Tema 3

Espacios vectoriales euclídeos

Habiendo definido ya las formas bilineales sobre espacios vectoriales, vamos a centrarnos en un tipo muy concreto, en los productos escalares. Un *producto escalar* sobre un espacio vectorial V es una aplicación $g : V \times V \to \mathbb{R}$ verificando las siguientes tres propiedades:

a) g es bilineal,

b) g es simétrica (es decir, $g(u, v) = g(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in V$), y

c) g es definida positiva (es decir, $g(u, u) > 0$ para cualquier $u \in V$ no nulo)

Utilizaremos a menudo la letra g para denotar un producto escalar, aunque es también usual utilizar unos corchetes $\langle u, v\rangle$ (o un punto $u \cdot v$) para hacer referencia al producto escalar de dos vectores u y v. Por otro lado, para resumir toda esta información, utilizaremos la siguiente definición.

Definición 3.1. *Sea V un espacio vectorial y g un producto escalar sobre V. Entonces, al par (V, g) lo llamaremos espacio vectorial euclídeo.*

Antes de entrar en materia, tengamos presentes los siguientes ejemplos, que serán representativos a lo largo de todo el tema.

Ejemplos 3.2. Son espacios vectoriales euclídeos:

1. $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\langle x, y\rangle = x \cdot y^t$.
2. $(\mathcal{M}_n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\langle A, B\rangle = \text{traza}(A \cdot B^t)$.
3. $(\mathcal{C}([0, 1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.
4. Si (V, g) es un espacio vectorial euclídeo y U es un subespacio vectorial de V, entonces podemos considerar la restricción $\tilde{g} = g_{|U\times U}$ y $(U, \tilde{g})$ es un espacio vectorial euclídeo.

El espacio $\mathcal{C}([0, 1])$ de las funciones continuas definidas en $[0, 1]$ y que toman valores reales es un espacio vectorial de *dimensión infinita*. Aquí no estamos interesados en analizar este tipo de espacios por lo que supondremos siempre que los espacios vectoriales están *finitamente generados*, aunque muchas de las propiedades que enunciaremos serán ciertas también sin suponer que la dimensión es finita.

Recordemos que, fijada una base $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de un espacio vectorial V, la matriz asociada a una forma bilineal $b : V \times V \to \mathbb{R}$ está dada por

$$M(b, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \cdots & b(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & b(e_n, e_2) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

La forma bilineal es simétrica si, y sólo si, la matriz $M(b, \mathbb{B})$ es simétrica, pero ¿cómo saber cuándo es definida positiva? Hay varias posibilidades:

1. Demostrar directamente que $b(u, u) \geq 0$ para todo $u \in V$ y que $b(u, u) = 0$ si, y sólo si, $u = 0$. Esta es (sin duda) la forma más difícil por lo general.

2. Encontrar una base que *diagonalice* la matriz, es decir, encontrar una base $\mathbb{B}'$ tal que $M(b, \mathbb{B}')$ sea diagonal. Entonces, la métrica es definida positiva si, y sólo si, todos los elementos de la diagonal de esta nueva matriz son positivos.

3. Hallar los valores propios de la matriz $M(b, \mathbb{B})$. Entonces, la métrica es definida positiva si, y sólo si, todos sus valores propios son reales positivos.

La segunda opción es la que se usa para probar la clasificación de las métricas que se ha visto en el tema anterior (la Ley de Sylvester). La tercera no la hemos demostrado aún (el que quiera ser riguroso que no la use todavía) y la veremos en el transcurso de este tema.

Ejemplos 3.3. De las siguientes matrices de orden 3, determinemos cuáles son matrices de productos escalares en $\mathbb{R}^3$ respecto a la base usual.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Para la matriz A, vamos a seguir el proceso de encontrar una base que la diagonalice. Tomemos para empezar $e_1 = (1, 0, 0)$, que cumple que $e_1 A e_1^t = 1 > 0$. Consideremos ahora los vectores (x, y, z) ortogonales a e_1, que cumplirán $(x, y, z)Ae_1^t = 0$, es decir, $x - y + z = 0$ (esta es la ecuación del subespacio ortogonal a e_1) y elijamos uno, por ejemplo, $e_2 = (0, 1, 1)$, que cumple $e_2 A e_2^t = 8 > 0$. El subespacio ortogonal a e_2 tiene por ecuación $5y + 3z = 0$. Por tanto, el tercer vector a elegir tiene que estar en la recta vectorial de ecuaciones $x - y + z = 0$ y $5y + 3z = 0$ luego podemos tomar, por ejemplo, $e_3 = (8, 3, -5)$, que cumple $e_3 A e_3^t = 56 > 0$. Hemos encontrado una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ en la que la matriz de la métrica es la diagonal de elementos 1, 8 y 56 (todos positivos), luego se trata de un producto escalar.

b) La matriz B no puede ser la de un producto escalar, ya que si tomamos $u = (0, 0, 1)$, entonces $uBu^t = 0$, es decir, hemos encontrado un vector distinto de cero que es nulo para la métrica dada por B. Puede comprobarse que estamos ante una métrica lorentziana.

c) Si intentamos lo mismo que en (a), no podemos elegir el tercer vector de forma que la forma cuadrática asociada sea positiva sobre todos y es que el vector $u = (1, 1, 0)$ satisface $uCu^t = -1 < 0$. En este caso también estamos ante una métrica lorentziana.

A la vista del ejemplo, algunos trucos útiles son los siguientes:

- El determinante de cualquier submatriz que surja al eliminar algunas filas y las mismas columnas tiene que ser positivo para ser producto escalar. En particular, los elementos de la diagonal principal tienen que ser positivos.
- Cualquier valor propio real de la matriz tiene que ser positivo para ser producto escalar, porque, en caso contrario, ¿qué pasa al evaluar la matriz en un valor propio asociado a un valor propio negativo? Lo que probaremos más adelante es que todo valor propio de una matriz simétrica es real con lo que el criterio 3 de arriba estará probado.

3.1. ¿Para qué sirve un producto escalar?

En esta primera sección, estudiaremos algunas propiedades básicas de los productos escalares y veremos cómo nos pueden servir para medir longitudes y ángulos. Asimismo, repasaremos las nociones de base ortonormal y de ortogonalidad de vectores y de subespacios

3.1.1. Longitudes y ángulos

Comencemos por la tarea de definir la longitud de un vector. Merece la pena pararse a pensar en cómo se debería asignar una longitud a un vector, es decir, qué propiedades nos gustaría que cumpliese. Por poner algún ejemplo: nos gustaría que fueran positivas; que si un vector es el doble de otro, su longitud sea también el doble; que si un vector es opuesto de otro, las longitudes sean las mismas; nos gustaría que se cumpliese el Teorema de Pitágoras; etc. No obstante, al hablar de Teorema de Pitágoras estamos hablando de triángulos rectángulos, esto es, de perpendicularidad, y aquí el producto escalar debería tener algo que decir.

Dado un espacio vectorial euclídeo (V, g), definimos la norma o módulo de un vector $u \in V$ y lo denotaremos por $\|u\|$ al número real no negativo

$$\|u\| = \sqrt{g(u,u)}.$$

La aplicación $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ se llama la aplicación norma asociada a g. Nuestro objetivo es mostrar que esta aplicación cumple las propiedades que se esperan de ella.

3.4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma asociada a g. Entonces, para cualesquiera $u, v \in V$, se cumple que

$$|g(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

y la igualdad se alcanza si, y sólo si, u y v son linealmente dependientes.

Demostración. Dados $u, v \in V$, si $u = 0$ ó $v = 0$ la desigualdad es trivial. En caso contrario, consideremos el vector $\alpha u - \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces,

$$0 \leq \|\alpha u - \beta v\|^2 = g(\alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v) = \alpha^2 \|u\|^2 + \beta^2 \|v\|^2 - 2\alpha\beta g(u,v)$$

Ahora tomando $\alpha = \|v\|^2$ y $\beta = g(u,v)$, resulta

$$0 \leq \|v\|^4 \|u\|^2 + g(u,v)^2 \|v\|^2 - 2g(u,v)^2 \|v\|^2$$

y simplificando (dado que $\|v\| \neq 0$),

$$\|v\|^2\|u\|^2 \geq g(u,v)^2.$$

Como las normas son cantidades no negativas por definición, podemos eliminar los cuadrados introduciendo en el miembro de la derecha un valor absoluto.

Si se da la igualdad, retrocediendo en el razonamiento, $g(\alpha u - \beta v, \alpha u - \beta v) = 0$ pero como el producto escalar es definido positivo, $\alpha u - \beta v = 0$ y son linealmente dependientes. Recíprocamente, si son linealmente dependientes se da trivialmente la igualdad. □

Proposición 3.5. *Sea (V,g) un espacio vectorial euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma asociada a g. Entonces,*

i) $\|u\| \geq 0$ *para cualquier* $u \in V$.

ii) Dado $u \in V$, *se tiene que* $\|u\| = 0$ *si, y sólo si,* $u = 0$.

iii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, *para cualesquiera* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in V$.

iv) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para cualesquiera* $u, v \in V$.

Demostración. La demostración de los tres primeros apartados se deja como ejercicio. Para el último, tenemos que, dados $u, v \in V$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|u+v\|^2 = g(u+v, u+v) = \|u\| + \|v\| + 2g(u,v) \leq \|u\| + \|v\| + 2\|u\| \cdot \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Como las normas son cantidades no negativas, podemos eliminar los cuadrados. □

El apartado (iv) se conoce como *desigualdad de Minkowski* o *desigualdad triangular*. Se deja como ejercicio demostrar que la igualdad se alcanza si, y sólo si, los vectores son dependientes y apuntan en el mismo sentido (es decir, si existe $\lambda > 0$ tal que $u = \lambda v$) o bien alguno de los dos es cero.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz tiene multitud de consecuencias. Una aplicación muy común es que sirve para demostrar muchas desigualdades elementales cuando se particulariza para ciertos vectores. El siguiente ejercicio pretende ilustrar esto.

Ejercicio 3.1. Aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a vectores convenientes de $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar usual, para demostrar las siguientes afirmaciones.

1. Para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

2. Para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, se cumple que

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^2 \leq (x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3)(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

3. Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, consideremos los vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, donde los números $y_1, y_2, \ldots, y_n$ no son más que los propios $x_1, \ldots, x_n$ reordenados. Entonces, el producto $\langle x, y \rangle$ es máximo cuando la reordenación consiste en no mover ningún elemento.

En los casos 1 y 2, analizar cuándo se alcanza la igualdad.

Siguiendo con las aplicaciones de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, vamos a usarla para definir el ángulo que forman dos vectores. Dado un espacio vectorial euclídeo (V, g) y $u, v \in V$ no nulos, entonces la mencionada desigualdad nos asegura que $|g(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, luego dividiendo entre $\|u\|\|v\|$, llegamos a que

$$-1 \leq \frac{g(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Dado que la función real coseno $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es una biyección, deducimos que existe un único número real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que el cociente anterior es igual a $\cos(\alpha)$. Si denotamos $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ a la inversa del coseno en este intervalo, tenemos servida la siguiente definición.

Definición 3.6. *En un espacio vectorial euclídeo, llamaremos ángulo de dos vectores no nulos u y v no nulos y denotaremos por $\angle(u, v)$ al número real*

$$\arccos \frac{g(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \in [0, \pi].$$

A la vista de la definición de ángulo, ésta merece varios comentarios:

1. El ángulo es un valor entre 0 y π por definición. En principio, el ángulo que forman dos vectores no tiene porqué coincidir con lo que pensemos que debería ser o con la idea preconcebida de ángulo que tengamos, simplemente lo hemos definido así. En el ejercicio 3.3 veremos que en el caso del producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$ sí coincide con la definición clásica.
2. Si multiplicamos dos vectores no nulos por escalares positivos, los ángulos que forman no cambian. Si multiplicamos uno de ellos por un escalar negativo, entonces el ángulo pasa a ser el suplementario (es decir, π menos el original).
3. Dados dos vectores $u, v \in V$ no nulos, estos son linealmente dependientes si, y sólo si $g(u, v) = \|u\| \cdot \|v\|$, luego son dependientes si, y sólo si, $\angle(u, v) = 0$ ó $\angle(u, v) = \pi$.
4. Dados dos vectores u y v no nulos, estos son ortogonales si, y sólo si, $g(u, v) = 0$. En otras palabras, son perpendiculares cuando $\angle(u, v) = \frac{\pi}{2}$.
5. ¿Qué pasa con el vector cero? Observemos que cero es ortogonal a cualquier vector luego puede parecer razonable decir que el ángulo que forma con cualquier vector es $\frac{\pi}{2}$, pero esto llevaría a algunas contradicciones más adelante así que lo dejaremos excluído de la definición.

Ejercicio 3.2. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica g definida en la base usual por la matriz

$$M(g, \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestra que g es un producto escalar.

b) ¿Qué ángulo forman los vectores $(0, 1)$ y $(1, 2)$? ¿Y los vectores $(1, -2)$ y $(-2, 4)$?

c) Halla todos los vectores de norma 1 que forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el vector $(1, 1)$.

Ejercicio 3.3. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual.

a) Dado $\theta \in [0, \pi]$, demuestra que el vector $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ forma un ángulo θ con $(1, 0)$.

b) Aunque no tenemos las herramientas necesarias para hacerlo de forma totalmente rigurosa, ¿serías capaz de probar que el coseno del ángulo que forman dos vectores coincide con la idea clásica del cociente de cateto contiguo entre hipotenusa?

Veamos ahora qué pasa cuando tenemos tres vectores y queremos relacionar los ángulos que se forman entre ellos. Evidentemente, si los tres vectores no están en un mismo plano vectorial, no hay relación posible. No obstante, en caso de que sí estemos, nos gustaría ver que al *yuxtaponer* dos ángulos, el ángulo resultante es igual a la suma de los ángulos originales, pero lamentablemente esto no es cierto en general por culpa de que los ángulos se miden en $[0, \pi]$.

Para analizar la situación y salvar el escollo, supondremos en lo que sigue que estamos en un plano e introduciremos un concepto nuevo, que puede ser interesante en sí mismo. Dados u y v linealmente independientes en un plano vectorial euclídeo (V, g) (es decir, $\dim V = 2$), se define el *ángulo sólido* asociado a u y v como

$$W(u, v) = \{\lambda u + \mu v : \lambda, \mu \geq 0\}.$$

Proposición 3.7. *Dado un plano vectorial euclídeo (V, g) y $u, v, w \in V$ no nulos, se cumple que*

$$\angle(u, v) \leq \angle(u, w) + \angle(w, v).$$

La igualdad se alcanza si, y sólo si, $w \in W(u, v)$.

Demostración. Demostrar esto ahora es un ejercicio difícil. Será más fácil cuando introduzcamos el concepto de base ortonormal. □

De la propiedad anterior, puede deducirse que en un espacio vectorial euclídeo la suma de los ángulos de un triángulo es siempre igual a π. Viendo la figura 3.1, es fácil interpretar que, dados $u, v \in V$ linealmente independientes y trabajando en el plano que estos dos vectores generan, el candidato a tercer lado del triángulo es $v - u$. Así, usando la proposición anterior, no es difícil llegar a que

$$\angle(u, v) + \angle(-u, v - u) + \angle(-v, u - v) = \pi,$$

que no es más que decir que la suma de los ángulos del triángulo es π.

Nota 3.8. En la geometría clásica, uno de los grandes problemas clásicos fue decidir si el quinto postulado de Euclídes podía deducirse de los otros cuatro, es decir, si era redundante. Este famoso postulado afirma que, dado un punto exterior a una recta, existe una única paralela a ésta que pasa por dicho punto. Lo sorprendente del asunto es que se encontraron ejemplos de geometrías en las que esto no ocurría; a saber, la *geometría esférica* en la que por un punto exterior no pasa ninguna paralela y la *geometría hiperbólica* en la que pasan infinitas paralelas por tal punto. Se demostró que la condición de las paralelas era equivalente a que los ángulos de cualquier triángulo sumasen π (en el caso esférico suman menos de π mientras que en el hiperbólico la suma es mayor que π). Esto justifica que a un espacio vectorial con un producto escalar se le llame *euclídeo.*

Para terminar con esta sección, veremos algunas identidades que nos terminarán de convencer de la utilidad nuevos conceptos introducidos. La primera pregunta que nos hacemos es: ¿es posible

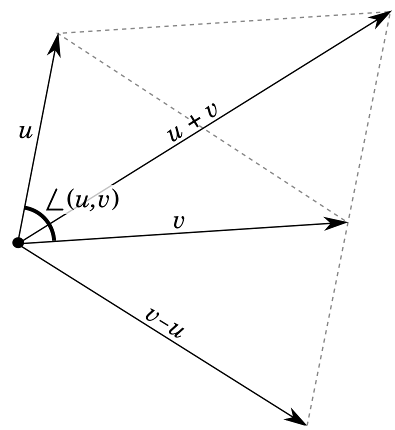

Figura 3.1: Un paralelogramo en geometría vectorial.

saber cuál es la métrica si sólo conocemos la norma? En otras palabras, ¿puede haber dos métricas distintas con la misma norma? La repuesta es obviamente no.

3.9. Identidad de polarización. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con norma asociada $\|\cdot\|$. Dados $u, v \in V$, se cumple que

$$g(u, v) = \tfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

Demostración. Basta despejar en la siguiente igualdad

$$\|u+v\|^2 = g(u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2g(u, v) + \|v\|^2. \qquad \square$$

Como consecuencia de este resultado tenemos las siguientes propiedades, cuyas demostraciones se dejan como ejercicio. Para interpretarlos bien hemos dibujado la figura 3.1, en la que puede verse cómo considerar triángulos y paralelogramos en un plano vectorial euclídeo.

3.10. Teorema del coseno. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con norma asociada $\|\cdot\|$. Dados $u, v \in V$ no nulos, se cumple que

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos\angle(u, v).$$

3.11. Identidad del paralelogramo. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo con norma asociada $\|\cdot\|$. Dados $u, v \in V$, se cumple que

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \tfrac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right).$$

Esta última igualdad puede parafrasearse como que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

3.1.2. Bases ortonormales

En el tema anterior precisamos el concepto de base ortogonal, una base en la que cada dos vectores son ortogonales entre sí. Conociendo las normas, podemos afinar un poco más la condición de ortogonalidad exigiendo que los vectores de la base sean además de norma igual a uno.

Definición 3.12. *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo.*

a) Un vector $u \in V$ se dice unitario si $\|u\| = 1$.

b) Una base $\mathbb{B}$ se dice ortonormal si es ortogonal y sus vectores son unitarios.

Al conjunto de todos los vectores unitarios se le llama esfera unidad.

Aunque en principio puede parecer que se ha añadido mucha dificultad al concepto de base ortogonal requiriendo que sus vectores sean unitarios, esto no es así. Observemos que si $u \in V$ es no nulo, entonces

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|u\|} \right| \cdot \|u\| = \frac{\|u\|}{\|u\|} = 1,$$

luego una forma de hacer a un vector no nulo unitario es dividirlo por su norma.

Proposición 3.13. *Todo espacio vectorial euclídeo admite bases ortonormales.*

Demostración. Del Teorema de Sylvester se deduce que existe una base ortogonal de V. Como todos los vectores de la base son no nulos, al dividirlos por sus respectivas normas se hacen unitarios. Al multiplicar un vector no nulo por un escalar no varía su ortogonalidad con otros vectores, y por tanto la base así obtenida es ortonormal. $\square$

El siguiente resultado pretende demostrar que trabajar en una base ortonormal facilita en gran medida el trabajo en un espacio vectorial euclídeo, ya que el producto escalar adopta una matriz muy sencilla respecto de las bases ortonormales: si $\mathbb{B}$ es una base ortonormal de (V, g), entonces $M(g, \mathbb{B}) = I_n$ ya que por ser $\mathbb{B}$ ortogonal la matriz es diagonal y por ser de vectores unitarios, los elementos de la diagonal son todos unos.

Proposición 3.14. *Sea $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de un esp. vect. euclídeo (V, g).*

a) Dados $u, v \in V$ con coordenadas $C_{\mathbb{B}}(u) = (u_1, \ldots, u_n)$ y $C_{\mathbb{B}}(v) = (v_1, \ldots, v_n)$ en la base $\mathbb{B}$,

$$g(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

b) Dado $u \in V$, las coordenadas de u en la base $\mathbb{B}$ de u están dadas por

$$C_{\mathbb{B}}(u) = (g(u, e_1), \ldots, g(u, e_n)).$$

Demostración. Se deja como ejercicio. $\square$

Como es bien sabido, trabajar en coordenadas es útil para pasar el problema que tengamos un espacio vectorial a un problema en $\mathbb{R}^n$. Si adicionalmente trabajamos con una base ortonormal en un espacio vectorial euclídeo, la proposición nos dice que podemos trabajar también como si el producto escalar fuera el de $\mathbb{R}^n$. En la siguiente sección precisaremos más esta idea, probando que todo espacio vectorial euclídeo es *isométrico* a $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usal.

Cambio de bases ortonormales

Sean $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$ dos bases ortonormales de un espacio vectorial euclídeo (V, g). Entonces, $M(g, \mathbb{B}) = M(g, \mathbb{B}') = I_n$, luego si $P = M(\mathbb{B}' \to \mathbb{B})$ es la matriz del cambio de base, se tiene la relación entre las matrices del producto escalar $P \cdot M(g, \mathbb{B}) \cdot P^t = M(g, \mathbb{B}')$ y, por tanto,

$$P \cdot P^t = I_n.$$

Definición 3.15. *Diremos que una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal cuando $P \cdot P^t = I_n$. Denotaremos por $O(n)$ el conjunto de todas las matrices ortogonales de orden n.*

Recordemos algunas propiedades de las matrices ortogonales:

1. Si una matriz es ortogonal, su determinante sólo puede tomar los valores 1 y -1. No es cierto que toda matriz con determinante 1 ó -1 sea una matriz ortogonal.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $O(n)$ es un grupo junto con el producto de matrices.
3. Sea $\mathbb{B}$ una base ortonormal de (V, g). Entonces otra base $\mathbb{B}'$ es ortonormal si, y sólo si, la matriz del cambio de base $M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}')$ es ortogonal.

   Para probar esto, notemos que la implicación hacia la derecha es la definición de matriz ortogonal. Hacia la izquierda, sea $A = M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}')^{-1}$, que es también ortogonal. Entonces $M(g, \mathbb{B}') = A \cdot M(g, \mathbb{B}) \cdot A^t = A \cdot A^t = I_n$, ya que $M(g, \mathbb{B}) = I_n$, luego $\mathbb{B}'$ es ortonormal.

Esto demuestra que las matrices ortogonales *coinciden* con las matrices de cambio de base entre bases ortonormales, lo que nos da otra forma de verlas.

Ortogonalización de bases

El siguiente paso es obtener bases ortonormales, y lo haremos a partir de bases conocidas, modificándolas hasta conseguir hacerlas ortonormales, aunque guardando cierta relación con la base de partida.

Lema 3.16. *Sea $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ un subconjunto de vectores de un espacio vectorial euclídeo. Si cualesquiera dos vectores distintos de S son ortogonales, entonces S es linealmente independiente*

Demostración. Sabemos que $g(u_i, u_j) = 0$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. Entonces, dada una combinación lineal de ellos $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ y, multiplicando escalarmente por cada u_i, queda

$$g(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n, u_i) = g(0, u_i) = 0$$

luego $\alpha_1 g(u_1, u_i) + \ldots + \alpha_n g(u_n, u_i) = 0$ y, por tanto, $\alpha_i g(u_i, u_i) = \alpha_i \|u_i\|^2 = 0$ y de aquí que $\alpha_i = 0$ ya que si $u_i = 0$ los vectores iniciales no serían linealmente independientes. □

Este lema nos da un método para conseguir una base ortogonal mediante el siguiente método:

1º Tomamos un vector u_1 no nulo.

2º Calculamos un vector no nulo ortogonal u_1 y lo llamamos u_2

3º Calculamos un vector no nulo ortogonal u_1 y a u_2 y lo llamamos u_3.

4º Repetimos el proceso hasta obtener tener tantos vectores como la dimensión del espacio y, si queremos una base ortonormal, dividimos todos los vectores por su norma.

Algunos interrogantes surgen: ¿siempre quedarán vectores para ir completando la base? ¿es complicado elegir un vector conocidos los anteriores? Una manera de resolver esta cuestión es utilizar el siguiente resultado.

3.17. Teorema de ortogonalización de Gram-Schmidt. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base (cualquiera) de V. Entonces, el conjunto $\mathbb{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dado por

$$e'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{g(e_k, e'_i)}{\|e'_i\|^2} e'_i,$$

verifica las siguientes dos propiedades.

a) $\mathbb{B}'$ es una base ortogonal.

b) Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple que $L(\{e'_1, \ldots, e'_k\}) = L(\{e_1, \ldots, e_k\})$.

Demostración. Construyamos la nueva base $\mathbb{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ aplicando un proceso de inducción finita. Como e'_1 tomamos el propio e_1 y evidentemente se cumple que $L(\{e'_1\}) = L(\{e_1\})$. Supongamos que hemos definido $e'_1, \ldots, e'_{k-1}$, con $1 < k < n$, ortogonales dos a dos, verificando $L(\{e'_1, \ldots, e'_{k-1}\}) = L(\{e_1, \ldots, e_{k-1}\})$, y calculemos e'_k.

Para que se cumpla que $L(\{e'_1, \ldots, e'_k\}) = L(\{e_1, \ldots, e_k\})$ y, dada la hipótesis de inducción, impondremos que el nuevo vector sea de la forma $e'_k = e_k - \alpha_1 e'_1 - \ldots - \alpha_{k-1} e'_{k-1}$, luego, imponiendo que e'_k debe ser ortogonal a e'_i para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, tenemos

$$g(e'_k, e'_i) = 0 \implies g(e_k - \alpha_1 e'_1 - \ldots - \alpha_{k-1} e'_{k-1}, e'_i) = 0 \implies g(e_k, e'_i) - \alpha_i g(e'_i, e'_i) = 0,$$

donde hemos hecho uso de que $e'_1, \ldots, e'_{k-1}$ son ortogonales entre sí. Despejando α_i,

$$\alpha_i = \frac{g(e_k, e'_i)}{g(e'_i, e'_i)} = \frac{g(e_k, e'_i)}{\|e'_i\|^2}.$$

Por tanto, obtenemos la expresión del enunciado para el vector e'_k y puede comprobarse que puede comprobarse da una base ortogonal de V. □

El mismo teorema da la construcción de una base que satisface el enunciado.

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \longrightarrow \left\{ e_1, e_2 - \frac{g(e_2, e'_1)}{\|e'_1\|^2} e'_1, \ldots, e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g(e_n, e'_i)}{\|e'_i\|^2} e'_i \right\}.$$

Es importante darse cuenta de que la base va construyéndose sobre sí misma de una forma inductiva: para cada vector nuevo que se calcula hace falta usar los que han sido previamente calculados. Como ya hemos dicho, para obtener la base ortonormal, es suficiente dividir cada vector por su norma. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.18. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, consideremos la base $\mathbb{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$ y $u_3 = (1,-1,1)$. Vamos a aplicar el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortogonal $\{u_1', u_2', u_3'\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_1 = (1,1,0),\\
u_2' &= u_2 - \frac{\langle u_2, u_1'\rangle}{\|u_1'\|^2} u_1' = (0,1,1) - \tfrac{1}{2}(1,1,0) = \left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right),\\
u_3' &= u_3 - \frac{\langle u_3, u_1'\rangle}{\|u_1'\|^2} u_1' - \frac{\langle u_3, u_2'\rangle}{\|u_2'\|^2} u_2' = (1,-1,1) - 0\cdot(1,1,0) + 0\cdot\left(\tfrac{-1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\right) = (1,-1,1)
\end{aligned}$$

(observemos que u_3 ya era ortogonal a u_1 y u_2 y por eso $u_3' = u_3$). Por tanto, si queremos una base ortonormal, dividimos cada vector por su norma y obtenemos

$$\left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{-1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Otra consecuencia que responde a una de las preguntas arriba indicadas es la siguiente.

Corolario 3.19. *Sea $\{e_1, \ldots, e_k\}$ un conjunto ortonormal de vectores de un espacio vectorial euclídeo (V, g). Entonces, puede extenderse a una base ortonormal de (V, g).*

Demostración. Se deja como ejercicio. □

3.1.3. Subespacios ortogonales

Como veíamos en el tema anterior, dado un subconjunto S de un espacio vectorial euclídeo (V, g), podemos definir otro subconjunto, el de los vectores ortogonales a todos los de S, como

$$S^\perp = \{u \in V : g(u, v) = 0 \quad \forall v \in S\}.$$

Aunque se puede definir para una métrica en general, cuando tenemos un producto escalar, esta construcción cumple las siguientes propiedades (sería interesante ver cuáles de ellas permanecen ciertas con una métrica cualquiera):

1. $S^\perp$ es siempre un subespacio vectorial de V.
2. $S^\perp = L(S)^\perp$.
3. $S^{\perp\perp} = L(S)$.

Proposición 3.20. *Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial euclídeo (V, g). Entonces,*

$$V = U \oplus U^\perp.$$

En consecuencia, $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Demostración. Hemos de comprobar que $U \cap U^\perp = \{0\}$ y que $U + U^\perp = V$

a) Si $u \in U \cap U^\perp$, entonces u es ortogonal a sí mismo, luego $g(u, u) = 0$ y, por tanto, $u = 0$.

b) Sea $k = \dim(U)$ y $\{e_1, \dots e_k\}$ una base ortogonal de U. Entonces se puede completar, mediante el proceso de Gram-Schmidt, a una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortogonal de V. Pero por la ortogonalidad de ésta, $\{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset U^\perp$ luego $\dim(U^\perp) \geq n - k$. Por otro lado, aplicando la fórmula de las dimensiones y dado que la intersección de los dos subespacios es trivial, $\dim(U + U^\perp) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$, luego $\dim(U) + \dim(U^\perp) \leq n$ y por tanto $\dim(U^\perp) \leq n - k$. En consecuencia, $\dim(U^\perp) = n - k$ y $\dim(U + U^\perp) = n$ con lo que $U + U^\perp = V$. $\square$

Para terminar, definiremos dos tipos de aplicaciones importantes en la geometría vectorial euclídea.

Proyección ortogonal

Visto que dado un subespacio U de un espacio vectorial euclídeo (V, g), se tiene que $V = U \oplus U^\perp$, cualquier $u \in V$ se escribe de forma única como $u = v + w$ con $v \in U$ y $w \in U^\perp$. Definimos la proyección ortogonal del vector u sobre el subespacio U como el vector v.

Obtenemos así la aplicación $P_U : V \to V$, donde $P_U(u)$ es la proyección ortogonal de u sobre U. Puede comprobarse que se verifican las siguientes propiedades:

1. P_U es una aplicación lineal.
2. $\mathrm{Img}(P_U) = U$ y $\mathrm{N}(P_U) = U^\perp$.
3. $P_U(v) = v$ para cualquier $v \in U$.
4. $P_U \circ P_U = P_U$.
5. $P_U(v) + P_{U^\perp}(v) = v$ para cualquier $v \in V$.

De estas propiedades se deduce inmediatamente la siguiente expresión de la proyección ortogonal respecto de una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\}$ del subespacio U:

$$P_U(u) = g(u, e_1)e_1 + \dots + g(u, e_k)e_k.$$

Simetría ortogonal

De forma análoga al caso de la proyección ortogonal, dado un subespacio U en un espacio euclídeo (V, g), tenemos que $V = U \oplus U^\perp$, luego cada $u \in V$ se escribe de forma única como $u = v + w$ con $v \in U$ y $w \in U^\perp$. Definimos la simetría ortogonal del vector u respecto del subespacio U como el vector $v - w$.

Obtenemos así la aplicación simetría ortogonal $S_U : V \to V$ donde $S_U(x)$ es la simetría ortogonal de x sobre U. Pueden comprobarse las siguientes propiedades de la simetría ortogonal:

1. S_U es una automorfismo de V.
2. $\mathrm{Img}(S_U) = V$ y $\mathrm{N}(S_U) = \{0\}$.
3. $S_U(v) = v$ para cualquier $v \in U$.
4. $S_U \circ S_U = 1_V$.
5. $S_U(v) + v = 2P_U(v)$ para cualquier $v \in V$.

Dada una base ortogonal $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de U, podemos extenderla a una base ortogonal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V (donde $e_{k+1}, \ldots, e_n$ es una base ortogonal de $U^{\perp}$. Entonces, para cualquier $u \in V$,

$$S_U(u) = g(u, e_1)e_1 + \ldots + g(u, e_k)e_k - g(u, e_{k+1})e_{k+1} - \ldots - g(u, e_n)e_n.$$

3.2. Un tipo especial de diagonalización

Diagonalizar un endomorfismo es, por definición, encontrar una base en la que la matriz del endomorfismo en diagonal. La diagonalización por congruencia es un tipo especial de diagonalización en la que se puede encontrar dicha base que sea ortonormal respecto de un producto escalar prefijado. Como es sabido, no todo endomorfismo es diagonalizable y, de la misma forma, dado un producto escalar, no todo endomorfismo diagonalizable será diagonalizable por congruencia.

Recordemos algunos conceptos de diagonalización antes de entrar en más detalle. Sea V un espacio vectorial y $f : V \to V$ un endomorfismo.

- Un valor propio de f es un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $V_\lambda = \mathrm{N}(f - \lambda 1_V) \neq \{0\}$. Al subespacio vectorial V_λ se le llama subespacio propio asociado a λ y a sus elementos vectores propios asociados a λ.
- El polinomio característico de f está dado por $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, donde A es la matriz de f en alguna base (no depende de la base) y sus raíces reales son los valores propios de f.
- Vectores propios asociados a distintos valores propios son linealmente independientes.
- La multiplicidad algebraica de un valor propio es la multiplicidad de este como raíz del polinomio característico y la multiplicidad geométrica es la dimensión de sus subespacio propio. Un endomorfismo es diagonalizable si, y sólo si, su polinomio característico tiene todas sus raíces reales y la muliplicidad algebraica de cada una de ellas coincide[1] con la multiplicidad geométrica.
- Una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ se dice diagonalizable cuando la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = x \cdot A$ es diagonalizable. Se cumple que un endomorfismo es diagonalizable si, y sólo si, la matriz de éste en una base (cualquiera) es diagonalizable.

Nota 3.21. Aquí nos vamos a restringir (como ya sabemos) a espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números reales, porque es suficiente para nuestros propósitos debido a su naturaleza geométrica . No obstante, esta teoría es mucho más rica cuando se trabajan con espacios vectoriales sobre los números complejos $\mathbb{C}$ debido al siguiente resultado, cuya demostración se escapa de los objetivos de este libro y es independiente de todo lo que desarrollaremos a partir de él.

3.22. Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ se factoriza completamente en $\mathbb{C}[x]$, es decir, existen $c_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, donde n es el grado de $P(x)$, tales que

$$P(x) = c_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

Como consecuencia, observemos que si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ es un polinomio con coeficientes reales, entonces también puede verse como polinomio con coeficientes complejos. Además, si α cumple

[1] La multiplicidad algebraica de un valor propio siempre es mayor o igual que la geométrica.

$P(\alpha) = 0$, entonces su conjugado $\bar{\alpha}$ también cumple $P(\bar{\alpha}) = 0$ (se deja como ejercicio demostrarlo). En consecuencia, las raíces de $P(x)$ o bien son reales o bien van en parejas de raíces complejas conjugadas. Por otro lado, observemos que $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2$, lo que nos da la forma de hallar dicho polinomio de grado 2 que representa a la pareja de raíces conjugadas.

3.2.1. Diagonalización por congruencia

En lo que sigue, sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y denotemos $n = \dim(V)$. Vamos a aplicar en este apartado la parte métrica para lograr un tipo especial de diagonalización como ya hemos anunciado.

Definición 3.23. *Diremos que un endomorfismo $f : V \to V$ es diagonalizable por congruencia cuando exista una base ortonormal $\mathbb{B}$ de V tal que $M(f, \mathbb{B})$ sea diagonal.*

Vamos a definir un tipo de endomorfismo que, a posteriori, va a ser diagonalizable por congruencia: el endomorfismo autoadjunto. Antes de nada pensemos qué hace falta para que un endomorfismo sea diagonalizable por congruencia: primero, que sea diagonalizable obviamente y, segundo, para poder tomar la base ortonormal de valores propios, sus subespacios propios han de ser ortogonales.

Definición 3.24. *Sean (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \to V$ un endomorfismo. Diremos que f es autoadjunto cuando*

$$g(f(u), v) = g(u, f(v))$$

para cualesquiera $u, v \in V$.

Para caracterizar si un automorfismo es autoadjunto, vamos a desarrollar la fórmula de la definición. Para ello, sea $\mathbb{B}$ una base cualquiera de V y sean $G = M(g, \mathbb{B})$ y $A = M(f, \mathbb{B})$. Dados $u, v \in V$, llamemos X e Y, respectivamente, a sus coordenadas en la base $\mathbb{B}$ como vectores fila, luego las coordenadas de $f(u)$ son XA y las de $f(v)$ son YA. Por tanto,

$$g(f(u), v) = (XA)GY^t = X(AG)Y^t$$

$$g(u, f(v)) = XG(YA)^t = X(GA^t)Y^t$$

y, si la igualdad se da para cualesquiera $u, v \in V$, entonces ha de ser $AG = GA^t$. Esto prueba el siguiente resultado, que nos permite comprobar de forma sencilla si un operador es o no autoadjunto.

Lema 3.25. *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y $\mathbb{B}$ una base de V, y denotemos $G = M(g, \mathbb{B})$ y $A = M(f, \mathbb{B})$.*

a) El endomorfismo f es autoadjunto si, y sólo si, $AG = GA^t$.

b) Si $\mathbb{B}$ es ortonormal, f es autoadjunto si, y sólo si, A es simétrica.

Otra consecuencia es que los vectores propios asociados a valores propios distintos no son sólo linealmente independientes sino que además son ortogonales, lo que demuestra que si un endomorfismo autoadjunto es diagonalizable también lo es por congruencia.

Lema 3.26. *Dos subespacios propios distintos de un endomorfismo autoadjunto son ortogonales.*

Demostración. Supongamos que u y v son dos vectores propios asociados a valores propios λ y μ, respectivamente, de un endomorfismo autoadjunto f. Por tanto,

$$\lambda \cdot g(u,v) = g(\lambda u, v) = g(f(u), v) = g(u, f(v)) = g(u, \mu v) = \mu \cdot g(u,v)$$

luego $(\lambda - \mu)g(u,v) = 0$. Si $\lambda \neq \mu$, entonces $g(u,v) = 0$. □

El resultado más profundo de este capítulo y que vamos a demostrar enseguida es el siguiente.

Teorema 3.27. *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces, f es diagonalizable por congruencia.*

Corolario 3.28. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, existe $P \in O(n)$ tal que $P \cdot A \cdot P^t$ es diagonal.*

Demostración. Si A es simétrica, entonces $A = A^t$. Definimos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de forma que $f(x) = Ax$ con $A = M(f, \mathbb{B})$ donde $\mathbb{B}$ es una base ortonormal. Por tanto, $M(\langle\cdot,\cdot\rangle, \mathbb{B}) = I_n$ y f es autoadjunto, luego es diagonalizable por congruencia, y existe $\mathbb{B}'$ base ortonormal de V tal que $D = M(f, \mathbb{B}')$ es diagonal, luego $P^{-1}AP = D$ donde $P = M(\mathbb{B}' \to \mathbb{B}) \in O(n)$ por ser $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$ ortonormales. Por consiguiente, $P^{-1} = P^t$ y se tiene el enunciado. □

Observemos que, en la situación del corolario, si tomamos $Q = P^{-1} = P^t$, se cumple que $Q \in O(n)$ y $Q^t \cdot A \cdot Q = P \cdot A \cdot P^t$ es diagonal, luego no es esencialmente importante en qué lado de A se encuentra la traspuesta, pues podemos pasar de uno a otro fácilmente.

Primera demostración del teorema 3.27 (usando el Teorema fundamental del álgebra)

Esta primera demostración del teorema es la que se verá en clase, que se basa en la demostración que puede encontrarse en el libro de Merino y Santos [MS, pp.212-213]. Como puede verse, el inconveniente es que hay que usar el Teorema fundamental del álgebra que, aunque es sencillo de enunciar, no es nada fácil de probar y requiere técnicas de análisis de variable compleja.

Supongamos que $\lambda = a + ib$ es una raíz del polinomio característico de un endomorfismo $f : V \to V$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que si A es la matriz de f en alguna base, entonces $\det(A - (a+bi)I_n) = 0$. Entonces, existe un vector $w \in \mathbb{C}^n$ no nulo con coeficientes complejos tal que $(A - (a+bi)I_n)w = 0$ (este es el único paso difícil), es decir, $Aw = (a+bi)w$. Ahora podemos escribir $w = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$ no son ambos nulos, y tenemos que

$$Ax + iAy = A(x+iy) = Aw = (a+bi)w = (a+bi)(x+iy) = (ax - by) + i(ay + bx)$$

con lo que finalmente deducimos que $Ax = ax - by$ y $Ay = ay + bx$.

Lema 3.29. *Las raíces del polinomio característico de un endomorfismo autoadjunto son reales.*

Demostración. Supongamos que $\lambda = a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, es una raíz del polinomio característico y probemos que $b = 0$. Usando lo que hemos probado antes del enunciado, tenemos que existen vectores $x, y \in V$ no ambos nulos y tales que $f(x) = ax - by$ y $f(y) = ay + bx$. Falta usar que f es autoadjunto, con lo que

$$a \cdot g(x,y) - b \cdot g(y,y) = g(f(x),y) = g(x,f(y)) = a \cdot g(x,y) + b \cdot g(x,x)$$

De aquí tenemos que $b(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 0$, pero x e y no son simultáneamente nulos, luego $b = 0$. $\square$

Con esto ya podemos probar el teorema buscado.

Demostración del teorema 3.27. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo autoadjunto y denotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a los valores propios de f, que son reales y aparecerán con distintas multiplicidades. Consideremos además $U = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$ que es un subespacio de V. Si $U = V$, entonces f es diagonalizable y, por tanto, diagonalizable por congruencia. Si $U \neq V$, vamos a llegar a una contradicción y el teorema estará probado.

Si $U \neq V$, entonces $U^\perp \neq \{0\}$ y $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ ya que $f(U) \subseteq U$ y f es autoadjunto. Por tanto, f induce un endomorfismo autoadjunto $f_{|U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$ y el lema nos asegura que todos sus valores propios son reales luego tendrá, al menos, un vector propio $v \neq 0$ asociado a cierto valor propio real λ, pero es obvio que los valores propios de $f_{|U^\perp}$ también lo son de f luego $v \in U$, lo cual es una contradicción. $\square$

El lema nos dice mucho más pues prueba que toda matriz simétrica tiene sus valores propios reales. Esto se puede aplicar para clasificar una métrica en términos de los valores propios de la matriz de la misma (en alguna base).

Corolario 3.30. *Sea V un espacio vectorial y b una métrica sobre V. Dada una base $\mathbb{B}$ de V, consideremos $G = M(b, \mathbb{B})$. Entonces,*

a) La nulidad de b es la multiplicidad del cero como valor propio de G.

b) La signatura de b es el número de valores propios negativos de G (con multiplicidad).

Segunda demostración del teorema 3.27 (usando cálculo en varias variables)

Esta sección no aporta nada nuevo a la teoría que estamos desarrollando, simplemente es una demostración que no usa el Teorema fundamental del álgebra y, aunque en principio puede parecer más compleja, los resultados en los que se basa son más simples y los recogemos en el siguiente lema. Quien no esté interesado en la demostración, que pase directamente a la siguiente sección.

Lema 3.31. *Consideremos $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial, entonces*

1. *Toda aplicación lineal es una aplicación diferenciable.*
2. *El producto escalar es una aplicación diferenciable.*
3. *Toda aplicación continua definida sobre un compacto*[2] *de $\mathbb{R}^n$ que toma valores reales, alcanza sobre dicho compacto su máximo y su mínimo absolutos (propiedad de compacidad).*

[2]Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice compacto si es cerrado y acotado. Equivalentemente, cuando cualquier sucesión de puntos de K tiene una parcial que converge a un punto de K.

En el caso de tener un espacio vectorial V de dimensión n, podemos considerar el isomorfismo dado por las coordenadas en una base $\mathbb{B}$ cualquiera $C_{\mathbb{B}} : V \to V$. Entonces, pasando por las coordenadas, podemos hablar de funciones continuas y diferenciables en V y subconjuntos compactos. Así tenemos que cualquier aplicación lineal o producto escalar en V es diferenciable y la esfera vectorial es compacta. Con esto ya podemos abordar la demostración.

Demostración del teorema 3.27. Procedamos por inducción sobre la dimensión n del espacio. Para $n = 1$, es trivial puesto que toda matriz de dimensión 1 es diagonal. Supongamos que cierto que todo endomorfismo autoadjunto $g : W \to W$, donde W es cualquier espacio vectorial de dimensión $n - 1$, es diagonalizable por congruencia.

Si ahora V es de dimensión n, sea $\mathbb{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de V y $A = M(f, \mathbb{B})$ que es simétrica por ser f autoadjunto. Consideremos la esfera vectorial de V, $\mathbb{S} = \{v \in V : \|v\| = 1\}$, que es un subconjunto compacto de V. Definimos

$$\gamma : \mathbb{S} \to \mathbb{R} : v \mapsto \langle v, f(v) \rangle$$

que, según el Lema 3.31 es continua, luego γ alcanza su mínimo absoluto, esto es, existe $v \in \mathbb{S}$ tal que $\gamma(v) \leq \gamma(u)$ para cualquier $u \in \mathbb{S}$. Tomemos $w \in \mathbb{S}$ tal que $g(v, w)$ y definamos una nueva aplicación

$$\alpha : \mathbb{R} \to V : t \mapsto \cos(t)v + \operatorname{sen}(t)w.$$

Entonces, es inmediato que $\alpha(0) = v$ y $\alpha'(0) = w$. Además,

$$\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle = \langle v, v \rangle \cos^2(t) + 2 \langle v, w \rangle \operatorname{sen}(t)\cos(t) + \langle w, w \rangle \operatorname{sen}^2(t) = 1$$

ya que $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$ y $\langle v, w \rangle = 0$, luego $\alpha(t) \in \mathbb{S}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, podemos aplicarle γ con lo que queda $\gamma(\alpha(0)) \leq \gamma(\alpha(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Llamando $\beta = \gamma \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos $\beta(0) \leq \beta(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por otro lado, trabajando en coordenadas en una base ortonormal, y tomando X e Y como los vectores columna coordenadas de v y w, y A la matriz de f en esta base (que es simétrica),

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= g(\alpha(t), f(\alpha(t))) = (\cos(t)X + \operatorname{sen}(t)Y)^t A(\cos(t)X + \operatorname{sen}(t)Y) \\
&= (\cos(t)X^t + \operatorname{sen}(t)Y^t)A(\cos(t)X + \operatorname{sen}(t)Y) \\
&= \cos^2(t)X^tAX + 2\cos(t)\operatorname{sen}(t)X^tAY + \operatorname{sen}^2(t)Y^tAY.
\end{aligned}$$

Derivando respecto de t,

$$\beta'(t) = 2\cos^2(t)X^tAY + 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)(Y^tAY - X^tAX) - 2\operatorname{sen}^2(t)X^tAY,$$

y obtenemos que $\beta'(0) = 2X^tAY = 2g(v, f(w)) = 0$, puesto que β alcanza en $t = 0$ su mínimo absoluto y es derivable.

En consecuencia, como f es autoadjunto, $g(f(v), w) = 0$. Pero esto ocurre para cada $w \in S$ ortogonal a v y por tanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Podemos encontrar así $e_1 \in V$ unitario y vector propio. Si tomamos $W = L(\{e_1\})^\perp$ y $u \in W$, entonces

$$\langle f(u), e_1 \rangle = \langle u, f(e_1) \rangle = \lambda \langle u, e_1 \rangle = 0,$$

con lo que $f(u) \in W$. Hemos demostrado que $f_{|W} : W \to W$ es un endomorfismo y por tanto puede aplicársele la hipótesis de inducción, con lo que existen $\{e_2, \dots, e_n\}$ base ortonormal de W de vectores propios. Por consiguiente $\{e_1, \dots, e_n\}$ es la base buscada. $\square$

3.3. Isometrías

Definición 3.32. *Sean (V, g) y (W, g') dos espacios vectoriales euclídeos. Diremos que una aplicación lineal $f : V \to W$ es una isometría cuando sea biyectiva y conserve el producto escalar, es decir, para cualesquiera $u, v \in V$, se cumpla que*

$$g'(f(u), f(v)) = g(u, v).$$

En tal caso, diremos que los espacios (V, g) y (W, g') son isométricos.

Nota 3.33. La condición de que sea biyectiva es simplemente para asegurar que los espacios V y W tengan la misma dimensión. El simple hecho de que conserve el producto escalar nos asegura que la aplicación es inyectiva.
En efecto, si f conserva el producto escalar y tomamos $u \in \mathrm{N}(f)$, entonces $g'(f(u), f(u)) = 0$ luego $g(u, u) = 0$, lo que nos dice que $u = 0$, y hemos probado que $\mathrm{N}(f) = \{0\}$.

Observemos que el hecho de conservar el producto escalar hace que se conserve todo lo definido a partir de él: la norma, el ángulo de dos vectores, la ortogonalidad de vectores y subespacios, etc. En particular, dado un subespacio $U \subseteq V$ y $f : V \to V$ una isometría, se cumple que $f(U^\perp) = f(U)^\perp$, como puede demostrarse fácilmente.

Lema 3.34. *Sean (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \to V$ es una aplicación lineal. Dada una base $\mathbb{B}$ de V, definimos $A = M(f, \mathbb{B})$ y $G = M(g, \mathbb{B})$. Entonces, f es isometría si, y sólo si,*

$$AGA^t = G.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que si $u, v \in V$ tienen por coordenadas los vectores fila X e Y, respectivamente, entonces $g'(f(u), f(v)) = g(u, v)$ implica que $(XA)G(YA)^t = XGY^t$, es decir, $X(AGA^t)Y^t = XGY^t$ pero, como ha de cumplirse para cualesquiera $X, Y \in \mathbb{R}^n$, esto es equivalente a $AGA^t = G$. □

Como consecuencia, en el caso de que $\mathbb{B}$ sea ortonormal, basta comprobar que $A \in O(n)$ ya que $M(g, \mathbb{B}) = I_n$. Vamos a ver que precisamente las bases ortonormales nos permiten probar que todos los espacios vectoriales euclídeos *son como* $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposición 3.35. *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo de dimensión n.*

a) (V, g) es isométrico a $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

b) Si denotamos por $\mathrm{Iso}(V, g)$ al grupo de endomorfismos isométricos de (V, g), entonces $\mathrm{Iso}(V)$ es un grupo junto con la composición, isomorfo al grupo ortogonal $O(n)$.

Demostración. Consideremos una base ortonormal $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de (V, g) y la aplicación coordenadas $C_{\mathbb{B}} : V \to \mathbb{R}^n$, que es un isomorfismo de espacios vectoriales. Si probamos que conserva el producto escalar, tendremos el apartado (a). Dados $u, v \in V$, podemos expresar $u = u_1e_1 + \ldots + u_ne_n$ y $v = v_1e_1 + \ldots + v_ne_n$, con lo que $C_{\mathbb{B}}(u) = (u_1, \ldots, u_n)$ y $C_{\mathbb{B}}(v) = (v_1, \ldots, v_n)$. De aquí que

$$g(u, v) = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n = \langle C_{\mathbb{B}}(u), C_{\mathbb{B}}(v) \rangle,$$

y, en consecuencia, $C_{\mathbb{B}}$ conserva el producto escalar.

Para probar (b), en primer lugar hay que ver que efectivamente $\mathrm{Iso}(V, g)$ es un grupo, lo cual se deja como ejercicio. Para obtener un isomorfismo $\Phi : \mathrm{Iso}(V, g) \to O(n)$ utilizamos también la base ortonormal $\mathbb{B}$, definiendo $\Phi(f) = M(f, \mathbb{B})^t$. Que la aplicación así definida es un isomorfismo es consecuencia de que $M(f_1 \circ f_2, \mathbb{B})^t = M(f_1, \mathbb{B})^t \cdot M(f_2, \mathbb{B})^t$ y de que $M(f^{-1}, \mathbb{B})^t = (M(f, \mathbb{B})^{-1})^t$ para cualesquiera $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Iso}(V, g)$. □

Notemos que hemos definido el isomorfismo como $\Phi(f) = M(f, \mathbb{B})^t$. Si no hubiéramos traspuesto la matriz, esta aplicación no conserva el producto de ambos grupos sino que "invierte el orden de los factores" y, como el producto de matrices no es conmutativo, se estropea el isomorfismo. Una interpretación de trasponer las matrices es que cuando se trabaja por columnas, la matriz de f en una base es la traspuesta de la que sale al trabajar por filas, luego si hubiéramos operado por columnas, este problema no habría aparecido.

Volviendo al resultado, nos dice algo que ya habíamos comentado: al igual que se toman coordenadas en una base arbitraria para trabajar en $\mathbb{R}^n$, cuando tenemos un producto escalar podemos tomar como base una ortonormal y también se trasladan las propiedades de la métrica a $\mathbb{R}^n$ y, lo que es nuevo, las isometrías también se conservan.

Otra consecuencia del resultado anterior es que toda isometría f tiene determinante 1 ó -1, ya que la matriz de f en una base ortonormal es ortogonal. Esto nos permite clasificar las isometrías en dos grandes familias.

Definición 3.36. *Diremos que una isometría $f : V \to V$ es directa cuando* $\det(M(f, \mathbb{B})) = 1$, *para cierta base ortonormal $\mathbb{B}$ y diremos que es inversa si* $\det(M(f, \mathbb{B})) = -1$.

Observemos que no es realmente necesario trabajar en una base ortonormal para estudiar si una isometría es directa o inversa: si lo hacemos en una base cualquiera, entonces será directa cuando el determinante de la matriz en esa base sea positivo e inversa si es negativo. Esto se corresponde con que las isometrías directas son las que *conservan la orientación* mientras que las inversas *invierten la orientación*. Para más detalles sobre este tema, puede consultarse el apéndice A.

Como consecuencia, si componemos dos isometrías directas o dos isometrías inversas, obtendremos una directa y, si componemos una isometría directa con una inversa (o viceversa), obtendremos una inversa. Por decirlo de algún modo, ocurre como con la regla de los signos para el producto.

3.3.1. Estructura de las isometrías

Conocer la estructura de las isometrías de un espacio vectorial euclídeo no es más que clasificarlas, esto es, decir de qué forma son todas ellas, y ese será nuestro objetivo en esta sección. A partir de la potente herramienta que supone la diagonalización de un endomorfismo, podremos saber cómo se comporta una isometría con respecto a algunos subespacios especiales.

Por tanto, empezaremos por ver cómo pueden ser los valores propios de las isometrías.

Lema 3.37. *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo. Si $f : V \to V$ es una isometría y $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f, entonces $\lambda^2 = 1$.*

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f, entonces dado $u \neq 0$ vector propio asociado a λ, como f es una isometría $g(f(u), f(u)) = g(\lambda u, \lambda u) = g(u, u)$, pero $g(\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 g(u, u)$, de donde $\lambda^2 = 1$ ya que $u \neq 0$. Por tanto, o bien $\lambda = 1$ o bien $\lambda = -1$. □

Vista la restricción que tienen los valores propios, no nos será difícil clasificar las isometrías sobre un espacio de dimensión 2, un plano vectorial (nuestro caso base para un espacio n-dimensional). Como hemos visto en la Proposición 3.35, escogiendo una base ortonormal y tomando coordenadas, podemos suponer que estamos trabajando en $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, donde la base usual $\mathbb{B}_o$ es ortonormal. Veamos algunos ejemplos antes de entrar en el resultado final.

Ejemplos 3.38. Considermos $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el plano euclídeo con el producto escalar usual y $\mathbb{B}_o$ la base usual.

1. Dado $\vartheta \in \mathbb{R}$, consideremos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$M(f, \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

   Se deja como ejercicio ver que estamos ante una isometría. Consideremos un vector unitario de la forma $x = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$f(x) = (\cos\vartheta\cos\alpha - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\vartheta\cos\alpha + \cos\vartheta\operatorname{sen}\alpha) = (\cos(\vartheta+\alpha), \operatorname{sen}(\vartheta+\alpha)),$$

   lo que nos dice que hemos *girado* el vector x un ángulo ϑ. En consecuencia, a la aplicación f la llamaremos *rotación de ángulo* ϑ (en el sentido antihorario).

   Observemos que para $\vartheta = 0$, la aplicación es la identidad (girar un ángulo nulo es no hacer ningún movimiento) y, para $\vartheta = \pi$, es la opuesta de la identidad, y lo que tenemos en una simetría central.

2. Dada una base ortonormal $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^2$, definamos ahora la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   En otras palabras, si $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$, entonces $f(e_1) = e_1$ y $f(e_2) = -e_2$. Esta aplicación es una simetría vectorial ya que $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$. El subespacio U generado por e_1 queda invariante luego la llamaremos *simetría axial respecto de* U.

Lo que puede parecer sorprendente es que no hay más isometrías que las que hemos descrito.

Proposición 3.39 (Estructura de las isometrías del plano). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una isometría respecto al producto escalar usual. Entonces ocurre una (y sólo una) de las siguientes dos situaciones:*

- *f es una rotación de un cierto ángulo $\vartheta \in \mathbb{R}$.*
- *f es una simetría axial respecto de cierta recta vectorial.*

Demostración. Dado que f es una isometría respecto del producto escalar usual, se cumple que $A = M(f, \mathbb{B}_o) \in O(2)$ luego $\det(A)^2 = 1$. Escribamos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y distingamos casos según el signo de $\det(A) = ad - bc$.

a) Si $ad - bc = -1$, el polinomio característico de A está dado por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc = \lambda^2 - T\lambda - 1,$$

donde T es la traza de A. Los valores propios de f son $(T \pm \sqrt{T^2+4})/2$, que son dos números reales distintos y, por el Lema 3.37, han de ser 1 y -1. Así, no queda más remedio que los subespacios propios V_1 y V_{-1} estén generados por sendos vectores propios unitarios e_1 y e_2, respectivamente. Definiendo $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$, se cumple que $f(e_1) = e_1$ y $f(e_2) = -e_2$, luego

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pero es que e_1 y e_2 son ortogonales por ser f una isometría ya que $g(e_1, e_2) = g(f(e_1), f(e_2)) = g(e_1, -e_2) = -g(e_1, e_2)$, de donde $g(e_1, e_2) = 0$. Deducimos que f es una simetría axial respecto del subespacio V_1.

b) Si $\det(A) = 1$, usando que $AA^t = I_2$, llegamos a que

$$AA^t = I_n \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras igualdades, deducimos que existen $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $a = \cos\alpha$, $b = \operatorname{sen}\alpha$, $c = \cos\gamma$ y $d = \operatorname{sen}\gamma$. Ahora la tercera ecuación se escribe como

$$0 = ac + bd = \cos\alpha \operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\alpha\cos\gamma = \cos(\gamma - \alpha).$$

De aquí que $\alpha = \gamma + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ o bien $\alpha = \gamma + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ y distinguimos, a su vez, dos subcasos:

i) Si $\alpha = \gamma + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, entonces $\cos\alpha = \cos\gamma$ y $\cos\alpha = -\operatorname{sen}\gamma$ luego $\det(A) = -\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = -1$, lo que nos lleva a una contradicción.

ii) Si $\alpha = \gamma + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, entonces $\cos\alpha = -\cos\gamma$ y $\cos\alpha = \operatorname{sen}\gamma$ luego, tomando $\vartheta = -\gamma$,

$$A = M(f, \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \qquad \square$$

En el último caso tenemos una rotación que tiene la matriz que habíamos visto en el ejemplo en la base usual. No obstante, si hubiéramos trabajado en otra base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la demostración, habríamos llegado exactamente a la misma expresión, quizás para otro ángulo ϑ' distinto. Es de esperar que el ángulo de la expresión matricial no dependa de la matriz, pero esto podemos probarlo fácilmente ya que la traza de la matriz de f es un invariante y, por tanto, $2\cos\vartheta$ es también un invariante. De aquí deducimos que ϑ no cambia al cambiar de base salvo múltiplo de 2π (lo que era de esperar) o cambio de signo. Este cambio de signo se producirá cuando la nueva base en que expresamos la rotación tenga orientación distinta de la original.

Teorema 3.40 (Estructura de las isometrías). *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría respecto del* *producto escalar usual. Entonces, existe una base ortonormal* $\mathbb{B}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *tal que*

$$M(f,\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& M_1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& M_k \end{pmatrix}$$

donde para cada $i \in \{1,\dots,k\}$*, existe* $\vartheta_i \in \mathbb{R}$ *tal que* $M_i = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_i & \operatorname{sen}\vartheta_i \\ -\operatorname{sen}\vartheta_i & \cos\vartheta_i \end{pmatrix}$.

Demostración. Consideremos los subespacios propios V_1 y V_{-1} de dimensiones r y s, respectivamente. Como $Z = V_1 \oplus V_{-1}$ es suma directa, tenemos que $\dim(Z) = r+s$. Pero además esta suma es ortogonal, luego si tomamos $\{e_1,\dots,e_r\}$ y $\{e_{r+1},\dots,e_s\}$ bases ortonormales de V_1 y V_{-1}, respectivamente, el conjunto $\{e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_s\}$ es una base ortonormal de Z. Si $Z = V$, ya hemos terminado, pues esta base es una base ortonormal de V en la que la matriz de f toma la forma del enunciado (sin bloques de la forma M_i).

En el supuesto de que $Z \neq V$, es decir, $\dim(V) > r+s$, tenemos que $f_{|Z} : Z \to Z$ sigue siendo una isometría, ya que $f(Z) \subseteq Z$ y, como $Z^\perp \neq \{0\}$, se cumple que $f(Z^\perp) \subseteq Z^\perp$ ya que, si $x \in Z^\perp$, para cualquier $y \in Z$ se tiene que $0 = \langle x,y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$, luego $f(x) \in Z^\perp$. Al ser f biyectiva, $f_{|Z^\perp} : Z^\perp \to Z^\perp$ también es una isometría y $(f_{|Z^\perp})^{-1} = (f^{-1})_{|Z^\perp}$ (lo denotaremos por $f^{-1}_{|Z^\perp}$).

Tomamos ahora $h = f_{|Z^\perp} + f^{-1}_{|Z^\perp} : Z^\perp \to Z^\perp$. Entonces, para $x,y \in Z^\perp$,

$$\begin{aligned} \langle h(x),y\rangle = \left\langle f(x) + f^{-1}(x), y\right\rangle &= \langle f(x),y\rangle + \left\langle f^{-1}(x),y\right\rangle \\ &= \left\langle x, f^{-1}(y)\right\rangle + \langle x, f(y)\rangle \\ &= \left\langle x, f(y) + f^{-1}(y)\right\rangle = \langle x, h(y)\rangle \end{aligned}$$

y h es autoadjunto luego diagonalizable por congruencia.

Por tanto, existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in Z^\perp$ no nulo tales que $\lambda u = h(u) = f(u) + f^{-1}(u)$ y, aplicando f a esta igualdad, $f(f(u)) + u = \lambda f(u)$, esto es, $f(f(u)) = \lambda f(u) - u$. Por consiguiente, $f(f(u))$ es combinación lineal de u y $f(u)$.

Sea $\Pi = L(\{u, f(u)\})$, que es un plano vectorial ya que u y $f(u)$ son linealmente independientes y, como consecuencia de lo antes visto, $f(\Pi) \subseteq \Pi$, con lo que $f(\Pi) = \Pi$. Por tanto, de la Proposición 3.39 aplicada a $f_{|\Pi}$, se deduce que existen $\{e_{r+s+1}, e_{r+s+2}\}$ base ortonormal de Π y $\vartheta_1 \in \mathbb{R}$ (no múltiplo de π) de forma que

$$M_1 = M(f_{|\Pi}, \{e_{r+s+1}, e_{r+s+2}\}) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \operatorname{sen}\vartheta_1 \\ -\operatorname{sen}\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{pmatrix}$$

(es decir, $f_{|\Pi}$ es una rotación ya que no tiene vectores propios en Π, pues en tal caso tendría que existir $x \in \Pi$ tal que $f(x) = \pm x$). Como quiera que $\Pi \subseteq Z^\perp$, se tiene que $\{e_1,\dots,e_{r+s+2}\}$ es base ortonormal de $Z \oplus \Pi$.

Si $\dim(V) > r+s+2$, tomemos ahora $Z_2 = Z \oplus \Pi$. Con argumentos análogos a los anteriores se demuestra que $f_{|Z_2}$ y $f_{|Z_2^\perp}$ siguen siendo isometrías y que f no tiene vectores propios en $Z_2^\perp$. Tomando ahora $h_2 = f_{|Z_2^\perp} + f^{-1}_{|Z_2^\perp}$, h_2 vuelve a ser autoadjunto y existen $\Pi_2 \subseteq Z_2^\perp$ plano vectorial, $\{e_{r+s+3}, e_{r+s+4}\}$ base ortonormal de Π y $\vartheta_2 \in \mathbb{R}$ (no múltiplo de π) para los que $f(\Pi_2) = \Pi_2$ y

$$M_2 = M(f_{|\Pi_2}, \{e_{r+s+3}, e_{r+s+4}\}) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & \operatorname{sen}\vartheta_2 \\ -\operatorname{sen}\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que la dimensión de V es finita, podemos repetir el proceso hasta que tengamos tantos vectores como la dimensión de V y así llegaremos a una base ortonormal

$$\mathbb{B} = \{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_{r+s}, e_{r+s+1}, e_{r+s+2} \ldots, e_{r+s+2k-1}, e_{r+s+2k}\},$$

donde $\dim(V) = r+s+2k$, en la que la matriz de f es como la del enunciado. $\square$

Notemos que el teorema viene a decir que por cada valor propio 1 ó -1, hay un 1 ó -1 en la matriz de la supuesta base ortonormal, esto es, las raíces reales del polinomio característico del automorfismo f. Sin embargo, el automorfismo puede no tener tantos valores propios como dicha dimensión, pero sabemos que el polinomio tiene exactamente tantas raíces complejas como dimensión del espacio, y las que no son reales están agrupadas de dos en dos (cada una con su conjugada) de forma que el polinomio puede factorizarse como producto de polinomios reales de grados 1 y 2. Los polinomios de grado 2 vienen a representar los planos que se van extrayendo en cada paso de la demostración.

Vamos a aplicar el resultado para ver cómo son todas las isometrías del espacio $\mathbb{R}^3$. Para dimensiones mayores se pueden obtener clasificaciones similares, sólo que cada vez los casos van siendo más y más numerosos.

Isometrías del espacio

Aplicando directamente el teorema de clasificación para $n = 3$, nos encontramos con que si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría respecto del producto escalar usual, entonces existe una base ortonormal $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ en la que la matriz $A = M(f, \mathbb{B})$ es de uno de los siguientes tipos:

a) Si no hay bloques del tipo M_i, la matriz será de uno de los siguientes cuatro tipos

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{iv)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   i) Si $A = I_3$, entonces f es la aplicación identidad.

   ii) En este caso, f es una simetría vectorial respecto del subespacio $L(\{e_1, e_2\})$. Por tanto, a este tipo de isometría la llamaremos simetría vectorial respecto de un plano o simetría vectorial especular.

   iii) En este otro caso, f es una simetría vectorial respecto del subespacio $L(\{e_1\})$. Por tanto, este tipo de isometría se conoce como simetría vectorial respecto de una recta o simetría vectorial axial.

iv) Si $A = -I_3$, entonces f es una simetría vectorial respecto del subespacio $\{0\}$. Por tanto, también se denomina simetría vectorial respecto del origen o simetría vectorial central.

b) Si existe un bloque $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$, entonces la matriz de la aplicación es de alguno de los siguientes tipos

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 & -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

i) En el primer caso, como $\lambda = 1$ es valor propio y $\dim(V_1) = 1$, hay una recta $L(\{e_1\})$ de vectores fijos. Observemos también que si restringimos f al plano $L(\{e_2, e_3\})$, queda un giro de ángulo ϑ. Por tanto, f se llama giro respecto del eje $L(\{e_1\})$.

ii) En el segundo caso, la isometría transforma cada vector de $L(e_1)$ en su opuesto como si fuera una simetría respecto de $L(\{e_1\})^\perp$. Además, como en el caso anterior, hace un giro de ángulo ϑ en el plano $L(\{e_2, e_3\})$. Esta isometría es la que resulta de componer la simetría y el giro.

Es interesante observar que los cuatro casos del apartado (a) están dentro de los dos del apartado (b), justamente cuando ϑ es múltiplo de π. En consecuencia, los dos casos del apartado (b) recogen todas las isometrías del espacio, siendo el primero el de las isometrías directas y el segundo el de las inversas.

3.3.2. Formulación y reconocimiento de isometrías

Nos planteamos ahora dos problemas muy comunes: el primero es formular una isometría, es decir, hallar la expresión de una isometría que cumpla ciertas propiedades; el segundo es el recíproco, esto es, dada una isometría, saber de qué tipo es.

En primer lugar, recordemos que en un espacio vectorial euclídeo (V, g), si $\mathbb{B}$ es una base cualquiera, f es un endomorfismo y consideramos $A = M(f, \mathbb{B})$ y $G = M(g, \mathbb{B})$,

- f es una isometría respecto de g si, y sólo si, $AGA^t = G$.
- Siempre se cumple que $\det(A) = \pm 1$ si f es isometría.
- La traza y el determinante de A no dependen de la elección de la base.

La formulación de isometrías es el proceso más sencillo: simplemente hay que encontrar una base en la que sepamos bien cómo se comporta la aplicación y después hacer un cambio de base si nos interesa expresar el resultado en otra base distinta. Veamos cómo se hace a través de algunos ejemplos.

Ejemplos 3.41.

1. Hallar la ecuación de la simetría axial en $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta de ecuación $x - 2y = 0$.

   Observemos que un vector unitario contenido en la recta es $u_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ y un vector que forma con éste una base ortonormal es $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$. En la base $\mathbb{B} = \{u_1, u_2\}$, la matriz de la simetría f que estamos buscando tiene una expresión muy sencilla, puesto que $f(e_1) = e_1$ y $f(e_2) = -e_2$. Calculando la matriz del cambio de base a la base usual $M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o)$, tenemos

$$\begin{aligned} M(f, \mathbb{B}_o) &= M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o)^t \cdot M(f, \mathbb{B}) \cdot M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podríamos haber considerado la base sólo ortogonal, pero el hecho de haberla hecho ortonormal es para que la matriz del cambio de base sea ortogonal y no sea necesario calcular la inversa sino la traspuesta.

2. Calcular la ecuación de la isometría de $\mathbb{R}^3$ que es un giro en el plano de ecuación $x-y=0$ que lleva el vector $(1, 1, 0)$ en el vector $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ y que es una simetría en la dirección ortogonal a dicho plano.

   En este caso, observemos que los dos vectores que aparecen en el enunciado tienen el mismo módulo y forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$, lo que nos determina completamente el giro. Tomemos la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1)$ y $u_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. La base $\mathbb{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ de forma que los dos primeros vectores son una base ortonormal del plano $x - y = 0$. En esta base, la matriz de la isometría pedida f es

$$M(f, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & 0 \\ -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Haciendo el cambio de base como en el apartado anterior, llegamos a que

$$M(f, \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   En este tipo de ejercicio hay que tener cuidado porque, si bien el ángulo de los dos vectores nos dice cómo tiene que ser el giro, no lo determina completamente pues puede ser que haya que tomar el ángulo con signo opuesto. En cualquier caso, vemos que el ángulo de giro para llevar $(1, 1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ es el que tiene sentido antihorario en la base $\{u_1, u_2\}$ del plano que los contiene.

Reconocer isometrías del plano

Supongamos que (V, g) es un plano vectorial euclídeo y $\mathbb{B}$ una base de V. Si $f : V \to V$ es una isometría y $A = M(f, \mathbb{B})$, tenemos los siguientes casos:

a) Si $\det(A) = 1$ entonces f es un giro vectorial. Para calcular el ángulo basta darse cuenta de que $\text{traza}(A) = 2\cos\vartheta$ y despejar el ángulo.

b) Si $\det(A) = -1$, entonces f es una simetría axial. El eje puede calcularse como el subespacio propio para el valor propio 1. En otras palabras, es el conjunto de vectores fijos, es decir, las soluciones del sistema $x \cdot A = x$.

Otra forma de ver qué tipo de isometría es es calculando el polinomio característico, que es de segundo grado. Si tiene raíces reales, se trata de una simetría, mientras que, en caso contrario, es un giro.

Reconocer isometrías del espacio

Supongamos que (V, g) es un espacio vectorial euclídeo de dimensión 3 y $\mathbb{B}$ una base de V. Si $f : V \to V$ una isometría con $A = M(f, \mathbb{B})$, entonces calculamos el polinomio característico.

a) En el caso en el que tenga tres raíces reales, se trata de una simetría vectorial respecto del subespacio propio para el valor propio 1.

b) Si sólo tiene un valor propio distingimos dos casos:

   i) Si $\det(A) = 1$, entonces es un giro respecto de un eje. El eje es el subespacio de vectores fijos, es decir el subespacio propio para el valor propio 1, y, observando que $\text{traza}(A) = 1 + 2\cos\vartheta$, se calcula el ángulo fácilmente.

   ii) Si $\det(A) = -1$, entonces es un giro con simetría. La simetría es respecto del subespacio V_{-1} y el ángulo se calcula igual que en el caso anterior mediante la traza, observando que $\text{traza}(A) = -1 + 2\cos\vartheta$.

3.4. Ejercicios propuestos

Para repasar

Ejercicio 3.4. Determinar cuáles de las siguientes matrices simétricas representan productos escalares en $\mathbb{R}^n$ respecto de la base usual, para $n = 2$, $n = 3$ ó $n = 4$ según el caso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.5. En lo que sigue, V será un espacio vectorial y g un producto escalar en V. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- Dos vectores $u, v \in V$ son perpendiculares si, y sólo si, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
- Si b es una métrica en V con $\det(M(b, \mathbb{B})) > 0$ en cierta base $\mathbb{B}$, entonces b es un producto escalar.
- Dada una base $\mathbb{B}$ de V, existe un único producto escalar sobre V en el que $\mathbb{B}$ es ortonormal.
- Si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a una base $\mathbb{B}$ de V, la matriz del cambio de base a la nueva base ortogonalizada es triangular.
- Si dos vectores $u, v \in V$ forman un ángulo α, entonces u y $-v$ forman un ángulo $\pi - \alpha$.

- Los vectores que deja fijos una isometría forman un subespacio vectorial.
- Si una aplicación lineal $f : V \to V$ conserva la norma, entonces es una isometría.
- Si A es una matriz simétrica congruente con otra matriz B, entonces B es simétrica.
- Todo endomorfismo autoadjunto es biyectivo.
- Dos vectores propios linealmente independientes de un endomorfismo autoadjunto de V son ortogonales.
- Los valores propios reales de una isometría $f : V \to V$ son 1 ó -1.
- Toda simetría ortogonal respecto de un subespacio de V es biyectiva.
- La matriz de una isometría respecto de una base ortonormal es ortogonal.
- Toda isometría es un endomorfismo autoadjunto.

Para entrenar

Ejercicio 3.6. Denotemos por Sim_n al conjunto de todas las matrices reales simétricas de orden n, que es un espacio vectorial. Demostrar que $g : \mathrm{Sim}_n \times \mathrm{Sim}_n \to \mathbb{R}$ definido por

$$g(A, B) = \mathrm{traza}(A \cdot B)$$

es un producto escalar en Sim_n. En Sim_2, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, calcular el ángulo que forma la matriz identidad I_2 con la matriz A_λ que tiene valores 1 en la diagonal principal y λ en las otras dos entradas.

Ejercicio 3.7. Dada una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, probar que

$$\mathrm{traza}(A)^2 \leq n \cdot \mathrm{traza}(A^2).$$

Ejercicio 3.8. Supongamos que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es una función continua positiva. En el espacio de polinomios $\mathcal{P}_n$ de grado menor o igual que n con coeficientes reales, demostrar que la aplicación $g : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)f(t)dt$$

es un producto escalar.

Ejercicio 3.9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la métrica g, definida en la base usual por

$$M(g, \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Comprobar que la forma cuadrática asociada a g es la siguiente (y deducir de esto que estamos ante un producto escalar):

$$\phi(x, y, z) = (x - y - z)^2 + y^2 + z^2.$$

b) Hallar, a partir de la base usual, una base ortonormal utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

Ejercicio 3.10. Consideremos el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 4 con el producto escalar usual

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ para obtener una base ortonormal de este espacio.

Ejercicio 3.11. En el espacio de matrices cuadradas de orden 2, se considera el producto escalar $\langle A, B\rangle = \text{traza}(A \cdot B^t)$. Se definen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el ángulo que forman A y B.

b) Hallar la proyecciones ortogonales de A sobre el subespacio generado por B y sobre el subespacio ortogonal al generado por B.

c) Hallar la matriz simétrica de A respecto del subespacio

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} a - b + c - d = 0 \\ 3d - 2a = 0 \end{array} \right\}.$$

d) Calcular el subespacio ortogonal al subespacio U del apartado anterior.

Ejercicio 3.12. Supongamos que U_1 y U_2 son subespacios de un espacio vectorial V tales que $U_1 \oplus U_2 = V$. Demostrar que existe un producto escalar g en V tal que U_1 y U_2 son subespacios ortogonales. ¿Es único este producto escalar?

Ejercicio 3.13. Consideremos la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontrar una matriz ortogonal $P \in O(3)$ tal que $P \cdot A \cdot P^t = I_3$.

Ejercicio 3.14. Demostrar que la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y - z, -x + y - z, -x - y + z)$$

es autoadjunta respecto del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ y encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ en la que la matriz de f sea diagonal.

Ejercicio 3.15. En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g dada por

$$M(g, \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que g es un producto escalar y ver que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y) = (x, x)$ es autoadjunto respecto de g. Encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$ que diagonalice a f.

Ejercicio 3.16. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \to V$ un endomorfismo autoadjunto respecto de g. Demostrar que V es suma directa ortogonal de $\mathrm{Img}(f)$ y $\mathrm{N}(f)$.

Ejercicio 3.17. Hallar las ecuaciones de la simetría axial en $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual que deja fija a la recta de ecuación $3x - 4y = 0$.

Ejercicio 3.18. Hallar las ecuaciones del giro en $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual que lleva el vector $(-4, 3)$ en $(5, 0)$.

Ejercicio 3.19. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, hallar las ecuaciones en la base usual de las isometrías que se describen en cada uno de los siguientes casos:

a) Simetría axial respecto del eje de ecuaciones $x + z = 0$, $3x - 2y = 0$.

b) Giro de $\frac{\pi}{4}$ respecto del eje generado por $(1, 1, 1)$ (elegir un sentido de giro).

c) Simetría especular respecto del plano de ecuación $4x - y - z = 0$.

d) Giro de $\frac{\pi}{6}$ respecto del eje de ecuaciones $-y + z = 3x - y = 0$ y simetría respecto del plano ortogonal al eje (elegir un sentido de giro).

e) Isometría que fija el vector $(1, 1, 0)$ y es un giro en el plano ortogonal a éste, que lleva el vector $(0, 0, \sqrt{2})$ en $(1, -1, 0)$.

f) Isometría que lleva el vector $(-2, 0, 1)$ en su opuesto y es una simetría axial en el plano ortogonal a éste que fija el vector $(1, 1, 2)$.

Ejercicio 3.20. En el plano $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, demostrar que:

a) La composición de dos giros de ángulos θ_1 y θ_2 en sentido horario es un giro de ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

b) La composición de dos simetrías axiales es un giro de ángulo el doble del menor de los ángulos que forman los ejes de simetría.

c) La composición de un giro y una simetría axial es otra simetría axial.

Ejercicio 3.21. Hallar todas las isometrías f de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, que cumplen que $f \circ f$ es la identidad en $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si n es impar, entonces no existe ninguna isometría $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cumpliendo $f \circ f = -1_{\mathbb{R}^n}$.

Para profundizar

Ejercicio 3.22. Supongamos que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y consideramos su base dual $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\} \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$. Consideremos la aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = (e_1^*(x))^2 + (e_2^*(x))^2 + \ldots + (e_n^*(x))^2$$

Demostrar que ϕ es la forma cuadrática asociada a la única métrica en $\mathbb{R}^n$ para la que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal.

Si observamos que $e_i^*(x) = 0$ es la ecuación del plano generado por $\{e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n\}$, esto nos da una relación interesante entre la base que queremos que sea ortonormal y la fórmula de la forma cuadrática asociada (de donde se deduce fácilmente la expresión de la métrica). Si además introdujéramos coeficientes 0 o -1 a los términos $e_i^*(x)$ en la expresión de $\phi(x)$ de arriba, encontraríamos una forma cómoda de definir métricas con la nulidad y signatura deseadas.

Ejercicio 3.23. Demostrar que en un espacio vectorial euclídeo, los ángulos de cualquier triángulo suman π, es decir, dados $u, v \in V$ linealmente independientes, se tiene que

$$\angle(u, u - v) + \angle(u, v) + \angle(v, v - u) = \pi.$$

Ejercicio 3.24. Se define un *semiespacio abierto* de V como un subconjunto $H \subseteq V$ de forma que existe $u \in V$ no nulo tal que $H = \{v \in V : g(u, v) > 0\}$. Demostrar que el concepto de subespacio abierto no depende del producto escalar que se elija en V, es decir, si tomamos otro producto escalar g', los semiespacios para g' coinciden con los semiespacios para g.

Ejercicio 3.25. Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $f : V \to V$ un endomorfismo. Demostrar que existe una única aplicación lineal $\hat{f} : V \to V$ tal que $g(u, f(v)) = g(\hat{f}(u), v)$ para cualesquiera $u, v \in V$. A esta aplicación se le llama *adjunta* de f. Dada una base de $\mathbb{B}$ de V, comparar las matrices $M(f, \mathbb{B})$ y $M(\hat{f}, \mathbb{B})$.

Ejercicio 3.26. Sea V un espacio vectorial. Dados $u, v \in V$, se define el segmento que une u y v como el conjunto $[u, v] = \{tu + (1 - t)v : t \in [0, 1]\}$. Diremos que un subconjunto no vacío $S \subseteq V$ es *convexo* cuando para cualesquiera $u, v \in S$ se cumpla que $[u, v] \subseteq S$ (en otras palabras, cuando dados dos puntos en el conjunto, el segmento que los une está también contenido en el conjunto). Demostrar las siguientes propiedades:

a) Todo subespacio vectorial es convexo.

b) La intersección de subconjuntos convexos es convexa.

c) Si a todos los elementos de un subconjunto convexo les sumamos un vector fijo, el resultado es también convexo.

d) Un semiespacio es un subconjunto convexo.

Lo que hemos dicho hasta ahora no depende de que si tenemos un producto escalar, pero supongamos ahora que estamos en un espacio vectorial euclídeo (V, g). Demostrar las siguientes afirmaciones:

e) Para cada $r > 0$, la bola de radio r, dada por $\{u \in V : \|u\| \leq r\}$, es convexa.

Ejercicio 3.27. Supongamos que una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface que $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación: existe una métrica g tal que f es una simetría ortogonal respecto de g.

Ejercicio 3.28. Hallar todas las isometrías f de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, que cumplen que $f \circ f \circ f$ es la identidad en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.29. Supongamos que b es una métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^n$ y sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ dos vectores en el mismo cono temporal. Demostrar que

i) $b(u, v) \leq -\|u\| \cdot \|v\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz lorentziana)

ii) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad de Minkowski lorentziana)

A. Orientación en un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial finitamente generado y sea $\mathfrak{B}$ el conjunto de las bases de V, es decir,

$$\mathfrak{B} = \{\mathbb{B} : \mathbb{B} \text{ es base de } V\}.$$

Dadas dos bases $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ de V, podemos considerar su matriz cambio de base $M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)$. Si trabajamos por filas, esta matriz cumple que

$$C_{\mathbb{B}_2}(u) = C_{\mathbb{B}_1}(u) \cdot M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2),$$

y sabemos que no es otra matriz que la que tiene por filas las coordenadas de los vectores de la base $\mathbb{B}_1$ en la base $\mathbb{B}_2$.

Definición A.1. *En las condiciones anteriores, diremos que dos bases* $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2 \in \mathfrak{B}$ *definen la misma orientación y lo denotaremos por* $\mathbb{B}_1 \sim \mathbb{B}_2$ *cuando* $\det(M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)) > 0$.

Lema A.2. *La relación* $\sim$ *sobre* $\mathfrak{B}$ *es de equivalencia.*

Demostración. Veamos que se cumplen las tres condiciones.

i) Reflexiva. Dada $\mathbb{B} \in \mathfrak{B}$, $\det(M(\mathbb{B} \to \mathbb{B})) = \det(I_n) = 1 > 0$, luego $\mathbb{B} \sim \mathbb{B}$.

ii) Simétrica. Si $\mathbb{B}_1 \sim \mathbb{B}_2$, entonces $\det(M(\mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_1)) = \det(M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2))^{-1} > 0$ puesto que $\det(M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)) > 0$, luego $\mathbb{B}_2 \sim \mathbb{B}_1$.

iii) Transitiva. Si $\mathbb{B}_1 \sim \mathbb{B}_2$ y $\mathbb{B}_2 \sim \mathbb{B}_3$, entonces $\det(M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)) > 0$ y $\det(M(\mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3)) > 0$, pero $\det(M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_3)) = \det(M(\mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3)) \det(M(\mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2)) > 0$, luego $\mathbb{B}_1 \sim \mathbb{B}_3$. □

Como $\sim$ es una relación de equivalencia, tiene sentido hablar del conjunto cociente $\mathfrak{B}/\sim$, el conjunto de las clases de equivalencia.

Lema A.3. *El conjunto cociente* $\mathfrak{B}/\sim$ *tiene exactamente 2 elementos.*

Demostración. Sea $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V. Tomando la base $\mathbb{B}' = \{-e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, se cumple que $\det(M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}') = -1 < 0$, luego $\mathbb{B} \not\sim \mathbb{B}'$ y $\mathfrak{B}/$ tiene al menos dos elementos. Veamos que son los únicos. En efecto, tomando cualquier otra base $\mathbb{B}''$, se tiene

$$0 > \det(M(\mathbb{B}' \to \mathbb{B})) \cdot \det(M(\mathbb{B}'' \to \mathbb{B}')) = \det(M(\mathbb{B}'' \to \mathbb{B}))$$

luego $\det(M(\mathbb{B}'' \to \mathbb{B}'))$ y $\det(M(\mathbb{B}'' \to \mathbb{B}))$ tienen signo opuesto, lo que nos dice que uno de estos dos determinantes es positivo, esto es, $\mathbb{B}''$ define la misma orientación que alguna de las dos bases y así hemos probado que $[\mathbb{B}]$ y $[\mathbb{B}']$ son los únicos elementos de $\mathfrak{B}/\sim$. □

A cada uno de los elementos $[\mathbb{B}]$ de $\mathfrak{B}/\sim$ lo llamaremos *orientación* de V. Dar una orientación es, por tanto, fijar una base en V. A partir de ahora, cuando fijemos una base en V diremos que su orientación es la positiva. Otra base que tenga la misma orientación diremos que es *positivamente orientada*. La otra orientación la llamaremos orientación *negativa* y una base que tenga esta orientación diremos que es *negativamente orientada*. Al par $(V, [\mathbb{B}])$ lo llamaremos espacio vectorial orientado.

B. Isomorfismos musicales

En general, no hay una forma *natural* de identificar un espacio vectorial y su dual. En este apéndice, vamos a estudiar esta cuestión y veremos cómo tener un producto escalar resuelve satisfactoriamente este problema, pero antes vamos a intentar explicar qué significa la palabra *natural* sobre este ejemplo.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y consideremos su espacio dual V^*, que es el espacio vectorial de las formas lineales definidas en V, esto es, $V^* = \{f : V \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$. Si elegimos una base cualquiera $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, sabemos que su base dual está dada por $\mathbb{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, donde

$$e_k^* : V \to \mathbb{R}, \qquad e_k^*(e_j) = \delta_{jk} \text{ para todo } j \in \{1, \ldots, n\}$$

y δ_{jk} es la delta de Kronecker, que toma el valor cero si $j \neq k$ y uno si $j = k$. Si pensamos en las coordenadas en estas bases, podemos obtener un isomorfismo entre V y V^*, ya que ambos tienen la misma dimensión. Concretamente, es fácil probar que la aplicación

$$\Phi : V \to V^*, \qquad \Phi(u) = e_1^*(u)e_1^* + e_2^*(u)e_2^* + \ldots + e_n^*(u)e_n^*$$

es un isomorfismo vectorial (observemos que $e_k^*(u)$ es una forma de expresar la k-ésima coordenada de u en la base $\mathbb{B}$). No obstante, esta forma de hallar el isomorfismo ϕ depende de la base $\mathbb{B}$ que se ha elegido al principio pues si tomamos otra base distinta que no consista en reordenar los vectores de $\mathbb{B}$, el isomorfismo es esencialmente distinto. En este sentido, decimos que el isomorfismo ϕ no es natural, puesto que depende de una elección arbitraria (en este caso, de la base).

Supongamos ahora que (V, g) es un espacio vectorial euclídeo. Fijado un vector $u \in V$, podemos considerar la forma lineal $v \mapsto g(u, v)$, que es un elemento del dual. Esto nos permite relacionar un vector de V con otro de su dual. Para ver cómo revertir este proceso, vamos a usar el siguiente lema.

Lema B.1. *Sea (V, g) un espacio vectorial euclídeo y $\varphi : V \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Entonces, existe un único $u \in V$ tal que $\varphi(v) = g(u, v)$ para todo $v \in V$.*

Demostración. Consideremos $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de (V, g) y definamos $u \in V$ como $u = \varphi(e_1)e_1 + \ldots + \varphi(e_n)e_n$. Ahora podemos tomar la aplicación lineal $\varphi' : V \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi'(v) = g(u, v)$ para todo $v \in V$. Es fácil ver que φ coincide con φ' sobre los vectores de la base $\mathbb{B}$ luego son la misma aplicación lineal, esto es, $\varphi(v) = \varphi'(v) = g(u, v)$ para todo $v \in V$. $\square$

De esta forma, a cada $u \in V$ podemos asociarle una forma lineal $u^\flat \in V^*$ y a cada forma $\varphi \in V^*$ un vector $\varphi^\sharp \in V$. Más explícitamente, definimos los isomorfismos musicales entre V y V^* como

$$\begin{aligned} \flat : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto u^\flat : V \to \mathbb{R}, \quad u^\flat(v) = g(u, v) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sharp : V^* &\longrightarrow V \\ \varphi &\longmapsto \varphi^\sharp, \quad g(\varphi^\sharp, v) = \varphi(v) \ \forall v \in V. \end{aligned}$$

Veamos algunas propiedades de estas aplicaciones.

1. $\flat$ y $\sharp$ son isomorfismos inversos entre V y V^*.
2. Existe un único producto escalar g^* en V^* para el que $\flat$ y $\sharp$ son isometrías. Éste viene dado por
$$g^*(\varphi_1, \varphi_2) = g(\varphi_1^\sharp, \varphi_2^\sharp) = \varphi_1(\varphi_2^\sharp).$$

Definición A.4. *Sea V un espacio vectorial y $\mathbb{B}$ una base de V. Diremos que un automorfismo f sobre V conserva la orientación cuando la base $f(\mathbb{B})$ defina la misma orientación que $\mathbb{B}$. En caso contrario, diremos que la invierte.*

Cuando escribimos $f(\mathbb{B})$, estamos haciendo referencia al conjunto de las imágenes de los vectores de $\mathbb{B}$ por f, que es una base de V por ser f biyectiva. Si $\mathbb{B}$ es una base ordenada, entonces consideramos los elementos de $f(\mathbb{B})$ en el mismo orden. El siguiente paso es probar que la definición no depende de la base elegida, es decir, que o bien un automorfismo conserva la orientación de todas las bases o de ninguna.

En efecto, si $\mathbb{B}$ y $\mathbb{B}'$ son bases de V, entonces la ecuación del cambio de bases para la aplicación lineal f (trabajando por filas) nos dice que

$$M(f,\mathbb{B}') = M(\mathbb{B}' \to \mathbb{B}) \cdot M(f,\mathbb{B}) \cdot M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}')$$

luego, tomando determinantes, $\det(M(f,\mathbb{B}')) = \det(M(f,\mathbb{B}))$, ya que $M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}') = M(\mathbb{B}' \to \mathbb{B})^{-1}$, y además es sabido que $M(f,\mathbb{B}) = M(\mathbb{B} \to f(\mathbb{B}))$ y $M(f,\mathbb{B}') = M(\mathbb{B} \to f(\mathbb{B}'))$, luego

$$\det(M(\mathbb{B} \to f(\mathbb{B}))) = \det(M(\mathbb{B}' \to f(\mathbb{B}'))).$$

Hemos demostrado de esta forma que $f(\mathbb{B}) \sim \mathbb{B}$ si, y sólo si, $f(\mathbb{B}') \sim \mathbb{B}'$ y la definición no depende de la base. También hemos probado de paso el siguiente resultado, que es útil en la práctica.

Proposición A.5. *Sea V un espacio vectorial y $[\mathbb{B}]$ una orientación fija en V. Entonces un automorfismo f sobre V conserva la orientación si y sólo si* $\det(M(f,\mathbb{B})) > 0$.

Producto vectorial

A partir de ahora, consideraremos un espacio vectorial euclídeo (V,g) de dimensión 3 y $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ será una base ortonormal de V. Como vamos a ver, sólo en dimensión 3 tiene sentido hablar de producto vectorial.

El producto vectorial es, como cabe esperar y a diferencia del producto escalar, una operación interna sobre el conjunto de los vectores, esto es, el resultado de multiplicar dos vectores vectorialmente será otro vector. Al producto vectorial también suele llamarse producto externo, mientras que el nombre de producto interno suele asignársle al producto escalar.

Lema A.6. *Dados $u, v \in V$, existe un único $w \in V$ tal que, para todo $z \in V$,*

$$g(w,z) = \det(C_{\mathbb{B}}(u), C_{\mathbb{B}}(v), C_{\mathbb{B}}(z)).$$

Demostración. En efecto, si tomamos por coordenadas $C_{\mathbb{B}}(u) = (u_1, u_2, u_3)$ y $C_{\mathbb{B}}(v) = (v_1, v_2, v_3)$, el vector w vendrá necesariamente dado por

$$C_{\mathbb{B}}(w) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Simplemente hay que sustituir z por los elementos de la base $\mathbb{B}$ para llegar a la tal expresión. □

Definición A.7. *Sean $u, v \in V$. Llamaremos producto vectorial o externo de los vectores u y v en la base $\mathbb{B}$, y denotaremos por $u \wedge v$ ó $u \times v$, al único $w \in V$ tal que $g(w,z) = \det(C_{\mathbb{B}}(u), C_{\mathbb{B}}(v), C_{\mathbb{B}}(z))$ para todo $z \in V$.*

C. Cómo saber si una métrica es un producto escalar: el método de los determinantes

Hasta ahora hemos visto varias formas de comprobar que una métrica es un producto escalar. Recordemos que si V es un espacio vectorial de dimensión n y $b : V \times V \to \mathbb{R}$ es una métrica, entonces en cualquier base $\mathbb{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V la matriz

$$M(b, \mathbb{B}) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & \cdots & b(e_1, e_n) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & \cdots & b(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(e_n, e_1) & b(e_n, e_2) & \cdots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

es simétrica. Según hemos estudiado a lo largo del curso, surgen varias posibilidades para probar que es definida positiva; a saber,

1. Demostrar directamente que $b(u, u) \geq 0$ para todo $u \in V$ y que $b(u, u) = 0$ si, y sólo si, $u = 0$. Esta es la definición de definida positiva y, por lo general, la forma más difícil.
2. Encontrar una base que *diagonalice* la matriz, es decir, encontrar una base $\mathbb{B}'$ tal que $M(b, \mathbb{B}')$ sea diagonal. Entonces, la métrica es definida positiva si, y sólo si, todos los elementos de la diagonal de esta nueva matriz son positivos.
3. Hallar los valores propios de la matriz $M(b, \mathbb{B})$. Entonces, la métrica es definida positiva si, y sólo si, todos sus valores propios, que sabemos que son reales, son positivos.

Ahora vamos a estudiar una cuarta forma de hacerlo, que consistirá en tomar ciertos menores de la matriz $M(b, \mathbb{B})$ y estudiar su signo. Para ser más rigurosos, dada una matriz M y dados $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos $M_{I,J}$ como la matriz que surge al restringir M a las filas que indique el conjunto I y a las columnas que indique J. Llamaremos *submatriz principal* de M a toda matriz de la forma $M_{I,J}$ con $I = J$, es decir, es aquella que surge al quedarnos con las mismas filas que columnas. Finalmente, un *menor principal* será el determinante de una submatriz principal y un *menor principal esquinado* será el determinante de una submatriz principal $M_{I,I}$, donde I es de la forma $I = \{1, \ldots, k\}$ (es decir, el determinante de las k primeras filas y las k primeras columnas) para cierto $k \in \{1, \ldots, n\}$.

El resultado que queremos probar es el siguiente, que nos relaciona el hecho de que tengamos un producto escalar con el signo de los menores principales.

Proposición C.1 (Criterio de Sylverter). *Sea V un espacio vectorial y b una métrica en V. Dada una base $\mathbb{B}$ de V y $G = M(b, \mathbb{B})$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) b es definida positiva.

ii) Todo menor principal de G es positivo.

iii) Todo menor principal esquinado de G es positivo.

Demostración. Veamos en primer lugar que (i $\Rightarrow$ ii). Para ello, tomemos un subconjunto de índices $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ y restrinjamos la base $\mathbb{B}$ al conjunto $\mathbb{B}_I = \{e_i : i \in I\}$, que generará un subespacio U de dimensión igual al número de elementos de I. Si restringimos la métrica b a $b_I = b_{|U \times U}$, como estamos suponiendo cierto (i), b_I también será definida positiva. Por tanto, la matriz $M(b_I, \mathbb{B}_I)$, que es simétrica, tiene todos sus valores propios positivos y, en particular, tiene determinante positivo pues el determinante es el producto de los valores propios. Ahora bien, la matriz $M(b_I, \mathbb{B}_I)$ no es más que la submatriz principal de G que surge al quedarnos con las filas y columnas indicadas por I, luego hemos probado (ii).

Que (ii) implica (iii) es obvio pues todo menor principal esquinado es, en particular, un menor principal. Probemos, por tanto, la implicación (iii $\Rightarrow$ i) y habremos terminado. Vamos a usar inducción sobre la dimensión de V. Está claro que para $n = 1$ el enunciado se cumple ya que G está formada por un solo elemento que será positivo si, y sólo si, la métrica es definida positiva. Supongamos que es cierto para cierta dimensión $n-1 \geq 1$ y probémoslo para n. Supongamos que el espacio vectorial V de dimensión n cumple que todo menor principal esquinado de G es positivo. Entonces el subespacio generado por $\mathbb{B}' = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ tiene dimensión $n-1$ y la matriz de la métrica restringida a este subespacio en esta base no es más que eliminar de G la última fila y la última columna, luego también cumple que todo menor principal esquinado es positivo.

Esto nos lleva, por hipótesis de inducción, a que b restringida al subespacio generado por $\mathbb{B}'$ es un producto escalar, luego podemos ortonormalizar la base $\mathbb{B}'$ y obtener una base $\overline{\mathbb{B}} = \{e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n\}$ de V donde los $n-1$ primeros vectores son ortogonales dos a dos y unitarios. Por tanto, existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ de forma que

$$M(b, \overline{\mathbb{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz está relacionada con $M(b, \mathbb{B})$ mediante el cambio de base que consiste en multiplicar por $P = M(\overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{B})$ y su traspuesta, deducimos que $\det(M(b, \overline{\mathbb{B}})) = \det(M(b, \mathbb{B})) \det(P)^2$, y, por tanto, $\det(M(b, \overline{\mathbb{B}})) > 0$. Vamos a calcular este determinante a ver qué información obtenemos. Desarrollando por la primera fila,

$$\begin{aligned} \det(M(b, \overline{\mathbb{B}})) &= \det \begin{pmatrix} 1 & & & x_2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-1} \\ x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} + (-1)^k x_1 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & & & x_2 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & x_{n-1} \\ x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix} - x_1^2. \end{aligned}$$

Observemos que el nuevo determinante es idéntico al anterior salvo que hemos reducido la dimensión en una unidad, luego podemos reiterar el proceso para llegar finalmente a que

$$\det(M(b, \overline{\mathbb{B}})) = x_n - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 > 0.$$

Vamos ahora a calcular e'_n de forma que $\{e'_1, \ldots, e'_{n-1} e'_n\}$ diagonalice a la matriz de la métrica, para lo que haremos como en el método de Gram-Schmidt tomando $e'_n = e_n + \alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_{n-1} e'_{n-1}$. Imponiendo que $b(e'_n, e'_k) = 0$ para $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, esto nos lleva a que $\alpha_k = -x_k$ para todo

$k \in \{1, \ldots, n-1\}$ y ahora tenemos que

$$\begin{aligned} g(e'_n, e'_n) &= g(e_n - x_1 e'_1 - \ldots - x_{n-1} e'_{n-1}, e_n - x_1 e'_1 - \ldots - x_{n-1} e'_{n-1}) \\ &= g(e_n, e_n) - 2g(e_n, x_1 e'_1 + \ldots + x_{n-1} e'_{n-1}) \\ &\quad + g(x_1 e'_1 - \ldots - x_{n-1} e'_{n-1}, x_1 e'_1 - \ldots - x_{n-1} e'_{n-1}) \\ &= x_n - 2(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2) + (x_1^2 + \ldots + x_n^2) = x_n - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 > 0 \end{aligned}$$

Hemos demostrado así que $\{e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e'_n\}$ es una base de V en la que la matriz de b es diagonal y todos los valores de dicha diagonal son positivos, luego b es un producto escalar. □

Este resultado en muchas ocasiones simplifica los cálculos al comprobar si una matriz define un producto escalar. Destacamos las siguientes consecuencias inmediatas:

- Para probar que una matriz simétrica NO representa un producto escalar, basta con encontrar un solo menor principal cuyo determinante sea menor o igual que cero.
- Para probar que una matriz simétrica representa a un producto escalar, basta con demostrar que los n menores principales esquinados tienen determinante positivo.

Algunos inconvenientes computacionales surgen en tanto la dimensión crece pues existen 2^n menores principales en una matriz de orden n (tantos como subconjuntos de $\{1, \ldots, n\}$) y algunos de ellos pueden ser de matrices muy grandes. Por otro lado, para comprobar los n determinantes puede ser sencillo en los casos $n \leq 4$ pero se complica ya demasiado para $n \geq 5$. No obstante, para $n = 2$ ó $n = 3$ nos da métodos muy rápidos para hacer estas comprobaciones.

El método de los valores propios también tiene el mismo problema aunque se le añade el de no poder hallar explícitamente las raíces del polinomio característico por no poder resolver la ecuación, lo cual es un problema todavía mayor. El método de encontrar la base que diagonalice es el que mejor se adapta (con diferencia) a los casos de dimensión alta.

Ejemplos C.2. Determinar si las siguientes matrices representan, en las bases usuales de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$, respectivamente, productos escalares.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Comencemos por la matriz A. Notemos que los determinantes de las submatrices principales esquina, vienen dados por

$$\det(5) = 5, \quad \det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 14, \quad \det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 8, \quad \det(A) = 4,$$

luego A representa a un producto escalar. Si intentamos calcular los valores propios de A, llegamos a un polinomio de cuarto grado que es difícil resolver y, si lo resolvemos, es difícil analizar si las raíces son positivas o negativas, aunque podrían estimarse usando el teorema de Bolzano. Lo que ocurre con B es que no es un producto escalar ya que el menor que surge al tomar la primera y la cuarta filas y columnas es

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Por consiguiente, puede calcularse como

$$C_{\mathbb{B}}(x \wedge y) = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

El hecho de que sólo pueda hacerse el producto vectorial en dimensión 3 viene de que el determinante de tres vectores sólo está bien definido cuando la dimensión es tres.

Lema A.8. *La definición no depende de la base ortonormal elegida siempre que defina la misma orientación. En caso de tomar dos bases con distinta orientación el producto vectorial cambia de signo.*

Demostración. Consideremos otra base ortonormal $\overline{\mathbb{B}} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ de (V, g) y sea $\overline{\wedge}$ el producto vectorial asociado a esta base. Entonces, si $P = M(\overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{B})$ es la matriz del cambio de base,

$$\begin{aligned} g(x \wedge y, z) = \det(C_{\mathbb{B}}(x), C_{\mathbb{B}}(y), C_{\mathbb{B}}(z)) &= \det(C_{\overline{\mathbb{B}}}(x) \cdot P, C_{\overline{\mathbb{B}}}(y) \cdot P, C_{\overline{\mathbb{B}}}(z) \cdot P) \\ &= \det(C_{\overline{\mathbb{B}}}(x), C_{\overline{\mathbb{B}}}(y), C_{\overline{\mathbb{B}}}(z)) \cdot \det(P) \\ &= g(x \mathbin{\overline{\wedge}} y, z) \cdot \det(P) \end{aligned}$$

pero si $\mathbb{B}$ y $\overline{\mathbb{B}}$ son bases ortonormales entonces $P \in O(n)$ y, en particular, $\det(P) = \pm 1$, donde el signo depende de si $\mathbb{B}$ y $\overline{\mathbb{B}}$ definen la misma o distinta orientación. Deducimos que $x \wedge y = \pm(x \mathbin{\overline{\wedge}} y)$, donde el signo es positivo si las dos bases definen la misma orientación y negativo en caso contrario, con lo que el enunciado está probado. □

Ahora podemos matizar la definición de producto vectorial, no fijando una base ortonormal concreta, sino fijando una orientación $[\mathbb{B}]$ en V. Así, la terna $(V, g, [\mathbb{B}])$, que llamaremos *espacio vectorial euclídeo orientado*, tiene bien definido un único producto vectorial.

Proposición A.9. *Sea $(V, g, [\mathbb{B}])$ un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3. La aplicación producto vectorial $\wedge : V \times V \to V$ es bilineal y antisimétrica.*

Demostración. En efecto, es bilineal ya que trabajando en la base $\mathbb{B}$ positivamente orientada, que podemos suponer que es ortonormal sin perder generalidad, y dados $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$C_{\mathbb{B}}((x + \alpha y) \wedge z) = \left(\begin{vmatrix} x_2 + \alpha y_2 & x_3 + \alpha y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 + \alpha y_1 & x_3 + \alpha y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 + \alpha y_1 & x_2 + \alpha y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right)$$

y, por la linealidad de los determinantes en cada fila, deducimos que

$$C_{\mathbb{B}}((x + \alpha y) \wedge z) = C_{\mathbb{B}}(x \wedge z) + \alpha C_{\mathbb{B}}(y \wedge z),$$

con lo que $(x + \alpha y) \wedge z = (x \wedge z) + \alpha(y \wedge z)$. De forma completamente análoga se comprueba la linealidad en la otra variable. Por otro lado,

$$C_{\mathbb{B}}(y \wedge x) = \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \right) = -C_{\mathbb{B}}(x \wedge y),$$

donde hemos usado que al cambiar dos filas de orden el determinante cambia de signo. □

Proposición A.10. *Sean $(V, g, [\mathbb{B}])$ un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión 3 con producto vectorial $\wedge$. Dados $u, v, w, x \in V$, se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $u \wedge v$ *es ortogonal a* u *y a* v.

2. $u \wedge v = 0$ *si, y sólo si,* u *y* v *son linealmente dependientes.*

3. Si u *y* v *son independientes,* $\{u, v, u \wedge v\}$ *es base de* V *positivamente orientada.*

4. $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$ *(Identidad de Jacobi)*

5. $g(u \wedge v, w \wedge x) = \det \begin{pmatrix} g(u,w) & g(v,w) \\ g(u,x) & g(v,x) \end{pmatrix}$

6. $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \operatorname{sen}(\angle(u,v))$

Nota A.11. Hasta aquí es lo que se ha visto en clase. Para completar el apéndice, incluimos las demostraciones de estas propiedades y algunos comentarios finales.

Demostración.

1. Se deduce de que $g(u \wedge v, u) = \det(u, v, u) = 0$ y $g(u \wedge v, v) = \det(u, v, v) = 0$.

2. Si u y v son linealmente dependientes, entonces $\|u \wedge v\|^2 = \det(C_{\mathbb{B}}(u), C_{\mathbb{B}}(v), C_{\mathbb{B}}(u \wedge v)) = 0$, de donde $u \wedge v = 0$. Recíprocamente, si $u \wedge v = 0$, entonces $\det(C_{\mathbb{B}}(u), C_{\mathbb{B}}(v), C_{\mathbb{B}}(z)) = 0$ para cualquier $z \in V$ luego en particular para un z que no esté en el subespacio generado por u y v, de donde u y v tienen que ser linealmente dependientes.

3. Se deduce de que $\det(C_{\mathbb{B}}(u), C_{\mathbb{B}}(v), C_{\mathbb{B}}(u \wedge v)) = g(u \wedge v, u \wedge v) = \|u \wedge v\| > 0$.

4. Observemos que el primer miembro cambia de signo si se cambian dos de los vectores de orden y que si dos de los vectores u, v, w son iguales, entonces es cero. Además, es lineal en cada una de las tres variables u, v, w luego bastará probar que la expresión es cero cuando $u = e_1$, $v = e_2$ y $w = e_3$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal orientada positiva. Ahora bien, tenemos que

$$e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) + e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1) + e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_3 = 0.$$

5. Una forma de probar esta identidad es desarrollándola en coordenadas en una base ortonormal orientada positiva $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, pero la expresión que se obtiene es muy larga. Para simplificar las cuentas, podemos observar que los dos miembros son aplicaciones lineales en cada una de las cuatro variables u, v, w, x luego sería suficiente probar que son iguales para cualquier combinación de elementos básicos e_1, e_2, e_3 en cada coordenada, lo que nos da un total de $3^4 = 81$ posibilidades, que también son muchas aunque cada comprobación es sencilla. Si ahora observamos que ambos miembros están en las condiciones del lema A.12 (demostrarlo como ejercicio), basta probarlo para las cuaternas de la forma $(u, v, w, x) = (e_i, e_j, e_j, e_i)$ con $i < j$, que son sólo tres posibilidades. Probemos, por ejemplo, para (e_1, e_2, e_2, e_1) y el resto lo dejamos como ejercicio sencillo. Tenemos que

$$g(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_1) = g(e_3, -e_3) = -1$$

$$\det \begin{pmatrix} g(e_1,e_2) & g(e_2,e_2) \\ g(e_1,e_1) & g(e_2,e_1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

luego ambos miembros son iguales para esta elección de vectores básicos.

6. Aplicando la propiedad anterior, si $\alpha = \angle(u, v) \in [0, \pi]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 = g(u \wedge v, u \wedge v) = \det \begin{pmatrix} g(u,u) & g(u,v) \\ g(v,u) & g(v,v) \end{pmatrix} &= \|u\|^2\|v\|^2 - g(u,v)^2 \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \cos^2 \alpha \\ &= \|u\|^2\|v\|^2 \operatorname{sen}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Tomando raíces en la igualdad anterior y usando que el seno de un ángulo en $[0, \pi]$ es postivo, se sigue la igualdad buscada. □

Observemos que en los apartados 4 y 5 hemos hecho uso de una forma alternativa de probar igualdades que son lineales en todas las variables. En general, si tenemos una aplicación definida en el producto de ciertos espacios vectoriales y toma valores en otro espacio vectorial, diremos que es *multilineal* cuando sea lineal en cada una de las variables. No es difícil comprobar que si dos aplicaciones multilineales definidas en los mismos espacios toman los mismos valores para cualquier combinación de elementos de bases de los factores del dominio, entonces coinciden. El siguiente resultado, es la pieza fundamental que hemos usado para probar 4 y 5. Notemos que la simetría o la antisimetría en ciertos pares de variables es muy útil para reducir el problema.

Lema A.12. *Sean $R_1, R_2 : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones multilineales cumpliendo las siguientes tres condiciones para cualesquiera $u, v, w, x \in V$ e $i \in \{1, 2\}$.*

- $R_i(u, v, w, x) = -R_i(v, u, w, x)$ *(antisimetría en las primeras dos variables)*
- $R_i(u, v, w, x) = -R_i(u, v, x, w)$ *(antisimetría en las últimas dos variables)*
- $R_i(u, v, w, x) + R_i(v, w, u, x) + R_i(w, u, v, z)$ *(identidad de Jacobi)*

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de V y $R_1(e_i, e_j, e_j, e_i) = R_2(e_i, e_j, e_j, e_i)$ para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i < j$, entonces $R_1 = R_2$.

Como consecuencia de que $\wedge$ es antisimétrico, $\wedge$ no es conmutativo; pero es que puede comprobarse que ni siquiera es asociativo ni existe un elemento neutro. Por tanto, esta operación no tiene ninguna de las propiedades notables que pudieran atribuírsele.

Sin embargo, puede servir para encontrar vectores ortogonales a dos dados o para comprobar si dos vectores son linealmente independientes, como hemos visto en la proposición anterior. Combinando los apartados 3 y 6, deducimos que si u y v son ortogonales (resp. ortonormales), entonces $\{u, v, u \wedge v\}$ es una base ortogonal (resp. ortonormal).

Examen Tema 3 - Grupo A

Geometría 2 - Primer curso - Grado en Matemáticas

2 de junio de 2011

Nombre: ____

Ejercicio 1. En un espacio vectorial euclídeo (V, g), razonar la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) [0.75p] Dados dos vectores $u, v \in V$ no nulos, el ángulo que forman $2u$ y $2v$ es el doble del ángulo que forman u y v.

b) [0.75p] Si dos subespacios de V son ortogonales y unimos dos bases ortonormales, una de cada uno de ellos, obtenemos una base ortonormal de la suma de los dos subespacios.

c) [0.75p] Dado cualquier subespacio $U \subseteq V$, se cumple que $S_U(v) - P_U(v) = v$ para cualquier $v \in V$, donde S_U y P_U son la simetría ortogonal y la proyección ortogonal respecto de U, respectivamente.

d) [0.75p] Si $f : V \to V$ es una isometría, entonces $h = f + f^{-1} : V \to V$ es un endomorfismo autoadjunto.

Solución. El apartado (a) es falso pues el ángulo es el mismo debido a que

$$\angle(2u, 2v) = \arccos \frac{g(2u, 2v)}{\|2u\| \cdot \|2v\|} = \arccos \frac{4g(u, v)}{2\|u\| \cdot 2\|v\|} = \arccos \frac{g(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \angle(u, v).$$

El apartado (b) es cierto: si U_1 y U_2 son subespacios ortogonales de V y tomamos $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ bases de U_1 y U_2, respectivamente, entonces los vectores de $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$ son ortogonales dos a dos por ser subespacios ortogonales, luego linealmente independientes y, por tanto, forman base ortogonal de la suma.

El apartado (c) es falso (un diagrama basta para darse cuenta). Para justificarlo más rigurosamente, sabemos que $S_U(v) = 2P_U(v) - v$ luego, si fuera cierto que $S_U(v) - P_U(v) = v$, tendríamos que $P_U(v) = 2v$ para todo $v \in V$, lo cual es falso pues $P_U(v) = 0$ para $v \in U^\perp$.

Finalmente, el apartado (d) es cierto tal y como se vio en la demostración del teorema de clasificación de las isometrías de $\mathbb{R}^n$. Dados $u, v \in V$, se cumple que

$$\begin{aligned} g(h(u), v) = g(f(u) + f^{-1}(u), v) = g(f(u), v) + g(f^{-1}(u), v) &= g(u, f^{-1}(v)) + g(u, f(v)) \\ &= g(u, f(v) + f^{-1}(v)) = g(u, h(v)), \end{aligned}$$

donde hemos usado que f y f^{-1} son isometrías, luego h es autoadjunto. □

Ejercicio 2. Consideremos la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) [2.5p] Encontrar una matriz $P \in O(3)$ tal que $P \cdot A \cdot P^t$ sea diagonal.

b) [0.5p] ¿Es A la matriz de un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ en la base usual?

Solución. Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(x) = x \cdot A$, es decir, $A = M(f, \mathbb{B}_0)$ donde $\mathbb{B}_0$ representa la base usual de $\mathbb{R}^3$. Es fácil darse cuenta de que $\lambda = 1$ es un valor propio doble y $\lambda = \frac{11}{2}$ es un valor propio simple de f. Los subespacios propios asociados están dados por

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = (x,y,z) \right\} = L(\{(1,0,-1),(1,2,0)\})$$

$$V_{11/2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{11}{2}(x,y,z) \right\} = L(\{(2,-1,2)\})$$

Una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, donde los dos primeros vectores pertenecen a V_1 y el tercero a $V_{11/2}$, es

$$\mathbb{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Esta base se obtiene sin más que hallar una base ortonormal de V_1 y añadirle un vector unitario de $V_{11/2}$. Ahora bien, la ecuación del cambio de base nos dice que

$$M(f,\mathbb{B}) = M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o) \cdot M(f, \mathbb{B}_o) \cdot M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o)^{-1}$$

luego, si tomamos $P = M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o)$, que es ortogonal por ser matriz de cambio de bases ortonormales, se cumple que $M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o)^{-1} = P^{-1} = P^t$, $A = M(f, \mathbb{B}_o)$ y $M(f,\mathbb{B})$ es diagonal, luego P es la matriz que buscamos. Es directo calcular

$$P = M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

ya que sus filas son los vectores de $\mathbb{B}$ en la base usual.

Para responder al apartado (b), es suficiente darse cuenta de que A es una matriz simétrica y todos sus valores propios son positivos, luego sí representa un producto escalar en la base usual. $\square$

Ejercicio 3. [3p] Consideremos en $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual la isometría f determinada por las siguientes tres condiciones:

- f deja fijo el vector $(1,-1,0)$,
- $f(1,1,5) = (3,3,-3)$, y
- f es directa.

Hallar la matriz de f en alguna base de $\mathbb{R}^3$.

Demostración. Si f deja fijo el vector $(1,-1,0)$ y es una isometría directa, entonces es un giro respecto del eje generado por este vector. El plano ortogonal a éste, que está dado por la ecuación $x = y$, contiene a los vectores $(1,1,5)$ y $(3,3,-3)$. Consideremos la base ortonormal adaptada a este problema $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, dada por

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \qquad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \qquad e_3 = (0,0,1).$$

El ángulo que forman los vectores $(1,1,5)$ y $(3,3,-3)$ determinará el giro salvo su signo, pero es un cálculo directo que éste ángulo tiene coseno igual a $\frac{-1}{3}$ luego su seno es $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Así, es fácil expresar f en la base $\mathbb{B}$ como

$$M(f,\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

¿Cómo decidir qué signo escoger? Hay varias opciones:

- La primera puede ser hacer un dibujo de la situación, que no es muy complicado pues el plano $x = y$ es fácil de representar. Así, nos daremos cuenta de que para girar de $(1, 1, 5)$ a $(3, 3, -3)$ con un ángulo menor que π, tendremos que hacerlo en sentido contrario al que marca la base $\{e_2, e_3\}$, es decir, girando de e_3 a e_2 luego tendremos que tomar el signo negativo en el seno.

- Otra opción es expresar $(1, 1, 5) = \sqrt{2}e_2 + 5e_3$ y $(3, 3, -3) = 3\sqrt{2}e_2 - 3e_3$ para trabajar en coordenadas en la base $\mathbb{B}$ e imponer que $(0, 3\sqrt{2}, -3) = (0, \sqrt{2}, 5) \cdot M(f, \mathbb{B})$, de donde la elección es otra vez el signo negativo para el seno y llegamos a que

$$M(f,\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Si quisiéramos expresarlo en la base usual, tendríamos que

$$\begin{aligned} M(f,\mathbb{B}_o) &= M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o)^{-1} \cdot M(f,\mathbb{B}) \cdot M(\mathbb{B} \to \mathbb{B}_o) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4. [1p] Sea $\mathcal{P}_1$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que uno con coeficientes reales y, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definimos el producto escalar $g_{a,b}$ en $\mathcal{P}_1$ como

$$g_{a,b}(P,Q) = \int_a^b P(x)Q(x)dx, \quad \text{para cualesquiera } P, Q \in \mathcal{P}_1.$$

Dado un producto escalar cualquiera g en $\mathcal{P}_1$, ¿siempre existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $g = g_{a,b}$?

Solución. La respuesta es no. Para probarlo, vamos a ver que la base $\mathbb{B} = \{e_1, e_2\}$ de $\mathcal{P}_1$ dada por $e_1 = 1$ y $e_2 = x$ no es ortonormal para ningún producto escalar del tipo $g_{a,b}$. Como sabemos que existe un producto escalar en que ésta es ortonormal, esto probará que hay más que los de la forma $g_{a,b}$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $\mathbb{B}$ es ortonormal para $g_{a,b}$. Entonces, ha de cumplirse que

$$\begin{aligned} 1 &= g_{a,b}(e_1,e_1) = \int_a^b 1 \, \mathrm{d}x = b - a \\ 0 &= g_{a,b}(e_1,e_2) = \int_a^b x \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) = \tfrac{1}{2}(b-a)(b+a) \\ 1 &= g_{a,b}(e_2,e_2) = \int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3) \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones nos dicen que $a = \frac{-1}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$. Si sustituimos estos valores en la tercera obtenemos una contradicción y hemos terminado. □