rouché-Frobenius).** *En las condiciones anteriores:*

- *Si* $\text{rango}(A) = \text{rango}(M)$ *coinciden con el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible determinado.*
- *Si* $\text{rango}(A) = \text{rango}(M)$ *son menores que el número de incógnitas, entonces el sistema es compatible indeterminado y el número de grados de libertad es la diferencia entre estos dos números.*
- *Si* $\text{rango}(A) < \text{rango}(M)$*, entonces el sistema es incompatible.*

**Ejemplo 7.3.** (*Sistema incompatible*) Consideremos el siguiente sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, que expresamos equivalentemente en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{r} (3i-1)z+(-2i+3)w=1 \\ (-4+2i)z+(5+i)w=1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3i-1 & -2i+3 & 1 \\ -4+2i & 5+i & 1 \end{array}\right).$$

Si usamos $3i-1$ como pivote para hacer un cero debajo de él, estamos haciendo la operación elemental $F_2 \to F_2 + \frac{4-2i}{3i-1}F_1$, cuyo resultado es el sistema equivalente

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{3i-1} & -2i+3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-i} \end{array}\right).$$

La matriz ampliada tiene dos pivotes (los elementos recuadrados), pero uno de ellos en la columna de términos independientes, luego el rango de la ampliada es 2 y el de la de coeficientes 1. Se trata de un sistema incompatible. ▼

**Ejemplo 7.4.** (*Sistema compatible determinado*) Consideremos el siguiente sistema con cuatro ecuaciones y tres incógnitas, que escribimos también en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=2 \\ x-3y-2z=-4 \\ x-3y+z=-1 \\ x-y+3z=3 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Haciendo las operaciones elementales $F_1 \to F_1 - 2F_2$, $F_3 \to F_3 - F_2$ y $F_4 \to F_4 - F_2$, llegamos al sistema equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 5 & 10 \\ 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ \boxed{1} & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

donde en el último paso hemos hecho $F_1 \to \frac{1}{5}F_1$, $F_3 \to \frac{1}{3}F_3$ y después $F_4 \to F_4 - 2F_1 - 3F_3$. Salvo permutar las filas tenemos una matriz de coeficientes escalonada y cada columna tiene pivote, luego es un sistema compatible determinado. Además, la tercera ecuación nos dice que $z = 1$. Usando que $z = 1$ en la primera tenemos que $y = 1$ y, usando que $y = z = 1$ en la segunda, obtenemos que $x = 1$. Por tanto, la única solución es $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. ▼

**Ejemplo 7.5.** (*Sistema compatible indeterminado*) Consideremos el siguiente sistema con cuatro ecuaciones y cinco incógnitas $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, escrito en forma matricial:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1+i & -1+i & -i & 1 & -1+2i \\ 1+i & i & 2 & 3+2i & -3+i & i \\ 2+i & \frac{1}{2}+\frac{3i}{2} & -i & 3-i & -\frac{1}{2} & -1+i \\ -3-i & -1-2i & -1+5i & -8+4i & 1-8i & 0 \end{array}\right).$$

Haciendo las operaciones elementales por filas $F_2 \to F_2 - \frac{1+i}{2}F_1$, $F_3 \to F_3 - \frac{2+i}{2}F_1$ y $F_4 \to F_4 + \frac{3+i}{2}F_1$, llegamos al siguiente sistema equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1+i & -1+i & -i & 1 & -1+2i \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2}+\frac{5i}{2} & -\frac{7}{2}+\frac{i}{2} & \frac{3}{2}+\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}-\frac{3i}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}-\frac{i}{2} & 1-\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & -3+6i & -\frac{15}{2}+\frac{5i}{2} & \frac{5}{2}-\frac{15i}{2} & -\frac{5}{2}+\frac{5i}{2} \end{array}\right).$$

Haciendo ahora las operaciones $F_3 \to F_3 - \frac{1-i}{2}F_2$ y $F_4 \to F_4 + (1-2i)F_2$, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1+i & -1+i & -i & 1 & -1+2i \\ 0 & 0 & \boxed{3} & \frac{5}{2}+\frac{5i}{2} & -\frac{7}{2}+\frac{i}{2} & \frac{3}{2}+\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{5i}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema está en forma escalonada y tiene tres elementos pivotes (marcados con un recuadro). Deducimos que el sistema es compatible determinado con 2 grados de libertad. Como $x_2$ y $x_4$ no tienen pivote, podemos tomarlos como parámetros, esto es, $x_2 = \lambda$ y $x_4 = \mu$. Además, de la tercera ecuación se deduce que $x_5 = 0$. Es fácil despejar los valores de $x_1$ y $x_3$ con todos estos datos y tenemos que

$$x_3 = \frac{3+i}{6} - \frac{5+5i}{6}\mu, \qquad x_1 = \frac{-1+5i}{6} - \frac{1+i}{2}\lambda - \frac{5-3i}{6}\mu.$$

Por tanto las soluciones son

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{-1+5i}{6} - \frac{1+i}{2}\lambda - \frac{5-3i}{6}\mu, \lambda, \frac{3+i}{6} - \frac{5+5i}{6}\mu, \mu, 0\right),$$

para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. ▼

## Resolución de sistemas usando determinantes: regla de Cramer

Hemos visto que un sistema de ecuaciones puede escribirse como $AX = B$, donde $A$ es la matriz de coeficientes, $X$ las incógnitas y $B$ la matriz de términos independientes. Si $A$ es una matriz cuadrada y además es regular, entonces podemos multiplicar por $A^{-1}$ para obtener $X = A^{-1}B$, lo que nos dice que el sistema es compatible determinado. No obstante, podemos saber si $A$ tiene inversa calculando su determinante, lo que da lugar al siguiente método para resolver sistemas compatibles determinados cuando la matriz de coeficientes es cuadrada:

(1) Calcular $\det(A)$. Si es cero, entonces el sistema es compatible indeterminado o incompatible; si es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado y pasamos al siguiente paso.

(2) Podemos despejar
$$x_i = \frac{\det(C_i)}{\det(A)}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$
donde $C_i$ es la matriz que se obtiene al sustituir la columna $i$-ésima de $A$ por la matriz columna $B$.

A este método se le conoce como Regla de Cramer.

**Ejemplo 7.6.** Consideremos el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas
$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z + t = 0 \\ x - 3y - 2z = 1 \\ -2x - 3y + z - t = -1 \\ x - y + 3z - t = 5 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right).$$
La matriz de coeficientes tiene determinante
$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 54 \neq 0.$$
Por lo tanto, es un sistema compatible determinado y tenemos que
$$x = \frac{1}{54}\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{49}{27}, \quad y = \frac{1}{54}\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{7}{27},$$
$$z = \frac{1}{54}\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{54}, \quad t = \frac{1}{54}\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{-61}{18}.$$
En otras palabras, la única solución es $(x, y, z, t) = (\frac{49}{27}, \frac{7}{27}, \frac{1}{54}, \frac{-61}{18})$. ▼

# 8. Ejercicios

**Ejercicio 1.** Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son inyectivas y cuáles sobreyectivas:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

($b_1$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.

($b_2$) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

($b_3$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^4$, donde $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

(c) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^2 - 1, x^3 + 1)$.

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x - 2y + 1$.

(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

En caso de que sean biyectivas, calcula sus inversas.

**Ejercicio 2.** Consideremos las aplicaciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 1 + x^3, \qquad g(x) = 3x - 1, \qquad h(x) = \sqrt[3]{x - 1}.$$

Calcular la composición de cada par de ellas.

**Ejercicio 3.**

(a) Si $f : A \to B$ es una aplicación sobreyectiva, demostrar que existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $f \circ g = 1_B$.

(b) Si $f : A \to B$ es una aplicación inyectiva, demostrar que existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $h \circ f = 1_A$.

(c) Demostrar que si $f : A \to B$ es biyectiva, las únicas aplicaciones que cumplen (a) y (b) son $g = h = f^{-1}$.

**Ejercicio 4.** Consideremos el conjunto $A = \{0, 1\}$, que tiene únicamente dos elementos y definamos en $A$ la operación suma ($+$) y producto ($\cdot$) como

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, & 0 + 1 &= 1, & 1 + 0 &= 1, & 1 + 1 &= 0, \\ 0 \cdot 0 &= 0, & 0 \cdot 1 &= 0, & 1 \cdot 0 &= 0, & 1 \cdot 1 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Demuestra que $A$ tiene una estructura de cuerpo junto con estas dos operaciones.

(b) ¿Serías capaz de construir un cuerpo con tres elementos? ¿Y con cuatro?

El cuerpo $A$ tiene mucha importancia en electrónica digital ya que modela algebraicamente las operaciones lógicas de un procesador.

**Ejercicio 5.** Consideremos las siguientes cuatro matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 2 & -5/2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1/3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -2 & -9/2 & 1 \\ 4 & 0 & -7/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar todos los productos que estén bien definidos entre ellas.

(b) Hallar el rango de cada una de ellas.

**Ejercicio 6.** Consideremos las siguientes matrices cuadradas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -2+i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 2 & -5/2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(la primera está definida sobre los números complejos). Demostrar que tienen inversa y calcularla.

**Ejercicio 7.** Hallar los valores del número real $a \in \mathbb{R}$ para los que las siguientes matrices tienen inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 0 & 2a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1-a & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1-a & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 1-a & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 8.** Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, con coeficientes reales o complejos, expresándolos previamente en notación matricial:

(a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ x + y + 2z = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - y + 2z = 3 \\ 4x - y + 7z = 12 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -x - 2z = 2 \\ x + 2y = -1 \\ y - z = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 3 \\ x - 3y + z = 1 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x+2y+z+t=-1 \\ -x+2y-t=-2 \\ y-4z+t=0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x-2y+3t=-3 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+z+t=0 \\ -x-y+2z+2t=0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} (3-2i)x-2y=1 \\ (1+i)x+2iy=3 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} -ix-2y+(1+i)z=1 \\ x+(2-i)y-iz=3+i \\ (2i-1)x-iy+iz=0 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x-2iy+(3+i)z=i \\ 2ix+2iy+(2i-1)z=-1+i \\ -x-2(i+1)y+z=-1 \end{cases}$

## Resultados de algunos ejercicios

Nota: *estos resultados son meramente para comprobación del alumno; para que la respuesta se considere correcta, esta ha de estar debidamente justificada.*

Ejercicio 1. (a) es biyectiva y su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$; ($b_1$) no es inyectiva ni sobreyectiva; ($b_2$) es biyectiva y su inversa es $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x}$; ($b_3$) es sobreyectiva pero no inyectiva; (c) es biyectiva y su inversa es $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$; (d) es biyectiva y su inversa es $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-2)$; (e) es inyectiva pero no sobreyectiva; (f) es sobreyectiva pero no inyectiva; (g) es biyectiva y su inversa es $f^{-1}(x,y)=(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2})$; (h) no es inyectiva ni sobreyectiva.

Ejercicio 5. $\text{rango}(A)=\text{rango}(B)=2$ y $\text{rango}(C)=\text{rango}(D)=3$.

Ejercicio 6.

$$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & -6-3i \\ -5i & 1-2i \end{pmatrix}, \qquad B^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 14 & 14 & -14 \\ 11 & 16 & -10 \\ 6 & 10 & -8 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1}=\frac{1}{59}\begin{pmatrix} 2 & -32 & -11 & 8 \\ 25 & -46 & -49 & -18 \\ -24 & 30 & 14 & 22 \\ -11 & 58 & 31 & 15 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. La matriz $A$ es regular para todo $a\in\mathbb{R}$ salvo para $a=0$ y $a=1$. La matriz $B$ es regular para todo $a\in\mathbb{R}$ salvo para $a=0$ y $a=2$.

Ejercicio 8. (a) S.C.D. Solución: $x=2, y=\frac{1}{2}$); (b) S.C.D. Solución: $x=1, y=1, z=1$; (c) S.C.I. con un grado de libertad. Soluciones: $x=3-\frac{5}{3}\lambda, y=\frac{1}{3}\lambda, z=\lambda$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$; (d) S.I.; (e) S.C.D. Solución: $x=1, y=-2, z=-6$. (f) S.C.I. con un grado de libertad. Soluciones: $x=\frac{10-19\lambda}{17}, y=\frac{-12-\lambda}{17}, z=\frac{-3+4\lambda}{17}, t=\lambda$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$; (g) S.C.I. con un grado de libertad. Soluciones: $x=-1-\lambda, y=1+\lambda, z=-\lambda, t=\lambda$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$; (h) S.C.D. Solución: $x=\frac{1}{25}(13-9i), y=\frac{-1}{50}(4-53i)$; (i) S.C.D. Solución: $x=\frac{1}{20}(-3+19i), y=\frac{13}{20}(1+2i), z=\frac{1}{20}(38+11i)$; (j) S.C.I. con un grado de libertad. Soluciones: $x=\lambda, y=\frac{12-5i}{26}-\frac{11-10i}{26}\lambda, z=\frac{4+7i}{13}-\frac{8+i}{13}\lambda$, para todo $\lambda\in\mathbb{R}$.