

Un viaje de la física a la geometría a través de las pompas de jabón

José M. Manzano – UGR

jmmanzano@ugr.es

27 de marzo–8 de abril de 2020

Índice

1 De la física a la geometría	2
1.1 Interfaces y superficies	2
1.2 La curvatura media	5
1.3 La ecuación de Laplace–Young	9
1.4 Aplicaciones	13
2 De la geometría a la física	15
2.1 El principio del máximo	16
2.2 Algunas consecuencias	18
3 Modelización	20
3.1 Introducción a Surface Evolver	20
3.2 El problema isoperimétrico y la pompa múltiple	23
3.3 Los problemas de Plateau y de frontera libre	27

Introducción

Las pompas y películas de jabón son objetos muy interesantes tanto desde el punto de vista físico (como interfaces entre dos medios) como desde el matemático (como superficies de curvatura media constante). Este tipo de fenómenos comenzó a estudiarse en los tiempos de Euler y Lagrange hace más de 250 años y, aún así, sigue siendo un tema de investigación muy activo, con un número cada vez mayor de aplicaciones a la ingeniería, la biología, la química, la arquitectura o la medicina. Más aún, algunas de las ramas matemáticas más relevantes del siglo XX han avanzado considerablemente

al topar con problemas relacionados con las superficies de curvatura media constante, como son la integral de Lebesgue, el análisis complejo, las ecuaciones en derivadas parciales, el cálculo de variaciones o la teoría geométrica de la medida.

Estas son las notas de un seminario de *Actualización Científica en Matemáticas* impartido en el *Doble Máster en Matemáticas y Profesorado de ESO, Bachiller, FP y Enseñanzas de Idiomas*, organizado por el *Centro de Estudios de Postgrado* de la Universidad de Jaén, durante los cursos académicos 2018–19 y 2019–20. El objetivo principal es entender cómo las observaciones físicas de interfaces entre distintos medios pueden modelarse matemáticamente mediante las superficies de curvatura media constante. Usaremos las matemáticas para dar rigor a algunas propiedades evidentes de estas superficies (y a otras no tan evidentes) y haremos experimentos físicos y de simulación que guiarán la teoría y ofrecerán una visión más completa de la misma. El seminario se estructura en 3 sesiones de 2,5 horas cada una, que se corresponden con las tres secciones del índice.

1. De la física a la geometría

1.1. Interfaces y superficies

Desde el punto de vista de la termodinámica, una *fase* es una región de un sistema físico en la que ciertas propiedades características como la presión, la temperatura, la densidad o la concentración son constantes. Es usual encontrar sistemas físicos en los que dos fases con propiedades distintas están en contacto: por ejemplo, una mancha de aceite sobre el agua (líquido–líquido), una gota de lluvia en caída libre en la atmósfera (gas–líquido) o un gas dentro de una botella metálica (gas–sólido). En las zonas de transición entre dos fases, las llamadas *interfases*, las propiedades que son constantes en cada fase deben variar desde un valor a otro, por lo que dichas interfases son regiones no homogéneas (véase la figura 1). En algunos sistemas estas zonas de transición pueden ser despreciables, cuando su volumen es pequeño y tienen pocos átomos de diámetro, pero pueden llegar a ser determinantes en sistemas más complejos (e.g., sólidos porosos o líquidos pulverizados) o bien si se quiere estudiar un efecto que actúa sobre una fase desde el exterior (e.g., la corrosión o la permeabilidad). Si bien la termodinámica ofrece una simplificación válida desde el punto de vista estadístico, es necesario descender al nivel molecular para entender la situación con mayor claridad. Vamos a ver un par de ejemplos que podremos trabajar detalladamente cuando tengamos las herramientas matemáticas pertinentes.

En primer lugar, pensemos en la interfase entre un líquido en reposo y su vapor (por ejemplo, una gota de agua sobre una mesa como en la figura 2). Las moléculas del líquido lejos de la interfase se mueven de forma aparentemente aleatoria y cada una de ellas tiene un entorno similar al del resto donde actúan fuerzas de atracción entre ellas que pueden suponerse homogéneas en cualquier dirección y se anulan en promedio. No

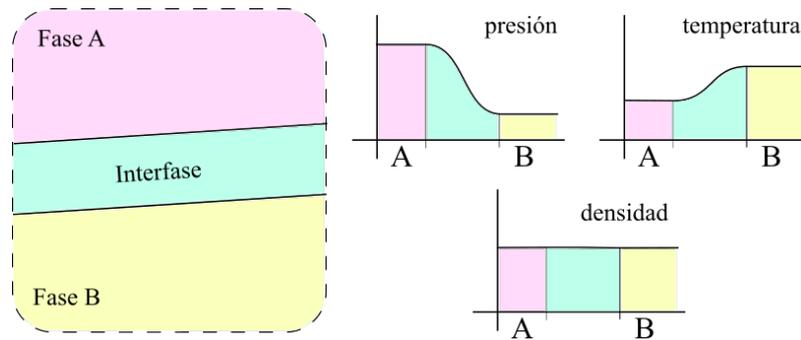


Figura 1: Interfase y variación de las propiedades intensivas.

obstante, las partículas muy cercanas a la interfase tienen un comportamiento distinto ya que sufren atracciones distintas desde dentro y desde fuera de la interfase. En este caso, la atracción media es hacia el interior del líquido por lo que una situación en equilibrio tendrá una componente de minimización de la superficie de líquido expuesta que estudiaremos más adelante. En segundo lugar, consideremos una película de agua jabonosa que separa localmente dos regiones gaseosas del espacio (véase la figura 2). Una película formada sólo por agua no tendría la consistencia suficiente y desaparecería instantáneamente, pero el jabón actúa como agente tensoactivo reduciendo la tensión superficial del agua pero estabilizando la película mediante el llamado *efecto Marangoni*¹. La película puede considerarse macroscópicamente como una interfase, pero la realidad microscópica revela que el jabón actúa como doble interfase gas-líquido-gas atrapando en su interior una cierta cantidad de agua. De nuevo, las partículas interiores a cada región gaseosa se comportan de forma homogénea e incluso las del líquido atrapado en la película, pero las partículas cercanas a la superficie jabonosa experimentan atracciones distintas desde cada región. La ley de Laplace-Young explicará por qué tal falta de homogeneidad hace que la superficie *se curve*.

La tensión superficial

Como hemos comentado, existe una tendencia espontánea de los sistemas a minimizar el área de sus interfases debido a que las fuerzas intermoleculares sobre la frontera de la fase actúan en promedio hacia el interior. En otras palabras, las moléculas superficiales tienen una energía superior pues experimentan menor atracción, luego el sistema tiende a minimizar su superficie para obedecer un *principio de mínima energía*. Sobre un área A de la interfase hay un número N de moléculas proporcional a A . El trabajo W necesario para llevar una cierta cantidad de moléculas del interior a la superficie será proporcional al número de moléculas movilizadas y, por ende, al incremento de área.

¹Véase la entrada de Wikipedia *Marangoni effect*.

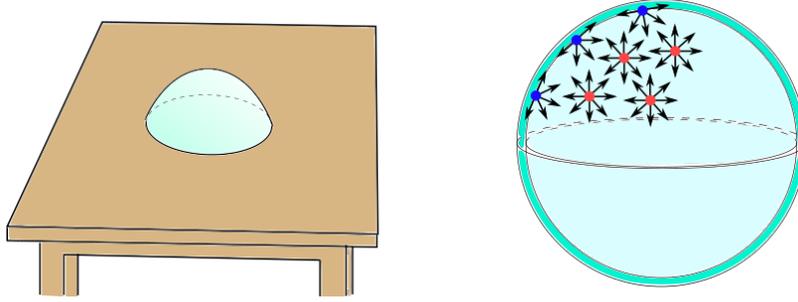


Figura 2: Izquierda: una gota de líquido sobre una mesa (muy pequeña) representa una doble interfaz sólido-líquido-vapor. Derecha: una pompa de jabón representa una doble interfaz gas-líquido-gas. Las moléculas interiores (en rojo) experimentan fuerzas distintas a las de la frontera (azul).

De esta forma, existe una constante $\sigma > 0$, que sólo depende de la naturaleza de las fases, tal que $W = \sigma \Delta A$, por lo que el sistema perderá energía cuando $\Delta A < 0$, es decir, cuando reduzca el área de su frontera.

Por ejemplo, dos pompas de jabón con forma esférica y radios r_1 y r_2 encierran un volumen total $\frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3)$. Si dicho volumen se concentra en una sola esfera, ésta tendrá un radio $r = (r_1^3 + r_2^3)^{1/3}$, por lo que el área superficial decrece² de $4\pi(r_1^2 + r_2^2)$ en las dos esferas a $4\pi(r_1^3 + r_2^3)^{2/3}$ en una sola esfera. Es por ello, que si las dos esferas, que viven aisladas en equilibrio, chocan con intensidad suficiente para fusionar la interfase, la tensión superficial provocará una deformación de la figura resultante para que decrezca su área de la forma más rápida posible, por ejemplo, creando una esfera más grande como se ha indicado anteriormente (véase la figura 3).

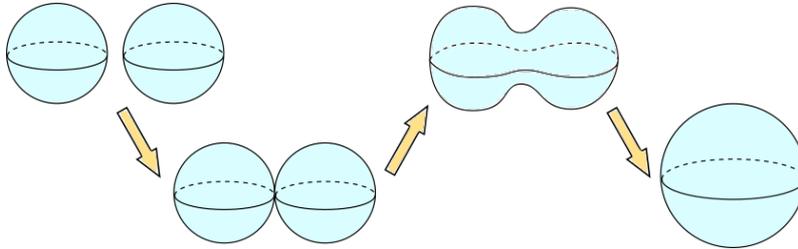


Figura 3: Un posible proceso de fusión de dos pompas de jabón.

La tensión σ también puede entenderse como una fuerza, para lo que aislamos un trozo S de la interfase bordeado por una curva Γ (por ejemplo, una película de jabón con borde en un trozo de alambre). De forma natural, S experimenta una tendencia a

²La desigualdad $(r_1^2 + r_2^2)^{1/2} \geq (r_1^3 + r_2^3)^{1/3}$ es una desigualdad conocida entre normas de \mathbb{R}^2 .

desaparecer por efecto de esta pérdida de energía. lo que se traduce en que debemos ejercer una fuerza sobre Γ para mantener el sistema en equilibrio. Puede demostrarse que esta fuerza en cada punto de Γ tiene módulo σ y apunta en promedio hacia el exterior de la región a lo largo de Γ . En otras palabras, la tensión superficial se materializa en una fuerza tangencial a la superficie hacia la dirección que hace disminuir la superficie de contacto de forma más rápida (véase la figura 4).

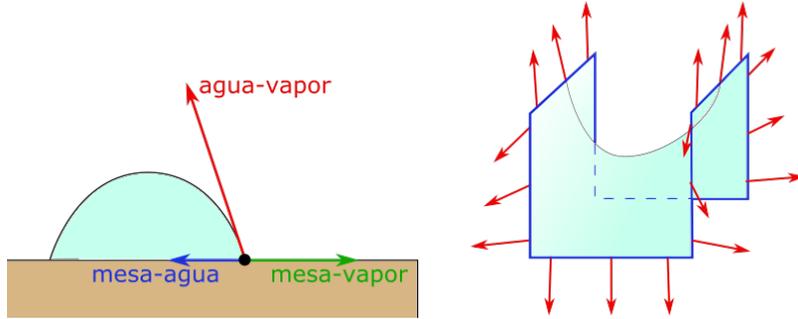


Figura 4: Izquierda: tensiones superficiales en el perfil de una gota de agua sobre una mesa. Derecha: resistencia que debe ofrecer un alambre para que una película de jabón con borde sobre él esté en equilibrio.

1.2. La curvatura media

Curvatura de una curva plana

Supongamos que $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de clase \mathcal{C}^∞ , que entenderemos como una trayectoria, esto es, $\gamma(t)$ es el vector posición de un móvil en el plano \mathbb{R}^2 . El *vector velocidad* de γ en el instante $t \in (a, b)$ se define como la derivada $\gamma'(t)$ pues dicha derivada representa la tasa de variación instantánea del vector posición. La segunda derivada $\gamma''(t)$ es la tasa de variación instantánea de la velocidad y se conoce como *vector aceleración*. Si la velocidad no se anula en ningún punto, entonces la curva puede suponerse que tiene velocidad cuyo módulo es igual a uno en cada punto sin cambiar el recorrido del móvil (la traza de γ) y a dicha forma de recorrer este conjunto se le llama parametrización por la longitud de arco de la curva.

Supongamos que γ es una curva con velocidad unitaria, es decir, $\|\gamma'\|^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$. Derivando esta expresión obtenemos que $\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0$, es decir, la aceleración es perpendicular a la velocidad. Si elegimos una dirección unitaria \mathbf{n} normal a γ definimos la curvatura de γ respecto de \mathbf{n} como

$$\kappa = \langle \gamma'', \mathbf{n} \rangle = -\langle \gamma', \mathbf{n}' \rangle.$$

Veamos algunas propiedades de la curvatura:

1. La curvatura cambia de signo si cambiamos de signo \mathbf{n} .
2. Las rectas tienen curvatura cero y cualquier circunferencia de radio r tiene curvatura $\kappa = r^{-1}$ respecto de su normal interior. De hecho, rectas y circunferencias son las únicas curvas planas con curvatura constante.
3. La circunferencia de radio $r = |\kappa|^{-1}$ con centro $\gamma + \kappa\mathbf{n}$ es tangente a γ y es la mejor³ circunferencia que aproxima a γ . Por este motivo, al inverso de la curvatura $r = \frac{1}{\kappa}$ también se le llama radio de curvatura de γ y es importante, por ejemplo, en el trazado y señalización de carreteras⁴.

Curvaturas normales de una superficie

Consideremos ahora una superficie parametrizada $X : U \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, siendo $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Del mismo modo que en el caso de curvas imponíamos que la derivada no sea nula, ahora supondremos que las derivadas parciales X_u y X_v , que son vectores tangentes a la superficie, son linealmente independientes. Al plano de \mathbb{R}^3 que pasa por X y cuyas direcciones están generadas por X_u y X_v se le llama *plano tangente* a la superficie. Un vector $w \in \mathbb{R}^3$ es tangente (resp. normal) a la superficie si es combinación lineal de X_u y X_v (resp. perpendicular a X_u y X_v). En lo que sigue, consideraremos el normal unitario en toda⁵ la superficie

$$N : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|},$$

que está bien definido ya que X_u y X_v son independientes (véase la figura 5).

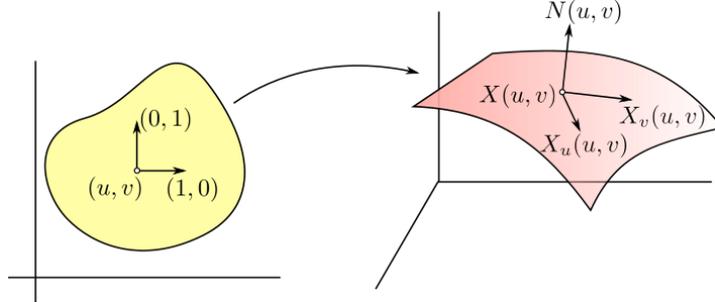


Figura 5: Parametrización de una superficie.

Dado $p \in \Sigma$, para cada vector $w = aX_u + bX_v \in \mathbb{R}^3$ tangente a Σ en p , sean $\bar{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $\Pi_w \subset \mathbb{R}^3$ el plano que pasa por $X(p)$ y contiene a las direcciones N

³El desarrollo de Taylor en el punto de tangencia de ambas curvas coincide hasta el orden 2.

⁴Por ejemplo, véase la entrada de Wikipedia *Diseño geométrico de carreteras*.

⁵Un normal unitario global se llama aplicación de Gauss de la superficie y su existencia depende de si la superficie es *orientable* o no.

y w . Entonces $\Pi_w \cap \Sigma$ es una curva en un entorno de p que podemos parametrizar con velocidad unitaria como $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ con $(X \circ \gamma)(0) = p$ y $(X \circ \gamma)'(0) = w$. Si w es unitario, definimos $\kappa_n(w)$, la curvatura normal de Σ en p en la dirección de w , como la curvatura de la curva plana γ respecto del normal N , es decir,

$$\kappa_n(w) = \langle (X \circ \gamma)'' , N \circ \gamma \rangle = -\langle (X \circ \gamma)' , (N \circ \gamma)' \rangle = -\langle D_{\bar{w}}N , w \rangle. \quad (1)$$

En el última igualdad en (1), $D_{\bar{w}}N = aN_u + bN_v$ denota la derivada direccional de N en la dirección de \bar{w} y se ha usado la regla de la cadena⁶.

Proposición 1.1 (Euler). *Dado $p \in \Sigma$, existen w_1, w_2 tangentes a Σ en p , perpendiculares y unitarios, tales que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\kappa_n(\cos(\alpha)w_1 + \sin(\alpha)w_2) = \cos^2(\alpha)\kappa_n(w_1) + \sin^2(\alpha)\kappa_n(w_2). \quad (2)$$

Demostración. Dado $w \in \mathbb{R}^3$ tangente a Σ , tomamos el vector unitario $Rw = N \wedge w \in \mathbb{R}^3$, que es tangente a Σ y perpendicular a w . A partir de (1) deducimos que

$$\begin{aligned} \kappa_n(\cos(\alpha)w + \sin(\alpha)Rw) &= \cos^2(\alpha)\kappa_n(w) + \sin^2(\alpha)\kappa_n(Rw) \\ &\quad - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\langle D_{\bar{w}}N, Rw \rangle + \langle D_{\overline{Rw}}N, w \rangle). \end{aligned}$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(w) = \langle D_wN, Rw \rangle + \langle D_{Rw}N, w \rangle = 0$. Como f es continua y $f(Rw) = -f(w)$ ya que $R^2 = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ y $w \mapsto \bar{w}$ es lineal, el teorema de Bolzano nos da la existencia de $w_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(w_0) = 0$ y basta tomar $w_1 = w_0$ y $w_2 = Rw_0$. \square

La proposición nos dice que $\kappa_n(w_1)$ y $\kappa_n(w_2)$ son el máximo y el mínimo de las curvaturas normales de Σ en p . Estos dos números se llaman *curvaturas principales* de Σ en p y los denotaremos por κ_1 y κ_2 en lo sucesivo. Los vectores w_1 y w_2 unitarios se llaman *direcciones principales*. La *curvatura media* de Σ es la función

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\kappa_n(w) + \kappa_n(N \wedge w)}{2},$$

que no depende de la elección de w tangente unitario por (2). En particular, definiendo

$$E = \|X_u\|^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \|X_v\|^2,$$

y tomando $w = E^{-1/2}X_u$ y $N \wedge w = E^{-1/2}(EG - F^2)^{-1/2}(-FX_u + EX_v)$, tenemos

$$\begin{aligned} \kappa_n(w) &= \frac{1}{E} \langle N_u, X_u \rangle, \\ \kappa_n(N \wedge w) &= \frac{F^2 \langle N_u, X_u \rangle - EF(\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) + E^2 \langle N_v, X_v \rangle}{E(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

⁶En realidad (1) tiene sentido para cualquier w tangente (no tiene por qué ser unitario) y es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal $(w, z) \mapsto -\langle D_wN, z \rangle$, que se conoce como segunda forma fundamental de Σ .

Sumando estas dos igualdades y utilizando que $\langle N_u, X_u \rangle = -\langle X_{uu}, N \rangle$, $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle = -\langle X_{uv}, N \rangle$ y $\langle N_v, X_v \rangle = -\langle X_{vv}, N \rangle$, llegamos finalmente a la fórmula

$$H = \frac{2F\langle X_{uv}, N \rangle - G\langle X_{uu}, N \rangle - E\langle X_{vv}, N \rangle}{2(EG - F^2)}. \quad (3)$$

Definición 1.2 (*H*-superficie). Diremos que una superficie Σ es una *H*-superficie si su curvatura media es constante. Si esta constante es cero, diremos que Σ es mínima.

En las siguientes secciones, daremos interpretaciones interesantes de carácter físico de las superficies mínimas y de curvatura media constante. Por ahora, tengamos presentes algunas propiedades que pueden probarse fácilmente a partir de lo anterior:

1. Si cambiamos el signo del normal N , entonces H cambia de signo.
2. Si movemos la superficie Σ por un movimiento rígido de \mathbb{R}^3 , entonces su curvatura media no cambia. Si aplicamos una homotecia de razón r , entonces la curvatura media cambia en un factor $\frac{1}{r}$.

Toda superficie puede expresarse como la gráfica de una función en un entorno de cada punto. De hecho, usando las propiedades anteriores, puede moverse un punto cualquiera al origen y suponer sin perder generalidad que el plano tangente en dicho punto es el de ecuación $x_3 = 0$. Veamos cómo calcular la curvatura media en un grafo cualquiera, lo que nos permitirá simplificar la expresión (3).

Proposición 1.3 (curvatura media de un grafo). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $f \in C^\infty(\Omega)$. El grafo de la función f es la superficie parametrizada por $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, cuya curvatura media respecto del normal que apunta hacia arriba está dada por

$$H = \frac{(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv}}{2(1 + f_u^2 + f_v^2)^{3/2}} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right).$$

Demostración. Para la parametrización propuesta, se tiene que

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v), \quad N = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}},$$

de donde se obtiene que

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2, \\ \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \quad \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \quad \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}.$$

Por tanto, la primera igualdad para H en el enunciado se deduce de (3) y la segunda se deduce de desarrollar la divergencia. \square

Ejercicio 1. Comprobar que la esfera de \mathbb{R}^3 de centro $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$ tiene curvatura media constante $H = \frac{1}{r}$, usando los siguientes cuatro métodos alternativos:

- (a) (globalmente) con la parametrización $X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$,
- (b) (localmente) como grafo de la función $f(u, v) = \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$,
- (c) usando que podemos llevar cualquier punto de la esfera a cualquier otro mediante movimientos rígidos de \mathbb{R}^3 que dejan invariante la esfera,
- (d) mediante el cálculo de sus curvaturas normales.

Ejercicio 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, demostrar que el catenoide parametrizado por $X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$, que es la superficie resultante de rotar la curva catenaria $v \mapsto (a \cosh v, 0, av)$ alrededor del eje z , es una superficie mínima.

1.3. La ecuación de Laplace–Young

Supongamos que una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ representa la interfase entre dos fluidos ideales Ω_1 y Ω_2 con funciones de presión $p_1 \in C^\infty(\Omega_1)$ y $p_2 \in C^\infty(\Omega_2)$, una constante $\sigma \in \mathbb{R}$ representa la tensión superficial de la interfase y N es un normal unitario a Σ apuntando hacia Ω_2 . Veamos qué quieren decir estas afirmaciones sobre una región $S \subset \Sigma$ con borde una curva regular Γ :

- La presión del fluido Ω_i en cada punto $p \in S$ es una fuerza de módulo p_i en la dirección normal exterior a Ω_i . La suma de las presiones de los dos fluidos será $(p_1 - p_2)N$. La fuerza total sobre S está dada por $\mathbf{F}_p = \int_S (p_1 - p_2)N$.
- La tensión superficial en el interior de S se compensa y sólo tiene efecto sobre el borde Γ , es decir, es una fuerza de módulo σ en la dirección conormal exterior η . La fuerza total ejercida sobre Γ está dada por $\mathbf{F}_t = \sigma \int_\Gamma \eta$.

Si la interfase está en *equilibrio* ha de cumplirse $\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_t$, esto es:

$$\int_S (p_1 - p_2)N = \sigma \int_\Gamma \eta. \quad (4)$$

Comenzaremos dotando de sentido a la integración sobre curvas y superficies y después veremos que la identidad (4) determina el valor de la curvatura media de Σ mediante el teorema de la divergencia.

Integración en curvas y superficies

Consideremos una función continua $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y que queremos integrar a lo largo de una curva o una superficie regulares:

- Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular que parametrizamos como $\gamma : (a, b) \rightarrow \Gamma$. La

integral de h sobre Γ se define por

$$\int_{\Gamma} h = \int_a^b h(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt.$$

- Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular que parametrizamos como $X : U \rightarrow \Sigma$, siendo $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto. La integral de h sobre Σ se define por

$$\int_{X(U)} h = \int_U h(X(u, v)) \cdot \|X_u \wedge X_v\| du dv.$$

Las definiciones anteriores no dependen de las parametrizaciones γ ó X elegidas y los elementos $\|\gamma'(t)\|$ y $\|X_u \wedge X_v\|$ juegan el papel del jacobiano del cambio de variables entre el abierto de \mathbb{R} (resp. \mathbb{R}^2) y la curva Γ (resp. la superficie Σ).

Ejercicio 3. Demostrar que el área del grafo de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, es

$$\text{área}(f) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}.$$

Veamos una versión para superficies del teorema de la divergencia, que será la pieza clave en la demostración de la ley de Laplace–Young. Dado un campo vectorial diferenciable $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, podemos descomponerlo en componentes tangente y normal $V = V^T + V^N$ a lo largo de una superficie Σ . Definimos la divergencia de V^T en Σ como la función diferenciable

$$\text{div}_{\Sigma}(V^T) = \sum_{i=1}^2 \langle D_{\bar{w}_i} V, w_i \rangle - 2H \langle V, N \rangle, \quad (5)$$

donde $\{w_1, w_2\}$ es una base de direcciones principales. Esta divergencia cumple propiedades similares a la divergencia de campos en \mathbb{R}^2 y, en particular, satisface el siguiente resultado (que no demostraremos) que nos dice que la divergencia total de un campo en una región de la superficie es el flujo total a lo largo de su frontera.

Proposición 1.4 (fórmula de la divergencia). *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable. Dado un dominio acotado $S \subset \Sigma$ cuya frontera es una curva de Jordan $\Gamma \subset \Sigma$ con vector conormal exterior η , se cumple que*

$$\int_S \text{div}_{\Sigma}(V^T) = \int_{\Gamma} \langle V, \eta \rangle.$$

Demostración de la ley de Laplace–Young

Partiendo de la ecuación de equilibrio de la interfase (4), como se trata de integrales con integrandos vectoriales, vamos a multiplicarlos escalarmente por los vectores de

la base usual $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Tomando el campo constante $V = e_i$, de la definición de divergencia (5) deducimos que $\operatorname{div}(e_i^T) = -2H\langle e_i, N \rangle$, luego la fórmula de la divergencia aplicada a una región S de la interfase Σ con borde regular Γ nos dice que

$$\int_S (p_1 - p_2)\langle N, e_i \rangle = \sigma \int_\Gamma \langle \eta, e_i \rangle = \sigma \int_\Gamma \langle \eta, e_i^T \rangle = \sigma \int_S \operatorname{div}(e_i^T) = - \int_S 2H\sigma \langle N, e_i \rangle.$$

Como esto vale para $i \in \{1, 2, 3\}$ y para toda región $S \subset \Sigma$, deducimos la ley de Laplace–Young

$$2H\sigma = p_2 - p_1.$$

En particular, cuando p_1 y p_2 son funciones constantes, obtenemos que las interfases entre fluidos ideales con presiones constantes son H -superficies.

Propiedad de minimización del área

Hemos visto en la sección 1.1 que el trabajo necesario para aumentar el área de una interfase es proporcional al área, luego el área actúa como una energía del sistema físico. Vamos a ver que las H -superficies, que han aparecido de forma natural en la ecuación de Laplace–Young aparecen también como minimizantes del área, aunque en primer lugar hemos de definir qué entendemos por minimizante del área.

Supongamos que Σ es una superficie regular que delimita una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Diremos que Σ *minimiza el área* si cualquier pequeña deformación de Σ que preserve el volumen de la región acotada hace aumentar el área de la superficie.

Proposición 1.5. *Toda superficie conexa que minimiza el área entre todas las variaciones que preservan el volumen encerrado es una H -superficie.*

Demostración. Supongamos que Σ minimiza el área y, dado $p \in \Sigma$, veamos que H es constante en un entorno de p . Podemos aplicar un movimiento rígido de \mathbb{R}^3 para suponer que Σ es el grafo de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{U})$ en un entorno de p con $U \subset \mathbb{R}^2$ un disco abierto centrado en $(0, 0)$ y $f(0, 0) = p$. Consideremos una función $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $g \equiv 0$ en $\mathbb{R}^2 - U$ y $\int_U g = 0$. Para t suficientemente pequeño, cambiando f por $f + tg \in \mathcal{C}^\infty(U)$, la superficie Σ cambia en un entorno de p sin modificar su volumen ya que $\int_U g = 0$. Como Σ minimiza el área, la función $t \mapsto \text{área}(f + tg)$ tiene un mínimo

en $t = 0$, luego podemos usar el ejercicio 3 para calcular

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{área}(f + tg) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_U \sqrt{1 + (f_u + tg_u)^2 + (f_v + tg_v)^2} \\
&= \int_U \frac{g_u(f_u + tg_u) + g_v(f_v + tg_v)}{\sqrt{1 + (f_u + tg_u)^2 + (f_v + tg_v)^2}} \Big|_{t=0} = \int_U \left\langle \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \nabla g \right\rangle \\
&= \int_U \operatorname{div} \left(\frac{g \nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) - \int_U g \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) \\
&= \int_{\partial U} \left\langle \frac{g \nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}, \eta \right\rangle - \int_U g \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) = - \int_U g \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right).
\end{aligned}$$

Nótese que hemos conmutado la derivada respecto de t con la integral y después aplicado el teorema de la divergencia en U al campo $V = g(1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} \nabla f$ que se anula sobre el borde de U (η es un conormal unitario exterior a ∂U , la frontera de U). La arbitrariedad de g con $\int_U g = 0$ y el ejercicio 4 nos dicen que la divergencia en el integrando es constante, es decir, Σ tiene curvatura media constante en un entorno de p en vista de la proposición 1.3. \square

Ejercicio 4. Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 y $F \in C^\infty(U)$ tal que $\int_U F \cdot g = 0$ para toda $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ con $\int_U g = 0$. Demostrar que F es constante.

Observación 1.6. En realidad, el resultado sigue siendo cierto si la superficie Σ no encierra un volumen, en cuyo caso no imponemos que las variaciones preserven el volumen, como ocurre en el caso de las películas de jabón. En tal caso, consideramos variaciones arbitrarias con lo que la condición $\int_U g = 0$ en la demostración anterior no es necesaria. En tal caso, tenemos que

$$\int_U g \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \right) = 0$$

para toda función $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ que se anula fuera de U . Un resultado similar al del ejercicio 4 nos dice que en tal caso Σ tiene curvatura media nula, es decir, es minimal.

Hemos probado así que toda superficie que minimiza el área es una H -superficie. El recíproco no es cierto en general, es decir, no toda H -superficie minimiza el área. Entender esto es muy sencillo: una H -superficie es un punto crítico del funcional área, mientras que una superficie que minimiza el área es un mínimo relativo. Obviamente, no todo punto crítico es un mínimo relativo y, por ello, no toda H -superficie se puede construir (de forma estable) como una película de jabón. Por otro lado, todo mínimo relativo no tiene por qué ser un mínimo absoluto, como se deduce del ejercicio 5.

Ejercicio 5. Dado $a > 0$, sean las circunferencias Γ_{-a} y Γ_a de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$ en los planos $z = -a$ y $z = a$, respectivamente. Consideremos las siguientes superficies:

- (I) Σ es la región del catenoide $X(u, v) = (b \cosh v \cos u, b \cosh v \sin u, bv)$ (siendo $b \cosh a/b = 1$) comprendida entre Γ_{-a} y Γ_a
- (II) Σ' es la unión de los discos de ecuación $x^2 + y^2 < 1$ en los planos $z = -a$ y $z = a$.
- Encontrar valores $a_0, a_1 > 0$ tales que existe Σ en las condiciones descritas sólo si $a < a_1$ y Σ tiene menor área que Σ' sólo si $0 < a < a_0$.

✎ *Dar una interpretación física de los resultados.*

1.4. Aplicaciones

Las superficies de curvatura media constante ofrecen modelos matemáticos de sistemas físicos que minimizan la energía. Por una parte, hemos visto que hay una relación con la minimización de área, lo que supone un ahorro directo de material necesario para la elaboración de estructuras (más adelante hablaremos del problema de Plateau que puede). Por otra parte, las H -superficies distribuyen la tensión superficial σ de manera uniforme, es decir, cuando en un punto de la superficie cortamos la superficie por una curva, la fuerza que ejerce la tensión superficial tiene valor neto σ que no depende de la dirección en que cortemos. En la práctica, esto supone que las estructuras con forma de H -superficie no tengan una dirección privilegiada en la que sea más fácil romperlas, creando así superficies geoméricamente muy robustas.

Listamos a continuación una serie de campos en los que existen líneas de investigación que trabajan para incorporar las H -superficies como modelos matemáticos.

- **Cristalografía y ciencia de materiales.** Las superficies minimales triplemente periódicas son aquellas invariantes por traslación en tres direcciones de \mathbb{R}^3 linealmente independientes, en cuyo caso es interesante estudiar los movimientos rígidos que dejan la superficie invariante. Al conjunto de tales simetrías se le llama *grupo cristalográfico* de la superficie ya que sus propiedades están ligadas a las de estructuras cristalinas de diversos materiales. Las superficies minimales triplemente periódicas dividen a \mathbb{R}^3 en dos componentes disjuntas (similares a laberintos infinitos tridimensionales) y son de especial interés aquellas en las que tales componentes son congruentes o bien tienen idéntico volumen [3].

Desde mediados del siglo XIX se conocen ejemplos de superficies minimales triplemente periódicas, como las superficies primitiva (P), diamante (D) y hexagonal (H) descubiertas por Schwarz (1865) o la superficie de Neovius (1883), aunque una de las más famosas es el giroide, descubierto por Schoen (1970). Mostramos estas cuatro superficies en la figura 6, que forma parte de la colección de Weber (véase [11], donde también se proporciona código generar las imágenes con Mathematica). Estas formas se han encontrado en la naturaleza en lugares tan dispares como erizos marinos, membranas cúbicas, alas de mariposa o exoesqueletos de escarabajos y gorgojos. También se han descubierto en sistemas artificiales como cristales de zeolita, cristales líquidos liotrópicos y termotrópicos, o copolímeros de bloques autoensamblados, que se han utilizado para fabricar

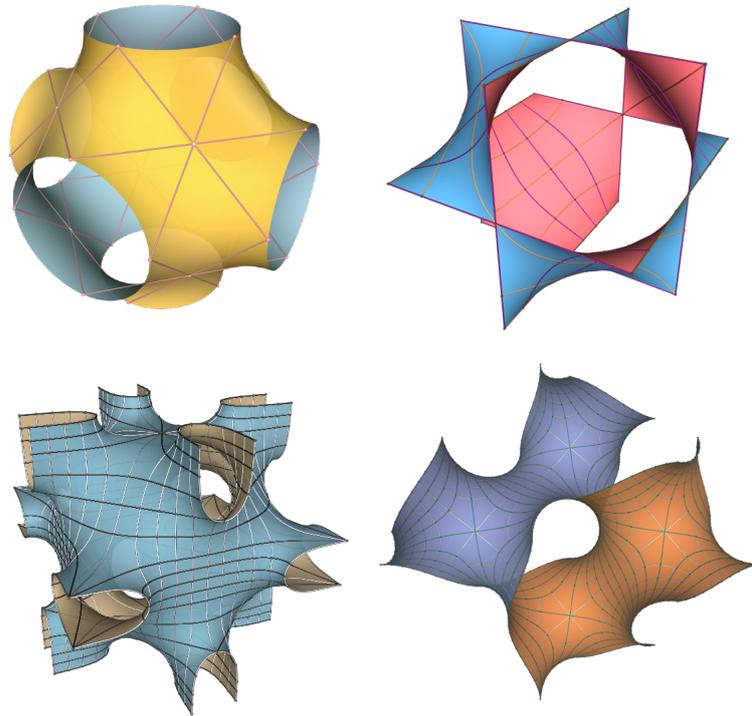


Figura 6: De izquierda a derecha: arriba superficies P y D de Schwarz, abajo superficies de Neovius y giroide (piezas fundamentales). Fuente: M. Weber [11].

una variedad de sólidos inorgánicos meso y macroporosos [6]. Las propiedades de minimización del área hacen que los materiales que son superficies minimales triplemente periódicas en escala microscópica presenten comportamientos sorprendentes en cuanto al reflejo de la luz que incide sobre ellos, la catálisis, la permeabilidad o la conversión de energía.

- **Arquitectura.** Se llama arquitectura tensada a la rama de la arquitectura que emplea en gran parte materiales (membranas textiles, láminas ligeras o mallas de cables) que sólo tienen rigidez a tracción y que son previamente tensados. En el caso en que la tensión sea uniforme en todas distintas direcciones, obtendremos superficies minimales salvo por el efecto de la gravedad, que puede ser despreciable si la estructura es muy ligera.
- **Medicina.** En la regeneración del tejido óseo o para corregir posibles deformidades se utilizan estructuras a modo de andamiaje que guían el desarrollo. Estas estructuras deben repartir de forma uniforme la compresión y dilatación que se



Figura 7: Estadio de los Juegos Olímpicos de Munich de 1972.

ejerce sobre ellas en diferentes direcciones, superando tests de diversos tipos, así como mantener una cierta permeabilidad. En la figura 8 pueden verse ciertas estructuras creadas con superficies minimales triplemente periódicas que han sido estudiadas en [1] para este propósito.

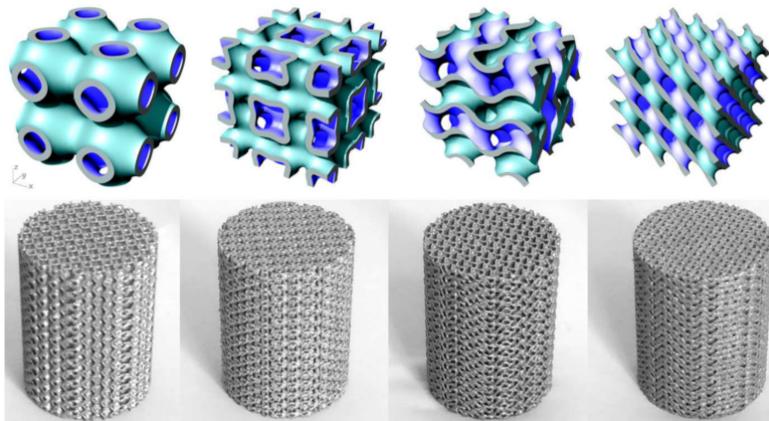


Figura 8: De izquierda a derecha: superficie P de Schwarz, superficie I-WP, superficie D de Schwarz y giroide. Los cilindros que aparecen en la parte de abajo son de titanio y tienen altura 2cm. Fuente: [1].

2. De la geometría a la física

En la sección anterior, hemos fundamentado la aparición de H -superficies en la naturaleza como interfases dando un modelo matemático riguroso para su estudio. En esta

sección vamos a utilizar herramientas matemáticas para responder a una cuestión muy natural: ¿por qué las pompas de jabón son esféricas?

2.1. El principio del máximo

El principio del máximo es posiblemente la herramienta más importante para el análisis de H -superficies. No es otra cosa que una reformulación geométrica del principio del máximo para EDPs elípticas de segundo orden, que nos permite comparar H -superficies que son tangentes en un punto interior o en la frontera. En pocas palabras, afirma que, para valores apropiados de las curvaturas medias, tales superficies no pueden quedarse una a un lado de la otra alrededor del punto de tangencia. En lo que sigue, diremos Σ es una superficie con frontera una curva diferenciable Γ cuando exista una superficie diferenciable Σ' que contiene a $\Sigma \cup \Gamma$ y $\Sigma - \Gamma$ es una componente conexa de $\Sigma' - \Gamma$.

Sean $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con frontera una curva diferenciable Γ (posiblemente vacía) donde hay definido un normal unitario continuo N y sea $p \in \Sigma \cup \Gamma$. Entonces, un entorno de p en $\Sigma \setminus \Gamma$ se puede escribir como grafo de una función diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sobre el plano tangente a Σ en p (en la dirección de N_p), es decir, dada una base ortonormal $\{e_1, e_2, N_p\}$ de \mathbb{R}^3 la aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$X(u, v) = p + ue_1 + ve_2 + f(u, v)N_p$$

parametriza un entorno de p en $\Sigma - \Gamma$. En el caso en que p es interior a Σ , el abierto U puede tomarse como un disco centrado en el origen, mientras que para $p \in \Gamma$, U puede ser un trozo de disco limitado por una curva regular que corresponde a la proyección de la frontera sobre el plano tangente.

Dadas dos superficies $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ con fronteras Γ_1 y Γ_2 , respectivamente, diremos que son tangentes en un punto interior $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ cuando tengan el mismo plano tangente en p . Diremos que son tangentes en un punto de la frontera $p \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ si tiene el mismo plano tangente en p y Γ_1 y Γ_2 tienen la misma recta tangente en p (véase la figura 9). Con todos estos ingredientes, podemos definir rigurosamente qué quiere decir que las superficies se quedan una a un lado de la otra alrededor de cierto punto de tangencia.

Definición 2.1 (superficies ordenadas). *Diremos que Σ_1 está por debajo de Σ_2 respecto de un normal común en un punto de tangencia p (interior o en la frontera) y escribiremos $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$, si al escribirlas localmente como grafos de funciones f_1 y f_2 respecto de dicho normal, se cumple que $f_1 \leq f_2$ en un entorno de $(0, 0)$.*

Las curvaturas medias de superficies que están ordenadas en un punto también están ordenadas en dicho punto, como mostramos a continuación, basándonos en el siguiente ejercicio que es la versión de este resultado para curvas planas.

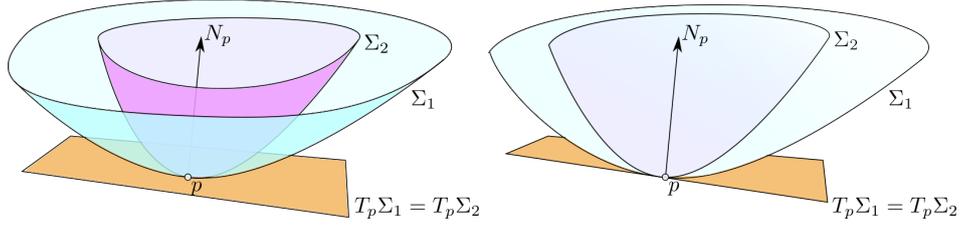


Figura 9: Superficies ordenadas tangentes en un punto interior (izquierda) y superficies ordenadas tangentes en un punto de la frontera (derecha).

Ejercicio 6. Sea $\varepsilon > 0$ y $g_1, g_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase \mathcal{C}^∞ tales que $g_1(0) = g_2(0) = g_1'(0) = g_2'(0) = 0$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

- (a) Las curvaturas de las gráficas de g_1 y g_2 en $(0, 0)$ respecto del normal $\mathbf{n}(0) = (1, 0)$ están dadas por $\kappa_1(0) = g_1''(0)$ y $\kappa_2(0) = g_2''(0)$, respectivamente.
- (b) Si $g_1 \leq g_2$ en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $\kappa_1(0) \leq \kappa_2(0)$.

Proposición 2.2 (comparación básica). Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies tangentes en un punto p tales que $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$ respecto de campos normales que coinciden en p . Entonces, sus funciones curvatura media satisfacen $H_1(p) \leq H_2(p)$.

Demostración. Como $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$, el corte de ambas superficies con un plano normal que pasa por p y contiene a N y un vector unitario tangente w está formado (en un entorno de p) por dos curvas planas. Trasladando p al origen de forma que N pase a ser el vector $(0, 0, 1)$, estas curvas se pueden ver como las gráficas de $g_1, g_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase \mathcal{C}^∞ tales que $g_1(0) = g_2(0) = g_1'(0) = g_2'(0) = 0$ y el ejercicio 6 nos dice que $\kappa_1(0) \leq \kappa_2(0)$. En otras palabras, la curvatura normal $\kappa_{1n}(w)$ de Σ_1 es menor o igual que la curvatura normal κ_{2n} de Σ_2 .

Sean w_{i1} y w_{i2} direcciones principales de Σ_i en las que la curvatura normal sea mínima y máxima, respectivamente. Tenemos entonces que $\kappa_{1n}(w_{11}) \leq \kappa_{1n}(w_{21}) \leq \kappa_{2n}(w_{21})$ y $\kappa_{1n}(w_{12}) \leq \kappa_{2n}(w_{12}) \leq \kappa_{2n}(w_{22})$, luego las curvaturas normales mínima y máxima de Σ_1 en p son menores o iguales que las curvaturas normales máxima y mínima de Σ_2 en p . Por tanto, la media también es menor o igual, esto es, $H_1(p) \leq H_2(p)$. \square

No obstante, en el caso en que las superficies tienen curvatura media constante este principio de comparación es mucho más fuerte. Su demostración se basa en expresar ambas superficies como grafos de funciones, darse cuenta de que la curvatura media es un operador cuasilineal elíptico sobre la función que define el grafo y aplicar un principio del máximo para tales operadores. Aunque no desarrollaremos la demostración, ésta puede encontrarse en [4, Section 10].

Teorema 2.3 (principio del máximo). Sean Σ_1 y Σ_2 dos H -superficies tangentes

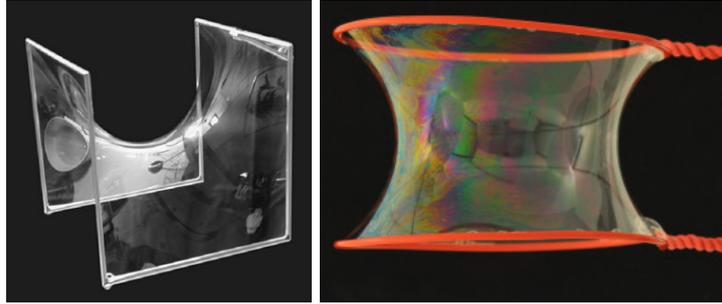


Figura 10: Una película de jabón cuyo borde está formado por aristas de un cubo (izquierda) y otra con borde dos circunferencias paralelas (derecha).

en un punto p con curvaturas medias constantes H_1 y H_2 , respectivamente, respecto de campos normales que coinciden en p y para los que $\Sigma_1 \leq \Sigma_2$. Entonces, $H_1 \leq H_2$ y, si $H_1 = H_2$, entonces Σ_1 y Σ_2 coinciden en un entorno de p .

2.2. Algunas consecuencias

Entre las muchas consecuencias del principio del máximo, destacamos los siguientes. Son ejemplos de resultados que desde el punto de vista físico pueden intuirse y parecer razonables, pero cuya demostración o verificación no es asequible sin las herramientas proporcionadas por la geometría de superficies. En la siguiente sección también usaremos el principio del máximo para estudiar el problema de Plateau.

Corolario 2.4 (Propiedad de la envolvente convexa). Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie compacta con frontera una curva continua Γ . Entonces Σ está contenida en la envolvente convexa de Γ .

La envolvente convexa de un subconjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^3$ es el menor convexo que lo contiene y coincide con la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen a A . De esta forma, el corolario 2.4 tiene una aplicación que puede resultar sorprendente la primera vez que se ve: si introducimos un alambre en agua jabonosa, obtenemos una superficie con $H = 0$ cuyo borde es el propio alambre. Si apoyamos ahora el alambre sobre una mesa (superficie plana también con $H = 0$) en cualquier posición y dirección, sólo el alambre tocará la mesa (nunca la superficie). De la misma manera, si introducimos dos alambres con formas arbitrariamente complejas, nunca podremos hacer que las eventuales superficies mínimas que se formen se toquen entre sí (siempre tocará alambre y alambre o bien alambre y superficie). Por ejemplo, las superficies mostradas en la figura 11 tiene su borde formado por aristas de un cubo o por dos círculos paralelos; la propiedad de la envolvente convexa nos dice que las superficies se queda dentro del cubo y del cilindro, respectivamente.

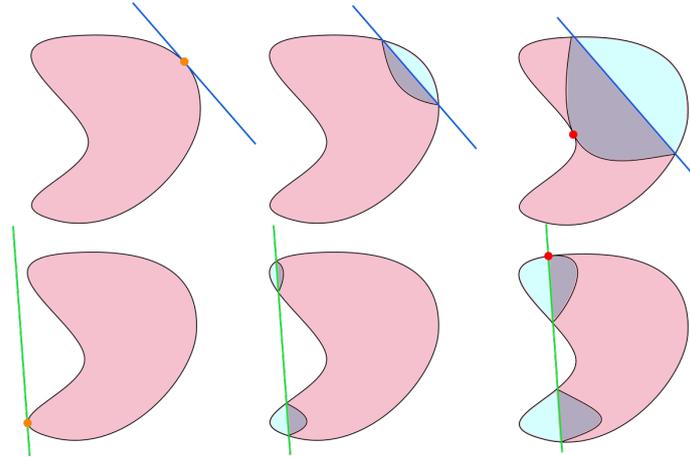


Figura 11: Representación bidimensional del principio de reflexión de Alexandrov. En rosa puede verse la figura, a la que se aplica el método respecto de dos direcciones (una arriba y otra abajo). Las superficies que se reflejan pueden verse en azul claro y las reflejadas en gris. En naranja se han representado los primeros puntos de tangencia en dichas direcciones. En el caso de arriba, se produce un punto de contacto interior, mientras que en el caso de abajo se produce un punto de contacto en la frontera (ambos en rojo).

Demostración. Será suficiente probar que cualquier semiespacio cerrado S que contiene a Γ también contiene a Σ . Supongamos por reducción al absurdo que no es así y sea Π el plano frontera de S . Podemos mover Π de forma paralela hacia el exterior de S hasta que toque al compacto $\Sigma \cup \Gamma$ en un último punto p_0 . Este punto debe pertenecer al interior de Σ pues hemos supuesto que S que contiene a Γ pero no a Σ . Por tanto, Σ y el plano trasladado son superficies mínimas tangentes en p_0 y están ordenadas, lo que contradice el principio del máximo. \square

Como consecuencia, deducimos que las pompas de jabón simples han de tener la forma de una esfera. La forma de aplicar el principio del máximo en este caso es el método de reflexión de Alexandrov, también conocido como método de los *moving planes*. Consiste en mover de forma paralela un cierto plano de \mathbb{R}^3 y obtener un punto de contacto en el interior o en la frontera de un trozo de la superficie con otro trozo reflejado respecto de dicho plano.

Corolario 2.5 (Teorema de Alexandrov). *La esfera de radio $\frac{1}{H}$ es la única H -superficie de \mathbb{R}^3 compacta y sin frontera.*

Idea de la demostración. Sea Σ una H -superficie compacta y sin frontera, que bordea un dominio compacto y conexo Ω , según el teorema de separación de Jordan–Brouwer,

y consideremos una dirección no nula $u \in \mathbb{R}^3$. Los planos que tienen a u por vector normal están dados por la ecuación $\langle x, u \rangle = t$ para cierto $t \in \mathbb{R}$ y llamemos Π_t a este plano. Si t es suficientemente grande, entonces $\Sigma \cap \Pi_t = \emptyset$, luego podemos reducir t hasta que Π_t tenga un primer punto de contacto con Σ para $t = t_0$. Para $t < t_0$ próximo a t_0 , el plano Π_t corta a Σ y la separa en dos trozos, uno formado por los puntos de $p \in \Sigma$ tales que $\langle p, u \rangle > t$ y otro por aquellos en que $\langle p, u \rangle < t$. Si reflejamos el primero respecto de Π_t obtenemos una superficie Σ'_t . Puede demostrarse que existe un intervalo maximal $[t_1, t_0]$ tal que para $t \in [t_1, t_0]$ la superficie reflejada Σ'_t cae en el dominio compacto Ω . Si analizamos lo que ocurre en $t = t_1$, vemos que para $t < t_1$, la pieza reflejada sale de Ω y esto ocurre porque Σ'_{t_1} presenta un punto de tangencia interior o en la frontera con Σ (véanse ambos casos en la figura ??), pero tales superficies tienen curvatura media H respecto de un normal común y cumplen $\Sigma \leq \Sigma'_{t_1}$ en el punto de tangencia. Por tanto, deben coincidir en un entorno de p y, de hecho, por ciertos resultados de analiticidad de H -superficies, $\Sigma'_{t_1} \subset \Sigma$, lo que se traduce en que Σ es simétrica respecto de Π_{t_1} .

Este argumento se puede replicar para cualquier dirección no nula $u \in \mathbb{R}^3$ y usando el hecho de que Σ es compacta y el ejercicio 7, puede probarse que Σ debe ser una esfera. Como la curvatura media es H por hipótesis, el radio de la esfera debe ser $\frac{1}{H}$ según el ejercicio 1. \square

Ejercicio 7. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular compacta y sin frontera. Supongamos que, para cada $u \in \mathbb{R}^3$ no nulo, existe un plano ortogonal a u respecto del que Σ es simétrica. Demostrar que Σ es una esfera.

3. Modelización

Con el auge de los sistemas informáticos durante el último medio siglo, la representación numérica y gráfica de soluciones de ecuaciones diferenciales ha pasado al primer plano en muchos estudios, tanto teóricos como aplicados. Esto es debido al inmenso poder que representa una visualización de objetos de los que teóricamente apenas se conocen algunas propiedades cualitativas (un ejemplo claro son las H -superficies que hemos estudiado en secciones anteriores). Podríamos estar tentados de afirmar que la modelización numérica ha sustituido a la intuición, pero posiblemente sea más acertado decir que la llevado a un nivel que era inimaginable en la era preinformática.

3.1. Introducción a Surface Evolver

Surface Evolver es un programa desarrollado por Kenneth Brakke para resolver y visualizar problemas de minimización de distintos funcionales que actúan sobre curvas y superficies. Todo el material que desarrollaremos aquí puede encontrarse en la página web del programa (<http://facstaff.susqu.edu/brakke/evolver/evolver.html>) o bien en

su documentación [2]. Una serie de tutoriales en español muy completos sobre este programa también puede encontrarse en [10].

Instalación

- **Windows 10.** Descargar el archivo `Evolver-2.70-Win32.msi`, ejecutarlo haciendo doble click sobre él y seguir las instrucciones proporcionadas.

Para utilizar Surface Evolver, se puede ejecutar el programa instalado (lo que abrirá una consola y nos preguntará por el archivo que queremos abrir) o bien hacer doble click directamente sobre el archivo de extensión `.fe` deseado.

- **macOs 10.14 Mojave**

1. Descargar y descomprimir el fichero `evolver270-osx.tar.gz`.
2. Crear una carpeta `evolver` en `/Users/tu-nombre/Applications`.
3. Mover las carpetas `fe`, `doc` y el archivo `evolver` a esa carpeta.
4. Añadir las siguientes dos líneas al archivo `/Users/tu-nombre/.profile`:

```
EVOLVERPATH = /Users/tu-nombre/Applications/evolver/fe:/Users/  
tu-nombre/evolver/doc  
export EVOLVERPATH
```

(para mostrar/ocultar archivos ocultos pulsar `cmd+shift+.`)

Para utilizar Surface Evolver, sólo es necesario ejecutar en consola o hacer doble click sobre el archivo `evolver` en la carpeta `evolver` creada en el paso 2 y guardar los archivos de trabajo en la subcarpeta `fe`.

Funcionamiento básico

Una vez iniciamos Surface Evolver, aparece una pantalla de la consola en la que se nos pide indicar el fichero con el que queremos trabajar. Indicamos un nombre de fichero de extensión `.fe` que debe estar en la carpeta `fe` y que previamente hemos configurado. A continuación pasamos automáticamente al modo consola del programa. Para intercambiar entre el *modo consola* y el *modo gráfico* introducimos los comandos `s` (`show`) o `q` (`quit`). Hay que tener cuidado porque introduciendo el comando `q` también salimos del programa. En general, los comandos más comunes son los siguientes:

Comandos en modo consola	Comandos en modo gráfico
s pasa a modo gráfico.	q vuelve a modo consola.
g n realiza n iteraciones.	ratón mueve la superficie.
r subdivide la malla de la superficie.	r modo rotación.
u, V ó hessian simplifican la malla.	t modo traslación.
P exporta gráficos.	z modo zoom.
q cierra el programa.	f/e muestra y oculta caras/aristas.
	+/- cambia el grosor de las aristas.
	G abre más ventanas.

Un fichero básico de Surface Evolver maneja superficies de forma combinatoria y para ello tiene objetos distribuidos en varias categorías:

- **vertices** – los vértices o 0-símplices de la triangulación.
- **edges** – las aristas o 1-símplices de la triangulación.
- **facets** – las caras, que pueden ser cualquier tipo de polígono.
- **bodies** – los volúmenes encerrados y delimitados por caras.

Surface Evolver numera cada uno de estos elementos y utiliza cada nivel para definir el siguiente siguiendo una orientación (como puede verse en el ejemplo de la esfera más adelante). Por otro lado, estos elementos pueden tener *modificadores* para indicar que su evolución a través de las iteraciones del programa se hace de una forma concreta y veremos algunos de ellos en los ejemplos que vamos a tratar.

Cuando se ejecuta su comando de iteración **g**, el programa mueve los vértices de la figura manteniendo la configuración combinatoria de aristas, caras y volúmenes. Merece la pena dedicar unas líneas para saber cómo emplea el funcional elegido (en nuestro caso el área) para mover dichos vértices.

- Sea C una cara triangular de la superficie cuyo borde recorreremos cíclicamente usando vectores $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$. La energía de la cara, que no es más que su área multiplicada por la tensión superficial T (que es una constante y usualmente igual a 1), puede calcularse usando el producto vectorial como

$$E(C) = \frac{T}{2} \|\vec{r}_0 \times \vec{r}_1\|.$$

La energía total del sistema, que nos muestra la consola en cada iteración es la suma de las energías de todas las caras.

- Dado un vértice v , cada cara C que tiene a v por vértice contribuye con una fuerza en una dirección tangente al plano que contiene a C (véase la figura 12). Si tomamos $\vec{s}_0, \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_r$ las aristas orientadas que salen de v con $\vec{s}_r = \vec{s}_0$, la fuerza total aplicada sobre v está dada por

$$F(v) = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{T}{2} (\vec{s}_i - \vec{s}_{i+1}) \times \frac{\vec{s}_i \times \vec{s}_{i+1}}{\|\vec{s}_i \times \vec{s}_{i+1}\|}.$$

En cada iteración, el programa mueve cada vértice v mediante el vector $F(v)$, lo que modifica la energía en la dirección que ésta decrece más rápidamente⁷.

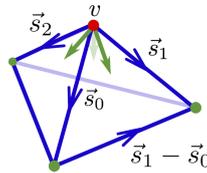


Figura 12: La fuerza sobre el vértice v es la suma de tres componentes tangentes a cada una de las caras (en verde) correspondientes a sus tensiones superficiales

3.2. El problema isoperimétrico y la pompa múltiple

Existen muchas maneras de producir una esfera con Surface Evolver como solución numérica a un problema isoperimétrico. Posiblemente la más sencilla consiste en tomar como superficie discreta inicial un cubo de arista unidad y hacer iteraciones y subdivisiones sobre él preservando el volumen encerrado. Un tal cubo tiene 8 vértices, 12 aristas, 6 caras y un volumen, como pueden verse en la figura 13.

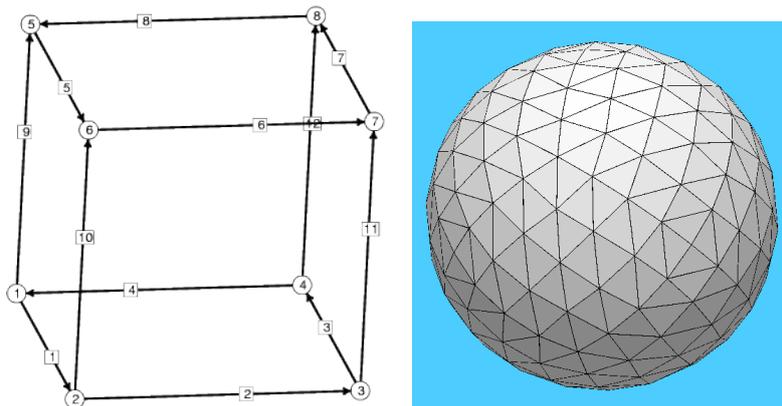


Figura 13: Derecha: configuración inicial. Izquierda: evolución mediante gogo

Esto podemos plasmarlo en el código siguiente, en el que se comienza dando las coordenadas de los vértices numerados. Después se dan las aristas, también numeradas, como pares de vértice inicial y vértice final según las flechas de figura 13. A continuación, las caras numeradas, que son cuadrados y por tanto consisten en cuatro aristas consecutivas. En este paso es muy importante considerar una orientación en

⁷En realidad, la fórmula dada para $F(v)$ no tiene en cuenta las restricciones y modificadores.

las caras ya que cada cara está definida por una sucesión cíclica de aristas. Obsérvese que algunas aristas necesitan cambiar su orientación para ajustarse a la ordenación cíclica en la cara para lo que las indicamos con signo negativo. De esta forma, todas las aristas aparecen una vez con signo positivo y otra vez con signo negativo, de forma que se compensan al aparecer en dos caras adyacentes recorridas de forma opuesta. Finalmente, hay un único volumen al que se le ha añadido el modificador `volume 1` para indicar que su volumen debe quedar invariante.

```

1 vertices
2 1 0.0 0.0 0.0
3 2 1.0 0.0 0.0
4 3 1.0 1.0 0.0
5 4 0.0 1.0 0.0
6 5 0.0 0.0 1.0
7 6 1.0 0.0 1.0
8 7 1.0 1.0 1.0
9 8 0.0 1.0 1.0
10
11 edges
12 1 1 2
13 2 2 3
14 3 3 4
15 4 4 1
16 5 5 6
17 6 6 7
18 7 7 8
19 8 8 5
20 9 1 5
21 10 2 6
22 11 3 7
23 12 4 8
24
25 faces
26 1 1 10 -5 -9
27 2 2 11 -6 -10
28 3 3 12 -7 -11
29 4 4 9 -8 -12
30 5 5 6 7 8
31 6 -4 -3 -2 -1
32
33 bodies
34 1 1 2 3 4 5 6 volume 1
35
36 read
37
38 gogo := { g 5; r; g 5; hessian; r; g 5; hessian; }

```

Fichero fe/esfera.fe

El código también define una secuencia de comandos `gogo` que indica que se itere 5 veces, luego se subdivida para iterar 5 veces más y se repita el proceso. El resultado de dicha secuencia puede apreciarse en la figura 13. Un par de observaciones:

- Después de cada comando de subdivisión `r` es necesario hacer iteraciones `g` y simplificaciones `u/V/hessian`. No conviene subdividir varias veces consecutivas porque puede perderse la convergencia numérica al objeto buscado.

Ejercicio 8. En el fichero `esfera.fe` modificar las coordenadas de los vértices y comprobar que el nuevo proceso de evolución también converge a la esfera.

Pompas múltiples

Aunque no hemos dado una demostración de todos los detalles, hemos justificado ya de varias formas por qué las pompas de jabón son esféricas. A veces cuando soplamos por nuestro pompero, salen dos pompas pegadas, cada una de las cuales parece una esfera pero, ¿son realmente esféricas? ¿es plana la superficie que las separa? ¿qué ocurre en la intersección de las dos pompas? En primer lugar, tenemos que aclarar qué es el nuevo objeto ya que no es una superficie en su totalidad y está compuesto por:

1. Trozos diferenciables que son superficies regulares.
2. Curvas regulares donde se encuentran varias superficies.
3. Vértices donde se encuentran varias curvas.

Argumentos de minimización del área con el volumen prefijado nos dan la siguiente información (el primer ítem es consecuencia de la proposición 1.5):

1. Cada superficie diferenciable debe ser una H -superficie.
2. Cada curva regular debe ser intersección de exactamente tres superficies y estas deben formar ángulos diedrales de 120° .
3. Cada vértice debe ser intersección de exactamente seis superficies.

Este tipo de configuraciones modelan el comportamiento isoperimétrico de un número cualquiera de volúmenes e incluso el comportamiento de la espuma. Volviendo al problema de la pompa doble, que parecía ser sencillo una vez se hubo resuelto el isoperimétrico en el siglo XIX, no fue resuelto rigurosa y completamente hasta el año 2000 por Hutchings, Morgan, Ritoré y Ros.

Teorema 3.1 (Pompa doble). [7] *La solución al problema isoperimétrico con dos volúmenes es un conjunto de tres casquetes esféricos (uno de ellos posiblemente un disco plano) que se cortan formando ángulos de 120° a lo largo de una circunferencia.*

Vamos a modificar el fichero `esfera.fe` para dar cabida a dos volúmenes distintos $V_1 = 1$ y $V_2 = 0,5$, que podemos visualizar con Surface Evolver y que nos da una configuración similar a la de la figura 14 (hemos coloreado⁸ las caras que nos interesaban para diferenciar las dos regiones).

⁸Surface Evolver define los colores

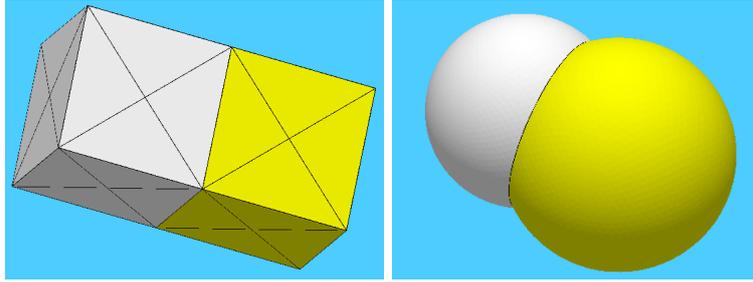


Figura 14: Configuraciones inicial y final (después de usar el comando `gogo`) de la pompa doble generada por el fichero `doble.fe`.

```

1 | vertices
2 | 1 0 0 0
3 | 2 1 0 0
4 | 3 2 0 0
5 | 4 0 1 0
6 | 5 1 1 0
7 | 6 2 1 0
8 | 7 0 0 1
9 | 8 1 0 1
10 | 9 2 0 1
11 | 10 0 1 1
12 | 11 1 1 1
13 | 12 2 1 1
14 |
15 | edges
16 | 1 1 2
17 | 2 2 3
18 | 3 4 5
19 | 4 5 6
20 | 5 1 4
21 | 6 2 5
22 | 7 3 6
23 | 8 7 8
24 | 9 8 9
25 | 10 10 11
26 | 11 11 12
27 | 12 7 10
28 | 13 8 11
29 | 14 9 12
30 | 15 1 7
31 | 16 2 8
32 | 17 3 9
33 | 18 4 10
34 | 19 5 11
35 | 20 6 12
36 |
37 | faces

```

```

38 1 1 6 -3 -5 color yellow
39 2 2 7 -4 -6
40 3 3 19 -10 -18 color yellow
41 4 4 20 -11 -19
42 5 10 -13 -8 12 color yellow
43 6 11 -14 -9 13
44 7 8 -16 -1 15 color yellow
45 8 9 -17 -2 16
46 9 5 18 -12 -15 color yellow
47 10 6 19 -13 -16
48 11 -7 17 14 -20
49
50 bodies
51 1 -1 -3 -5 -7 -9 10 volume 1
52 2 -2 -4 -6 -8 -10 -11 volume 0.5
53
54 read
55
56 gogo:={g 10; r; g 20; r; g 50; r; g 100}

```

Fichero fe/doble.fe

Ejercicio 9. Modificar el fichero `esfera.fe` para resolver numéricamente el problema de la pompa triple con volúmenes $V_1 = 1$, $V_2 = 2$ y $V_3 = 3$.

✎ *Probar distintas configuraciones iniciales para intuir la disposición de las pompas.*

Ejercicio 10. Modificar el fichero `esfera.fe` para resolver numéricamente el problema de la pompa cuádruple con volúmenes $V_1 = 2$, $V_2 = 1,5$, $V_3 = 5$ y $V_4 = 1,5$.

✎ *Probar distintas configuraciones iniciales para intuir la disposición de las pompas.*

3.3. Los problemas de Plateau y de frontera libre

Motivados por los experimentos con películas de jabón, nos preguntamos si, dada una curva de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, existe una superficie mínima Σ con borde Γ . Este problema fue planteado de forma más abstracta por Lagrange en 1760, pero fue J. Plateau quien le dio nombre al retomarlo a mediados del siglo XIX y asociarlo con experimentos jabonosos. No fue resuelto hasta la década de 1930, cuando J. Douglas y T. Radó dieron soluciones independientes con una generalidad aceptable. Douglas obtuvo la medalla Fields por sus contribuciones en este campo.

Determinar condiciones necesarias y suficientes sobre una curva arbitraria $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ para la existencia o la unicidad de solución sigue siendo un problema abierto. El proceso matemático para atacar el problema consiste en considerar una sucesión de superficies con borde Γ cuyas áreas converjan al ínfimo de tales áreas y encontrar una topología para la que una sucesión parcial converja. El objeto al que converge se puede demostrar que es una superficie regular con posibles autointersecciones y singularidades aisladas (la eliminación de tales singularidades es un tema de investigación activo). Aquí nos

quedaremos con la siguiente solución del problema simplificado que ofrece existencia y unicidad sin singularidades y permitirá construir la superficie P de Schwarz.

Teorema 3.2 (Problema de Plateau gráfico). *Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva de clase \mathcal{C}^1 a trozos cuya proyección ortogonal sobre un cierto plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ es inyectiva y bordea un dominio convexo de Π . Entonces, existe una única superficie mínima Σ con borde Γ y Σ es un grafo sobre el plano Π .*

Idea de la demostración. La existencia de una superficie Σ con borde Γ vamos a omitirla ya que su demostración no es elemental y puede consultarse, por ejemplo, en [5]. No obstante, el resto del teorema puede demostrarse empleando el principio del máximo de forma inteligente. Supondremos además que el plano Π tiene ecuación $z = 0$ (identificado con \mathbb{R}^2) después de aplicar un movimiento rígido a Σ y llamemos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ al dominio convexo bordeado por la proyección de Γ .

1. En primer lugar, probaremos que $\Sigma \subset \Omega \times \mathbb{R}$. Por reducción al absurdo, si existiera $p \in \Sigma$ que no se proyecta dentro de Ω , como Ω es convexo, existirá una recta en \mathbb{R}^2 que separe Ω y la proyección de p . Tomando planos cuyas proyecciones son rectas paralelas a esta, podemos alejarnos suficientemente y acercarnos hasta producir un primer punto de contacto. El hecho de que exista p garantiza que dicho punto de contacto se produce fuera de $\Omega \times \mathbb{R}$ y, por tanto, no puede ser en la frontera, que está contenida en $\Gamma \times \mathbb{R} \subset \Omega \times \mathbb{R}$. Esto contradice el principio del máximo aplicado al plano y a la superficie Σ (ver figura 15, izquierda).
2. En segundo lugar, probaremos que Σ es un grafo sobre el interior de Ω . Para ello, de nuevo por reducción al absurdo, supongamos que existen dos puntos $p_1, p_2 \in \Sigma$ que se proyectan sobre el mismo punto de Ω . Consideremos la superficie Σ_t que consiste en una traslación vertical de Σ a distancia t . Para t suficientemente grande, $\Sigma_t \cap \Sigma = \emptyset$ y podemos decrecer t hasta un valor t_0 en que se produce un primer punto de contacto entre Σ_t y Σ . El punto de contacto debe ser interior ya que la existencia de tales puntos p_1 y p_2 impide que Σ_{t_0} y Σ se toquen en la frontera. Esto contradice el principio del máximo (ver figura 15, centro).
3. Finalmente, veamos que la superficie es única. Supongamos una vez más por reducción al absurdo que hay otra superficie Σ' , que también es grafo sobre el interior de Ω y también tiene borde Γ . Usando las superficies Σ_t del punto anterior, puede verse fácilmente que ha de existir un instante t_0 en que las superficies Σ' y Σ_{t_0} contradicen el principio del máximo (ver figura 15, derecha). \square

Podríamos pensar que la superficie P de Schwarz (véase la figura 6) no es un grafo y, por tanto, no podremos utilizar el teorema 3.2. Sin embargo, si nos fijamos en las rectas dibujadas sobre la figura, encontramos rápidamente un cuadrilátero cuyos bordes son segmentos de igual longitud y cuyos ángulos son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$ (teniendo en cuenta el grupo de simetría de la figura): este cuadrilátero sí que se proyecta inyectivamente sobre un plano, luego la superficie P es la única superficie mínima con este borde.

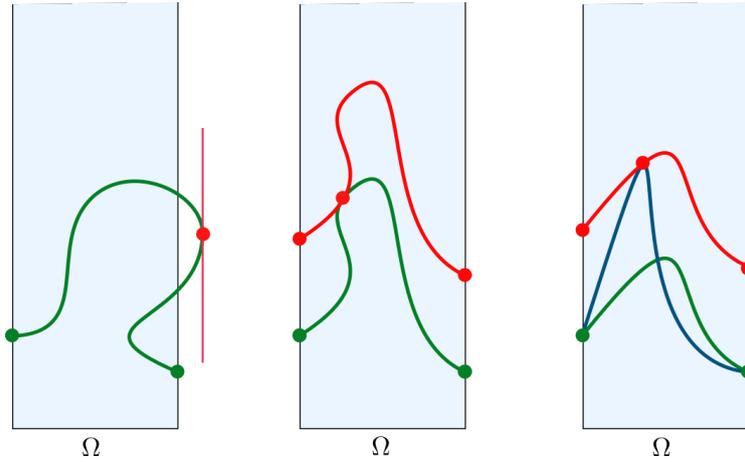


Figura 15: Representación bidimensional de la demostración del teorema 3.2. En azul se representa el cilindro convexo $\Omega \times \mathbb{R}$ y en verde la superficie Σ en cada uno de las propiedades probadas en los ítems 1, 2 y 3, de izquierda a derecha. En rojo se representan las superficies utilizadas para aplicar el principio del máximo y en rojo los puntos de contacto que producen la contradicción. En la figura de la derecha, se ha representado en azul una segunda superficie gráfica con la misma frontera que Σ .

Otro problema que también surge de forma natural en los experimentos consiste en utilizar una cierta superficie para apoyar la película de jabón. Mientras que el problema de Plateau es un problema de frontera prescrita, al apoyarnos sobre una superficie no sabemos *a priori* cuál es la curva intersección de la película con la superficie, por lo que decimos que es un problema *de frontera libre*. Este problema fue propuesto por Gergonne en 1816 y, aunque se ha trabajado con menor intensidad que el problema de Plateau, ha dado lugar a numerosas investigaciones durante el siglo XX y actualmente es un tema bastante activo en el caso en la superficie S es una esfera.

Aunque no vamos a exponer aquí un resultado de existencia general, diremos que toda superficie que minimice el área con frontera libre ha de cortar a la superficie donde se apoya ortogonalmente⁹. El siguiente resultado, que puede entenderse como un principio de continuación analítica para H -superficies, nos permite completar una superficie a partir de la pieza-solución del problema de Plateau o del un problema de frontera libre (o incluso de un problema mixto, como veremos en la siguiente sección).

Teorema 3.3 (Principio de reflexión de Schwarz). *Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una H -superficie.*

(a) *Si Σ contiene un segmento rectilíneo $R \subset \Sigma$, entonces Σ es invariante por la*

⁹Es usual encontrar en la literatura el nombre *superficie minimal de frontera libre* en una región $W \subset \mathbb{R}^3$ para denotar a las superficies minimales $\Sigma \subset W$ cuyas fronteras cortan ortogonalmente a la frontera de W .

simetría axial respecto de R.

- (b) *Si Σ corta a un plano Π de forma ortogonal, entonces Σ es invariante por la simetría especular respecto de Π .*

Construcción de superficies triplemente periódicas

Para implementar los resultados teóricos que hemos comentado anteriormente, veamos cómo indicar la frontera prescrita y la frontera libre en Surface Evolver e indicarle cómo reflejar la superficie respecto de su frontera.

- **Frontera prescrita (arista fija).** Para que una de las aristas de la figura no se mueva al iterar (`g`), se añade `fixed` a la arista y a sus vértices.

Nota: `no_refine` hace que las aristas no se subdividan al usar `r`.

- **Frontera prescrita (general).** Para indicar que un trozo de la frontera debe seguir una curva no rectilínea, es necesario definir una parametrización de la curva. Por ejemplo, podemos escribir

```
boundary 1 parameters 1
x1: 2 * cos(p1)
x2: 2 * sin(p1)
x3: 3
```

para parametrizar una circunferencia de radio 2 en el plano $z = 3$. Ahora simplemente hay que añadir los modificadores `boundary 1` y `fixed` a los vértices y aristas que se refinarán siguiendo esta parametrización.

- **Frontera libre.** Para indicar que una arista deber moverse y subdividirse sobre una superficie, es necesario definir la superficie. A diferencia de las curvas, en este caso no damos una parametrización sino una fórmula implícita de la superficie. Por ejemplo, podemos escribir

```
constraint 1
formula: x+y=0
```

para definir el plano de ecuación $x + y = 0$. A las aristas y vértices que deban evolucionar sobre esta superficie se les añade el modificador `constraint 1`.

Por otro lado, todo movimiento rígido del espacio es una transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que puede expresarse matricialmente de la forma

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

donde $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal y $b \in \mathbb{R}^3$ es un vector columna arbitrario. En Surface Evolver, esta isometría se representa en coordenadas homogéneas como

```

a11 a12 a13 b1
a21 a22 a23 b2
a31 a32 a33 b3
0 0 0 1

```

Además, las isometrías se incluyen en el preámbulo del fichero y deben ir precedidas del comando `view_transforma_generators N`, siendo `N` el número de generadores. El programa nombra automáticamente a estos generadores como `a`, `b`, `c`, etc. Para transformar la superficie obtenida, utilizaremos el comando

```
transform_expr cadena
```

donde `cadena` es una sucesión entrecomillada de generadores que se aplicarán a la superficie de derecha a izquierda (así como cualquier subcadena suya).

Estas ideas se pueden aplicar para construir las superficies `P` y `D` de Schwarz y la superficie de Neovius. Dejamos a continuación implementaciones de estas superficies en Surface Evolver que dan lugar a las superficies de la figura 16 después de ejecutar los comandos `gogo` y `girar`.

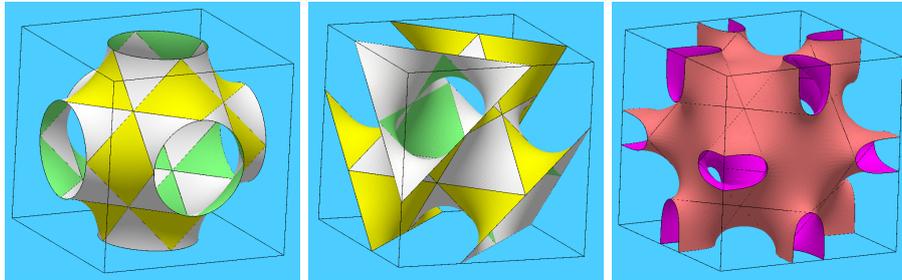


Figura 16: De izquierda a derecha: superficies generadas por los ficheros `PSchwarz.fe`, `DSchwarz.fe` y `Neovius.fe`.

```

1 view_transform_generators 2
2 // generador a: giro de 120
3 0 0 -1 1
4 1 0 0 0
5 0 -1 0 1
6 0 0 0 1
7
8 // generador b: giro de 120
9 0 -1 0 1
10 0 0 -1 1
11 1 0 0 0
12 0 0 0 1
13
14 vertices
15 1 1/3 0 1/3 fixed
16 2 2/3 1/3 1/3 fixed

```

```

17 3 2/3 0 2/3 fixed
18 4 1/3 1/3 2/3 fixed
19 21 2/3 0 2/3 fixed
20 22 1/3 0 1 fixed
21 23 2/3 1/3 1 fixed
22 24 1/3 1/3 2/3 fixed
23 6 0 0 0
24 7 0 0 1
25 8 0 1 1
26 9 0 1 0
27 10 1 0 0
28 11 1 0 1
29 12 1 1 1
30 13 1 1 0
31
32 edges
33 1 1 2 fixed
34 2 2 3 fixed
35 3 3 4 fixed
36 4 4 1 fixed
37 21 21 22 fixed
38 22 22 23 fixed
39 23 23 24 fixed
40 24 24 21 fixed
41 8 6 7 fixed bare no_refine
42 9 7 8 fixed bare no_refine
43 10 8 9 fixed bare no_refine
44 11 9 6 fixed bare no_refine
45 12 10 11 fixed bare no_refine
46 13 11 12 fixed bare no_refine
47 14 12 13 fixed bare no_refine
48 15 13 10 fixed bare no_refine
49 16 6 10 fixed bare no_refine
50 17 7 11 fixed bare no_refine
51 18 8 12 fixed bare no_refine
52 19 9 13 fixed bare no_refine
53
54 faces
55 1 1 2 3 4 frontcolor white backcolor lightgreen
56 2 21 22 23 24 frontcolor yellow backcolor white
57
58 read
59
60 gogo:={g10;r;g50;r;g50;r;g30;r;g20}
61 girar:=transform_expr "abababa"

```

Fichero fe/DSchwarz.fe

```

1 constraint 1
2 formula: y = 0
3
4 view_transform_generators 2
5 // generador a: giro de 90

```

```

6 0 0 -1 1
7 0 1 0 0
8 1 0 0 0
9 0 0 0 1
10
11 // generador b: giro de 120
12 0 -1 0 1
13 0 0 -1 1
14 1 0 0 0
15 0 0 0 1
16
17 vertices
18 1 .5 .25 1 fixed
19 2 .75 .25 .75 fixed
20 3 .5 0 .75 fixed
21 4 .25 .25 .75 fixed
22 5 .75 0 .5 fixed
23 6 0 0 0
24 7 0 0 1
25 8 0 1 1
26 9 0 1 0
27 10 1 0 0
28 11 1 0 1
29 12 1 1 1
30 13 1 1 0
31
32 edges
33 1 1 2 fixed
34 2 2 3 fixed
35 3 3 4 fixed
36 4 4 1 fixed
37 5 5 2 fixed
38 6 2 3 fixed
39 7 3 5 constraint 1
40 8 6 7 fixed bare no_refine
41 9 7 8 fixed bare no_refine
42 10 8 9 fixed bare no_refine
43 11 9 6 fixed bare no_refine
44 12 10 11 fixed bare no_refine
45 13 11 12 fixed bare no_refine
46 14 12 13 fixed bare no_refine
47 15 13 10 fixed bare no_refine
48 16 6 10 fixed bare no_refine
49 17 7 11 fixed bare no_refine
50 18 8 12 fixed bare no_refine
51 19 9 13 fixed bare no_refine
52
53 faces
54 1 1 2 3 4 frontcolor white backcolor yellow
55 2 5 6 7 frontcolor white backcolor lightgreen
56
57 read
58 gogo:={g10;r;g50;r;g50;r;g30;r;g20;r;g10}

```

```
59 girar:=transform_expr "abababababa"
```

Fichero fe/PSchwarz.fe

```
1 constraint 1
2 formula: y = 0
3
4 constraint 2
5 formula: z = 1
6
7 view_transform_generators 2
8 // generador a: giro de 90
9 0 0 -1 1
10 0 1 0 0
11 1 0 0 0
12 0 0 0 1
13
14 // generador b: giro de 120
15 0 -1 0 1
16 0 0 -1 1
17 1 0 0 0
18 0 0 0 1
19
20 vertices
21 1 .75 .25 .75 fixed
22 2 .5 0 .75 fixed
23 3 .25 .25 .75 fixed
24 4 .25 0 .5 fixed
25 5 .25 .25 .25 fixed
26 6 .5 0 .25 fixed
27 7 .75 .25 .25 fixed
28 8 .75 0 .5 fixed
29 9 .5 .25 1 fixed
30 10 .5 0 1 constraint 1 constraint 2
31 11 0 0 0 fixed
32 12 0 0 1 fixed
33 13 0 1 1 fixed
34 14 0 1 0 fixed
35 15 1 0 0 fixed
36 16 1 0 1 fixed
37 17 1 1 1 fixed
38 18 1 1 0 fixed
39
40 edges
41 1 1 2 fixed
42 2 2 3 fixed
43 3 3 4 fixed
44 4 4 5 fixed
45 5 5 6 fixed
46 6 6 7 fixed
47 7 7 8 fixed
48 8 8 1 fixed
49 31 1 2 fixed
```

```

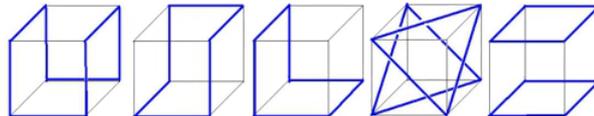
50 32 2 10 constraint 1
51 33 10 9 constraint 2
52 34 9 1 fixed
53 11 11 12 fixed bare no_refine
54 12 12 13 fixed bare no_refine
55 13 13 14 fixed bare no_refine
56 14 14 11 fixed bare no_refine
57 15 15 16 fixed bare no_refine
58 16 16 17 fixed bare no_refine
59 17 17 18 fixed bare no_refine
60 18 18 15 fixed bare no_refine
61 19 11 15 fixed bare no_refine
62 20 12 16 fixed bare no_refine
63 21 16 17 fixed bare no_refine
64 22 17 18 fixed bare no_refine
65
66
67 faces
68 1 1 2 3 4 5 6 7 8 frontcolor lightred backcolor magenta
69 2 31 32 33 34 frontcolor magenta backcolor lightred
70
71 read
72 gogo:={g10;r;g50;r;g50;r;g30;r;g10}
73 girar:=transform_expr "abababab"

```

Fichero fe/Neovius.fe

Ejercicio 11. Encontrar superficies minimales con Surface Evolver cuyas fronteras sean cada una de las cinco curvas marcadas en azul en la figura.

- Hallar isometrías de \mathbb{R}^3 que permitan continuar analíticamente cada superficie.
- ¿Cuáles de ellas no presentan autointersecciones después de ser reflejadas?
- ¿Cuáles de ellas tienen planos de simetría?



Ejercicio 12. Construir una superficie minimal con Surface Evolver que tenga dos componentes en frontera dadas por las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en los planos $z = 0$ y $z = a$. ¿Existe otra superficie minimal no conexa con esta frontera?

✎ *Comprobar que $a \in \mathbb{R}$ ha de ser suficientemente pequeño para que la superficie exista e interpretar físicamente este comportamiento.*

Ejercicio 13. Repetir el ejercicio anterior pero dejando que la frontera en el plano $z = 0$ sea libre y observar que el resultado es ortogonal a dicho plano.

✎ *¿Qué relación hay entre las superficies obtenidas en este ejercicio y el anterior?*

Referencias

- [1] F.S.L. Bobbert. Permeability and mechanical properties of triply periodic minimal surface scaffolds for bone regeneration. *Master thesis* (2016), Delft University of Technology.
- [2] K. Brakke. Manual de usuario del software *Surface Evolver*, v. 2.70. Disponible online en <http://facstaff.susqu.edu/brakke/aux/downloads/manual270.pdf>.
- [3] W. Fischer, E. Koch. Crystallographic aspects of minimal surfaces. *Journal de Physique Colloques*, **51** (1990), C7-131–C7-147.
- [4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Classics in Mathematics*, Springer-Verlag (2001). ISBN: 3540411607.
- [5] E. Giusti. Minimal surfaces and functions of bounded variation. *Monographs in Mathematics* **80**, Birkhäuser (1984). ISBN: 0817631534.
- [6] L. Han, S. Che. An Overview of Materials with Triply Periodic Minimal Surfaces and Related Geometry: From Biological Structures to Self-Assembled Systems. *Advanced Materials*, **30** (2018), no. 17, 1705708–1705729.
- [7] M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros. Proof of the double bubble conjecture. *Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, **155**: 459–489.
- [8] J.W. Kane, M.M. Sternheim. Física. Reverté. Segunda edición. Barcelona, 2007. ISBN: 978842914318-8.
- [9] J. Pérez. Superficies mínimas y de curvatura media constante. Disponible online en <http://wpd.ugr.es/~jperez/wordpress/wp-content/uploads/todo-1.pdf>.
- [10] J. Pérez. Tutoriales de Evolver. Posgrado Oficial Matemáticas. Recurso electrónico disponible online en <https://www.ugr.es/~jperez/docencia/Evolver>.
- [11] M. Weber. Minimal Surface Archive. Recurso electrónico disponible online en <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Triply/index.html>.