UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

GRUPOS CATEGÓRICOS SIMÉTRICOS: COHOMOLOGÍA Y EXTENSIONES.

JUAN MARTÍNEZ MORENO

TESIS DOCTORAL

Granada, Marzo de 2001

Memoria realizada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección de la Profa. Dra. Doña *María Pilar Carrasco Carrasco*, para la obtención del grado de doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Aspirante a doctor: Juan Martínez Moreno.

A mis padres.

Agradecimientos

La presente memoria es fruto de un trabajo de investigación bajo la dirección de Pilar Carrasco Carrasco, a quien manifiesto mi agradecimiento por compartir conmigo su conocimiento e ideas, por su dedicación continuada y por la confianza que en mí depositó.

También quisiera dar las gracias al Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada y, más concretamente, al grupo de investigación dirigido por el profesor Antonio Martínez Cegarra, por poner siempre a mi disposición cuanto material técnico y científico necesité, permitiéndome hacer uso de sus instalaciones.

De igual forma, expreso mi gratitud al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, donde he venido desarrollando mi docencia, a sus miembros y, en especial, al profesor Antonio Jesús López Moreno, por su amistad y apoyo.

Por último, doy las gracias a mi familia, a mis amigos y a mi novia, por soportarme y por estar siempre ahí.

Índice

Introducción

Un grupo categórico es una categoría monoidal donde todo morfismo es isomorfismo y todo objeto tiene un inverso respecto al producto tensor. Recientemente el estudio de grupos categóricos ha recobrado interés, como muestran los trabajos de Breen [2], Carrasco-Cegarra [9] y [10], y Rousseau [47], que abordan, entre otros, el problema de clasificación de extensiones de grupos categóricos (véase también el trabajo de Ulbrich [56]); de Cegarra-Garzón [14], sobre clasificación homotópica de torsores categóricos; de Joyal-Street [34], que estudian la clasificación de grupos categóricos trenzados y los de Kasagian-Vitale [36] y Vitale [59], que desarrollan aspectos más estructurales de la categoría de grupos categóricos (como las nociones de núcleo, conúcleo o factorización de homomorfismos). Todos ellos muestran, junto con otros más "clásicos" [50], [51] y [40], que grupos categóricos constituyen objetos algebraicos de interés en sí mismos.

Por otro lado, es bien conocido que grupos categóricos (trenzados o simétricos) son modelos algebraicos de CW-complejos conexos con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de 1 y 2 (2 y 3 en el caso trenzado ó n y $n+1$, $n \geq 3$, en el simétrico). De esta manera, grupos categóricos son también importantes en topología algebraica. Nótese que grupos categóricos estrictos (trenzados o simétricos), i.e., grupos categóricos donde los isomorfismos canónicos de asociatividad y unidad a izquierda y derecha son identidades, son lo mismo que módulos cruzados (reducidos o estables), cuyo interés en teoría de homotopía se remonta a Whitehead [60] y MacLane-Whitehead [44].

En esta memoria definimos y estudiamos una teoría de cohomología, $H^n(X_\bullet, \mathbb{A})$, para conjuntos simpliciales con coeficientes en grupos categóricos simétricos, haciendo uso de la cohomología de Takeuchi-Ulbrich para complejos cosimpliciales de grupos categóricos simétricos, [51], [52]. Esta teoría de cohomología generaliza la cohomología simplicial usual con coeficientes en grupos abelianos, cuando éstos son vistos como grupos categóricos discretos y, en definitiva, la cohomología singular de CW-complejos. Estamos interesados en estudiar el significado topológico de esta cohomología, esto es, en estudiar sus aplicaciones en teoría de homotopía en la misma línea de lo que ocurre en la cohomología singular usual.

Por otra parte, grupos categóricos (simétricos) junto con funtores monoidales y transformaciones monoidales constituyen una 2-categoría, que puede verse como el análogo dos dimensional de la categoría de grupos (abelianos). Uno de nuestros objetivos al iniciar este trabajo era abordar el concepto dos dimensional equivalente a la noción de 2-extensión especial de un grupo G por un grupo abeliano A, [31], [61]. Esto es, para $\mathbb{G}$ un grupo categórico y $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico, definir lo que se entiende por una 2-extensión especial de $\mathbb{G}$ por $\mathbb{A}$ y realizar su clasificación homotópica y cohomológica haciendo uso de los resultados obtenidos para la cohomología simplicial estudiada en la memoria. Aunque este objetivo no llegamos a cubrirlo totalmente, como comentaremos más adelante, lo conseguiremos cuando $\mathbb{G}$ es un grupo categórico discreto definido por un grupo G y se tiene definida sobre $\mathbb{A}$ una G-acción. Ésta, sin embargo, creemos que es una primera etapa importante para su consecución en el caso general.

La memoria está dividida en tres capítulos. Comenzamos en el Capítulo primero estableciendo los conceptos y terminología básica sobre grupos categóricos, que utilizaremos a lo largo del trabajo. De entre los diferentes ejemplos de grupos categóricos, nos ocupamos, en el apartado 1.2, de estudiar con detalle los llamados *grupoides de homotopía superiores*, $\wp_n(X_\bullet, *)$, $n \geq 0$, de un complejo de Kan punteado. Estos son definidos por Carrasco-Cegarra en [9], de forma análoga a la definición de Moore [46] de los grupos de homotopía. Así, para $n = 0$, $\wp_0(X_\bullet, *) = \wp(X_\bullet, *)$ es el grupoide fundamental de $X_\bullet$, (también llamado grupoide de Poincaré de $X_\bullet$), y, para $n \geq 1$, $\wp_n(X_\bullet, *) = \wp(\Omega^n(X_\bullet, *))$, el grupoide fundamental del n-ésimo complejo de lazos de $(X_\bullet, *)$, [16]. La estructura monoidal de $\wp_n(X_\bullet, *)$, para $n \geq 1$, que describimos en 1.2.2, se define de forma combinatoria, usando únicamente la estructura simplicial del complejo, al igual que Kan hace para definir sus grupos de homotopía [35]. En [9] se demuestra también que, para $n \geq 2$, $\wp_n(X_\bullet, *)$ es además un grupo categórico trenzado. Sin embargo, la condición de simetría no se aborda en dicho trabajo y, aunque ésta puede demostrarse usando las mismas técnicas empleadas allí, nosotros damos una demostración alternativa. Para ello, nos apoyamos en el hecho de que si $G_\bullet$ es un grupo simplicial y lo punteamos por el elemento neutro $e \in G_0$, entonces $\wp_n(G_\bullet, e)$ es un grupo categórico simétrico, para todo $n \geq 2$, (en este caso estricto), como se demuestra en [15] en términos de módulos cruzados estables o en [6] en términos de grupos categóricos estrictos. Resulta entonces que, para $(X_\bullet, *)$ un complejo de Kan punteado y $n \geq 2$, existe una equivalencia de grupos categóricos trenzados $\wp_n(X_\bullet, *) \to \wp_{n-1}G(X_\bullet, *)$, donde $G(X_\bullet, *)$ es el grupo simplicial de lazos del subcomplejo fibra de $X_\bullet$ en el vértice $*$, [45]; concluyendo de esta forma la condición de simetría para $\wp_n(X_\bullet, *)$, para $n \geq 3$. En particular, tenemos que $\wp_n(X_\bullet, *)$ es equivalente al grupo categórico estricto y simétrico $\mathcal{C}_n(X_\bullet, *)$ definido en [6]. Frente a estos últimos, los grupoides de homotopía superiores, presentan ventajas claras a la hora, por ejemplo, de efectuar cálculos (en complejos simpliciales finitos el grupoide fundamental también lo sería), así como una interpretación geométrica más comprensible, dado que los elementos en $\wp_n(X_\bullet, *)$ siguen siendo los símplices, y no elementos del grupo libre sobre ellos. Finalmente, también nos ocupamos de relacionar $\wp_n(X_\bullet, *)$ con los invariantes de Postnikov.

Puesto que la cohomología de Takeuchi-Ulbrich [51] es la base para definir nuestra cohomología, dedicamos el apartado 1.3. del Capítulo primero a recordar cómo está definida y a estudiar algunas propiedades que nos serán fundamentales. Esta cohomología se define para complejos de cocadenas y complejos cosimpliciales de grupos categóricos simétricos. Puede así considerarse, en la línea que comentábamos al principio, como el análogo dos dimensional de la cohomología de complejos (de cocadenas o cosimpliciales) de grupos abelianos, pudiéndose ver, esta última, como un caso particular, cuando grupos abelianos son vistos como grupos categóricos discretos. De hecho, goza de propiedades análogas. Así, por ejemplo, para el caso de complejos de cocadenas, $\{H^n(-)\}_{n\geq 0}$ son funtores, desde la categoría de complejos de cocadenas de grupos categóricos simétricos en la categoría de grupos abelianos, verificando la siguiente propiedad de "aditividad" sobre homomorfismos: $H^n((F,\theta)+(G,\theta)) = H^n(F,\theta)+H^n(G,\theta)$.

Por otro lado, apoyándonos en la noción de sucesión exacta corta de grupos categóricos dada en [10], (esto es, una sucesión $\mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{B} \xrightarrow{q} \mathbb{C}$, tal que q es una fibración de grupoides esencialmente sobreyectiva, $q \cdot j$ es el morfismo nulo y j establece una equivalencia entre $\mathbb{A}$ y la fibra de q en el objeto cero), definimos la noción de sucesión exacta corta de complejos de cocadenas y demostramos (Teorema 1.3.4) la existencia de una sucesión exacta larga en cohomología asociada a una sucesión exacta corta de complejos. Otro concepto fundamental es el de homomorfismos homotópicos: Dos homomorfismos de complejos $(F,\theta),(G,\theta) : \mathcal{A} = (\mathbb{A}_n,\partial_n) \to \mathcal{B} = (\mathbb{B}_n,\partial_n)$ son homotópicos si existe una familia de homomorfismos $R = (R_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathbb{B}_n)_{n\geq 0}$ (la *homotopía*) y una familia de transformaciones monoidales $\nu = (\nu_n : F_n \to G_n + R_n\partial + \partial R_{n-1})_{n\geq 1}$, verificando la correspondiente condición de coherencia (Definición 1.3.6). Como cabía esperar, homomorfismos homotópicos inducen el mismo homomorfismo en cohomología (Teorema 1.3.7). Se verifica además que homomorfismos homotópicos son estables bajo composición.

Si consideramos ahora un complejo cosimplicial $\mathbb{A}_\bullet = (\mathbb{A}_n, \varepsilon_i, \delta_j)$ de grupos categóricos simétricos, su cohomología se define como la del complejo de cocadenas $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet) = (\mathbb{A}_n,\partial_n)$, donde $\partial_n : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_{n+1}$ viene dado por la fórmula usual del operador coborde, i.e., $\partial_n = \sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^i\varepsilon_i$. Estos complejos son un caso particular de los complejos semi-cosimpliciales considerados por Takeuchi-Ulbrich, pues, entre otros cosas, ellos no consideran como dato inicial los morfismos $\delta_j : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathbb{A}_n$. Nosotros estamos interesados fundamentalmente en buscar condiciones sobre $\mathbb{A}_\bullet$ de forma que podamos trabajar con cociclos normalizados, esto es, cociclos cuya imagen por los funtores δ_j se anula. Estas condiciones, que llamamos *condiciones de normalización* sobre $\mathbb{A}_\bullet$ (Definición 1.3.9), nos permiten construir un complejo de cocadenas $\mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)$, el complejo normalizado de $\mathbb{A}_\bullet$, definido, en el caso particular en que los homomorfismos δ_j son estrictos, como $\mathcal{N}_0(\mathbb{A}_\bullet) = \mathbb{A}_0$ y, para $n \geq 0$, $\mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet) = S_n^{-1}(0,...,0)$, la fibra del homomorfismo canónico $S_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$, siendo $\Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$ el n-ésimo núcleo cosimplicial de $\mathbb{A}_\bullet$.

Existe un homomorfismo de complejos de cocadenas $(j, \theta) : \mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$, inducido por la inclusión $\mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathbb{A}_n$, $n \geq 0$, que resulta ser (Teorema 1.3.13 de normalización) una equivalencia homotópica y, consecuentemente, tienen grupos de cohomología isomorfos. El grupoide de n-cociclos de $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ es equivalente al grupoide de n-cociclos de $\mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)$, que no es otro que el de n-cociclos normalizados.

Los resultados obtenidos para la cohomología de Takeuchi-Ulbrich son aplicados en el Capítulo segundo, dedicado a introducir y estudiar los grupos abelianos de cohomología $H^n(X_\bullet, \mathbb{A})$, $n \geq 0$, de un conjunto simplicial $X_\bullet$ con coeficientes en un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$. Estos son definidos (Definición 2.1.1) como los grupos de cohomología del complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos $\mathbb{A}^{X_\bullet}$, obtenido al considerar, en cada dimensión, el grupo categórico simétrico $\mathbb{A}^{X_n}$ de funtores de X_n, visto como categoría discreta, en $\mathbb{A}$. Observamos que el complejo $\mathbb{A}^{X_\bullet}$ verifica la condición de normalización (Proposición 2.1.2), con lo que, por el Teorema de normalización, podemos reducirnos al uso de cociclos y cobordes normalizados. Estos grupos de cohomología presentan un buen comportamiento respecto a aplicaciones simpliciales homotópicas, así como respecto a homomorfismos de grupos categóricos simétricos homotópicos; en otras palabras, constituyen invariantes homotópicos, al igual que ocurre con la cohomología simplicial usual. La relación de esta última con nuestra cohomología la establecemos por medio de una sucesión exacta larga

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n+1}(X_\bullet, \pi_1(\mathbb{A})) \arrow[r] & H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \arrow[r] & H^n(X_\bullet, \pi_0(\mathbb{A})) \arrow[dll] \\
& H^{n+2}(X_\bullet, \pi_1(\mathbb{A})) \arrow[r] & H^{n+1}(X_\bullet, \mathbb{A}) \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

siendo $\pi_0(\mathbb{A})$ el grupo abeliano de componentes conexas de $\mathbb{A}$ y $\pi_1(\mathbb{A}) = Aut_{\mathbb{A}}(0)$ el grupo abeliano de automorfismos en $\mathbb{A}$ del objeto cero.

En particular, si $X_\bullet = S(X)$ es el complejo singular asociado a un espacio topológico X y $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows A)$ es el grupo categórico discreto definido por el grupo abeliano A, obtenemos isomorfismos $H^n(S(X), \mathbb{A}) \cong H^n(X, A)$, $n \geq 0$, entre los grupos de cohomología del complejo $S(X)$ con coeficientes en $A \rightrightarrows A$ y los grupos de cohomología singular del espacio X.

Otros ejemplos de teorías de cohomología relacionadas con la definida por nosotros se abordan en el apartado 2.2: Así, nos ocupamos de ver la relación de nuestra cohomología con la cohomología de Ulbrich [56], (o en otros términos, con la cohomología de Frölich-Wall [25]), con la cohomología usual de grupos de Eilenberg-MacLane y con la cohomología con coeficientes en grupos categóricos estrictos y simétricos definida en [6].

En dimensiones bajas, observamos que $H^1(X_\bullet, \mathbb{A})$ coincide con el conjunto de 2-cohomología $H^2(X_\bullet, \mathbb{A})$ definido en [12], cuando los coeficientes son simétricos. En particular, si $X_\bullet = Ner(\underline{\mathcal{B}})$ es el complejo nervio de una categoría pequeña $\underline{\mathcal{B}}$, resulta que el grupo $H^1(Ner(\underline{\mathcal{B}}), \mathbb{A})$ es biyectivo al conjunto de 2-cohomología $\mathbb{H}^2(\underline{\mathcal{B}}, \mathbb{A})$ definido en [14] y entonces, por el Teorema 3.3 de dicho trabajo, clasifica clases de equivalencia de $\underline{\mathcal{B}}$-torsores sobre $\mathbb{A}$.

Finalmente, para $n = 2$, $H^2(X_\bullet, \mathbb{A})$ está también relacionado con la cohomología de Breen [2], cuando $X_\bullet = K(G, 1)$, el complejo de Eilenberg-MacLane definido por un grupo G; y con la cohomología de Carrasco-Cegarra [10], cuando $X_\bullet = Ner_2(\mathbb{G})$, el complejo clasificador de un grupo categórico $\mathbb{G}$ (no necesariamente simétrico). Como corolario resulta entonces que $H^2(K(G, 1), \mathbb{A})$ clasifica extensiones centrales de G por $\mathbb{A}$, [56], mientras que $H^2(Ner_2(\mathbb{G}), \mathbb{A})$ clasifica extensiones centrales de $\mathbb{G}$ por $\mathbb{A}$, [10, Definición 3.1].

Nos ocupamos, en el apartado siguiente, de generalizar la noción de los complejos de Eilenberg-MacLane $K(A, n)$, de un grupo abeliano A, introduciendo lo que denominamos *n-nervio* de un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, $K(\mathbb{A}, n)$, para cada $n \geq 0$. Este es definido, en completa analogía con la definición de los complejos $K(A, n)$, [21], como el conjunto simplicial que tiene como q-símplices los n-cociclos normalizados del q-símplex estándar $\Delta[q]$ con coeficientes en el grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, i.e., $K(\mathbb{A}, n)_q = Obj(Z^n_N(\Delta[q], \mathbb{A}))$. Este complejo particulariza en $K(A, n)$, cuando $\mathbb{A}$ es el grupo categórico discreto definido por el grupo abeliano A, o en $K(A, n+1)$, cuando $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows \mathbf{1})$, el grupo categórico con un sólo objeto. $K(\mathbb{A}, n)$ resulta ser un complejo de Kan $(n-1)$-reducido con las propiedades homotópicas adecuadas para ser el complejo clasificador del grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$: Sus grupos de homotopía son nulos en dimensiones distintas de n y $n+1$, mientras que $\pi_n(K(\mathbb{A}, n)) = \pi_0(\mathbb{A})$ y $\pi_{n+1}(K(\mathbb{A}, n)) = \pi_1(\mathbb{A})$.

La sucesión de complejos $\{K(\mathbb{A}, n)\}_{n \geq 0}$ constituye un Ω-spectrum, (i.e.,

$K(\mathbb{A},n) \cong \Omega(K(\mathbb{A},n+1)))$ y el resultado principal de este apartado es que la teoría de cohomología asociada a este Ω-spectrum es precisamente la definida en la memoria, es decir, existen isomorfismos naturales

$$[X_\bullet, K(\mathbb{A},n)] \cong H^n(X_\bullet, \mathbb{A}), \qquad n \geq 0,$$

entre el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $X_\bullet$ en $K(\mathbb{A},n)$ y el n-ésimo grupo de cohomología de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ (Teorema 2.3.10). Este resultado generaliza el teorema de representatividad homotópica para la cohomología simplicial usual [45] y, en particular, el correspondiente para la cohomología de grupos. Por otro lado, en el caso estricto, i.e., $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\delta)$, el grupo categórico simétrico asociado a un módulo cruzado estable δ, este teorema de representación es justamente el obtenido en [6].

En dimensiones bajas observamos que $K(\mathbb{A},0) \cong Ner(\mathbb{A})$, el nervio de la categoría $\mathbb{A}$; mientras que $K(\mathbb{A},1) \cong Ner_2(\mathbb{A})$ y $K(\mathbb{A},2) \cong Ner_3(\mathbb{A})$, donde $Ner_2(-)$ y $Ner_3(-)$ son los funtores nervio definidos en [9]. Es bien conocido que el funtor nervio junto con el funtor grupoide fundamental determinan una situación de adjunción, **Grupoides**$\underset{Ner}{\overset{\wp}{\leftrightarrows}}$**Complejos de Kan**, [49], que induce una equivalencia entre la categoría de homotopía de grupoides y la categoría de homotopía de complejos de Kan con grupos de homotopía nulos en dimensiones $\geq$ 2. En [9] se obtienen análogas adjunciones para los funtores $Ner_2(-)$ y $Ner_3(-)$, antes mencionados, haciendo uso de los grupoides de homotopía superiores en dimension uno y dos, respectivamente. Concretamente, se tienen adjunciones **Grupos Cat.**$\underset{Ner_2}{\overset{\wp_1}{\leftrightarrows}}$**Complejos de Kan Reducidos** y **Grupos Cat. Tren.** $\underset{Ner_3}{\overset{\wp_2}{\leftrightarrows}}$**Complejos de Kan 1-Reducidos**, que inducen una equivalencia entre la categoría de homotopía de grupos categóricos, (respectivamente trenzados) y la categoría de homotopía de aquellos complejos de Kan conexos con grupos de homotopía nulos en dimensiones $\geq$ 3, (respectivamente, 1-conexos con grupos de homotopía nulos en dimensión $\geq$ 4.)

El resultado fundamental del apartado 2.4, es la extensión de las adjunciones anteriores a todas las dimensiones. Así, probamos la existencia de una situación de adjunción (Teorema 2.4.3)

$$\textbf{Grupos Cat. Simetr.} \underset{K(-,n)}{\overset{\wp_n}{\rightleftarrows}} \textbf{Complejos de Kan (n-1)-reducidos},$$

para cada $n \geq 3$, donde los morfismos de la counidad son isomorfismos, mientras que los morfismos de la unidad son $(n+1)$-equivalencias homotópicas. Como consecuencia, encontramos una forma nueva de probar que grupos categóricos simétricos son modelos algebraicos para tipos de homotopía de CW-complejos conexos con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de n y $n+1$. El grupoide de homotopía superior $\wp_n(X_\bullet, *)$ se confirma, pues, como el modelo algebraico de $X_\bullet$ y el n-nervio $K(\mathbb{A}, n)$ como el complejo clasificador de $\mathbb{A}$. Los funtores $\wp_n(-)$ y $K(-, n)$ proporcionan, así, un medio explícito y accesible de transición del tipo de homotopía al grupo categórico simétrico asociado, y viceversa.

Los resultados anteriores, junto con el Teorema de representatividad homotópica de la cohomología definida aquí, nos permiten probar el Teorema 2.4.5 de clasificación cohomológica del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales. En él se establece una biyección natural

$$[(X_\bullet, *), (Y_\bullet, *)] \cong H^n(X_\bullet, \wp_n(Y_\bullet, *)),$$

para $X_\bullet$ un complejo de Kan no necesariamente conexo e $Y_\bullet$ un complejo de Kan con $\pi_i(Y_\bullet) = 0$, para todo $i \neq n, n+1$, $n \geq 3$. Este teorema generaliza el clásico teorema de clasificación de Eilenberg-MacLane, para la cohomología singular con coeficientes en grupos abelianos. Si además, $X_\bullet$ tiene también grupos de homotopía triviales en dimensiones distintas de n y $n+1$, probamos entonces que

$$[(X_\bullet, *), (Y_\bullet, *)] \cong [\wp_n(X_\bullet, *), \wp_n(Y_\bullet, *)],$$

donde $[\wp_n(X_\bullet, *), \wp_n(Y_\bullet, *)]$ denota el conjunto de clases de isomorfía de homomorfismos de grupos categóricos simétricos de $\wp_n(X_\bullet, *)$ en $\wp_n(Y_\bullet, *)$. Este isomorfismo constituye una extensión natural del conocido isomorfismo $[K(A, n), K(B, n)] \cong Hom(A, B)$, para complejos de Eilenberg-MacLane.

A partir de la teoría de cohomología simplicial estudiada en el Capítulo segundo, es posible definir una teoría de cohomología inmersa en la categoría de grupos categóricos. A saber, dados $\mathbb{G}$ un grupo categórico y $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico, puede definirse el n-ésimo grupo de cohomología de $\mathbb{G}$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ por

$$\mathbb{H}^n(\mathbb{G},\mathbb{A}) = H^n(Ner_2(\mathbb{G}),\mathbb{A}), \qquad n \geq 0.$$

Los resultados vistos para la cohomología simplicial tienen su correspondiente traducción para estos grupos de cohomología. En particular, el Teorema de clasificación expresa, en este caso, la existencia de una biyección $[(X_\bullet,*),(Y_\bullet,*)] \cong \mathbb{H}^n(\wp_1(X_\bullet,*),\wp_n(Y_\bullet,*))$, cuando $X_\bullet$ e $Y_\bullet$ son complejos de Kan punteados con $\pi_i(X_\bullet)=0$, para $i \neq 1,2$ y $\pi_j(Y_\bullet)=0$, para $j \neq n, n+1$, $n \geq 3$.

En dimensiones bajas se verifica que $\mathbb{H}^0(\mathbb{G},\mathbb{A}) \cong [\pi_0(\mathbb{G}) \rightrightarrows \mathbf{1},\mathbb{A}]$, el conjunto de clases de isomorfía de funtores de $\pi_0(\mathbb{G}) \rightrightarrows \mathbf{1}$ en $\mathbb{A}$; $\mathbb{H}^1(\mathbb{G},\mathbb{A}) \cong [\mathbb{G},\mathbb{A}]$, el grupo de componentes conexas del grupo categórico simétrico $\underline{Hom}(\mathbb{G},\mathbb{A})$, y, según se observa en 2.2.3, $\mathbb{H}^2(\mathbb{G},\mathbb{A}) \cong Ext_{Cen}[\mathbb{G},\mathbb{A}]$, el conjunto de clases de isomorfía de extensiones centrales de $\mathbb{G}$ por $\mathbb{A}$, como ya apuntábamos anteriormente. En dimensión tres, teniendo en mente de nuevo la cohomología de grupos donde el grupo $H^3(G,A)$ está en biyección con el conjunto de clases de equivalencia de 2-extensiones especiales de G por el G-módulo A, [31], [32], [61], cabe esperar que $\mathbb{H}^3(\mathbb{G},\mathbb{A})$ clasifique las correspondientes 2-extensiones especiales de $\mathbb{G}$ por $\mathbb{A}$. Como comentábamos al inicio de la introducción, nosotros damos una solución parcial a este problema y alcanzamos este objetivo cuando $\mathbb{G}$ un grupo categórico discreto asociado a un grupo G y se tenga definida una G-acción coherente. A tal fin dedicamos el Capítulo tercero de la memoria.

Si atendemos a la definición de 2-extensión especial en grupos, un primer paso para encontrar su equivalente dos dimensional será definir el correspondiente dos dimensional de módulo cruzado. Para ello comenzamos recordando la noción de G-grupo categórico y estudiamos algunos ejemplos ilustrativos de dicho concepto. En particular, describimos la relación que existe entre la noción de G-grupo categórico y la de categoría monoidal G-graduada de Frölich-Wall. Definimos, entonces, un *G-módulo cruzado categórico* como una terna $(\mathbb{H},d,\gamma)$, donde G actúa sobre $\mathbb{H}$, (i.e., $\mathbb{H}$ es un G-grupo categórico), $d:\mathbb{H}\to(G\rightrightarrows G)$ es un homomorfismo de grupos categóricos G-equivariante y $\gamma : {}^{d(X)}Y + X \to X + Y$ es una familia coherente de isomorfismos naturales en $\mathbb{H}$, (esta definición está inspirada en una noción mas general de módulo cruzado de grupos categóricos debida a Breen [2]). La noción usual de módulo cruzado de grupos se recoge como un caso particular cuando $\mathbb{H} = (H \rightrightarrows H)$ es el grupo categórico discreto definido por un G-grupo H. Otro concepto particularmente interesante es el de 2-módulo cruzado de Conduché, [15]; éstos se obtienen como aquellos G-módulos cruzados categóricos $d : \mathbb{H} \to (G \rightrightarrows G)$ tales que $\mathbb{H}$ es un grupo categórico estricto y la acción de G sobre él es también estricta.

A continuación abordamos ya el concepto de *2-extensión especial de un grupo catégorico discreto* $G \rightrightarrows G$ *por grupo categórico simétrico* $\mathbb{A}$. Este concepto lo establecemos en el caso, más general, en que se tenga definida en $\mathbb{A}$ una G-acción, y consiste en una sucesión de homomorfismos de grupos categóricos $\mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} (K \rightrightarrows K) \xrightarrow{q} (G \rightrightarrows G)$, donde K es un grupo y q es un epimorfismo de grupos, d es un módulo cruzado categórico y j es un homomorfismo K-equivariante, (considerando la acción de K sobre $\mathbb{A}$ vía q), que establece una equivalencia entre $\mathbb{A}$ y la subcategoría de $\mathbb{H}$ fibra de d sobre el elemento neutro de K. En analogía a lo anteriormente comentado sobre módulos cruzados, cuando $\mathbb{A}$ es el grupo categórico discreto definido por un G-módulo A, entonces nuestras 2-extensiones especiales coinciden con las 2-extensiones especiales de grupos de G por el G-módulo A. De forma similar, el concepto de 3-extensión no abeliana de un grupo G por un G-módulo A debido a Conduché [15], se obtiene como caso particular del nuestro cuando $\mathbb{A}$ es el grupo categórico con un sólo objeto definido por el G-módulo A y $\mathbb{H}$ es un K-grupo categórico estricto.

La clasificación cohomológica de estas 2-extensiones especiales se consigue extendiendo el análisis de Schreier de extensiones de grupos, en la misma línea que en los trabajos de Breen [2], Ulbrich [56], o Carrasco-Cegarra [10]. Puesto que $\mathbb{A}$ está enriquecido con una G-acción, el "conjunto factor", que nosotros llamamos "sistema de Schreier", de una 2 extensión especial resulta ser un elemento del cuarto grupo de cohomología de Ulbrich (Frölich-Wall) de G con coeficientes en $\mathbb{A}$. Concluimos entonces con la existencia de una biyección entre el conjunto $2 - Ext[G, \mathbb{A}]$, de clases (módulo una relación tipo Yoneda) de 2-extensiones especiales de G por $\mathbb{A}$, y $H^4_{Ulb}(G, \mathbb{A})$. Esta biyección constituye una extensión natural a dimensión 4 de la obtenida por Ulbrich, en el trabajo antes citado, para $H^3_{Ulb}(G,\mathbb{A})$ en términos de extensiones centrales de G por $\mathbb{A}$. Además generaliza, por un lado, la interpretación del tercer grupo de cohomología de Eilenberg-MacLane en términos de 2-extensiones especiales de grupos, y, por otro, la interpretación de Conduché del cuarto grupo de cohomología de Eilenberg-MacLane en términos de sus 3-extensiones no abelianas.

Cuando la G-acción sobre el grupo categórico de coeficientes $\mathbb{A}$ es trivial, la cohomología de Ulbrich coincide con la cohomología simplicial, definida en el Capítulo segundo, del complejo $K(G,1)$: Concretamente, $H^4_{Ulb}(G,\mathbb{A}) \cong H^3(K(G,1),\mathbb{A})$. Combinando este hecho con el teorema de representatividad homotópica para nuestra cohomología, probamos la existencia de una biyección $2{-}Ext[G,\mathbb{A}] \cong [K(G,1), K(\mathbb{A},3)]$, que establece la clasificación homotópica de 2-extensiones especiales de un grupo G por un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$.

Finalmente, obtenemos una interpretación, en términos de nuestras 2-extensiones, del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas desde un espacio asférico en un espacio con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de 2 y 3. Esto es, en lenguaje simplicial, se tiene una biyección

$$[(X_\bullet,*),(Y_\bullet,*)] \cong 2-Ext[\pi_1(X_\bullet,*),\wp_3(Y_\bullet,*)]$$

para $(X_\bullet,*),(Y_\bullet,*)$ complejos de Kan punteados con $\pi_i(X_\bullet,*)=0$ para todo $i\neq 1$, y $\pi_j(Y_\bullet,*)=0$ para todo $j\neq 2,3$. De esta forma, extendemos la interpretación bien conocida del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas entre espacios de Eilenberg-MacLane, por la que si $\pi_i(X_\bullet,*)=0=\pi_j(Y_\bullet,*)$, para todo $i\neq 1$ y $j\neq 3$, entonces $[X_\bullet,Y_\bullet]\cong 2-Ext[\pi_1(X_\bullet,*),\pi_3(Y_\bullet,*)]$, que se obtiene como caso particular de la biyección anterior.

Capítulo 1

Preliminares y algunos resultados sobre la cohomología de Takeuchi-Ulbrich.

Este capítulo está centrado en dar las nociones y los resultados preliminares con las que se trabajará a lo largo de la memoria. En primer lugar hacemos una breve introducción a grupos categóricos y damos diferentes ejemplos representativos de este concepto. De entre estos ejemplos, estudiamos detalladamente la estructura monoidal de los grupoides de homotopía superiores $\wp_n(X_\bullet, *)$ de un complejo de Kan punteado $(X_\bullet, *)$, definidos por Carrasco-Cegarra [9], y, en particular, nos ocupamos de la condición de simetría, para $n \geq 3$. También recordamos la cohomología de Takeuchi-Ulbrich [51] de complejos (de cocadenas y cosimpliciales) de grupos categóricos simétricos y estudiamos algunas propiedades nuevas, que nos serán fundamentales. De particular interés es el Teorema de normalización, que nos permitirá hacer uso de cociclos y cobordes normalizados.

1.1 Grupos Categóricos.

En esta sección recordamos las definiciones y terminología básica sobre grupos categóricos. Como referencias principales destacamos [34], [37],[42],[48], [50] y [24].

Una *categoría monoidal* $\mathbb{G} = (\mathbb{G}, \otimes, a, I, l, r)$ consiste de una categoría $\mathbb{G}$, un funtor $\otimes : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, llamado *producto tensor*, un objeto I de $\mathbb{G}$, llamado el *objeto unidad*, e isomorfismos naturales

$$a = a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$
$$l = l_X : I \otimes X \to X \qquad r = r_X : X \otimes I \to X,$$

llamados de *asociatividad*, *unidad a izquierda* y *unidad a derecha*, respectivamente, tales que, para cualesquiera objetos $X, Y, Z, T \in Obj(\mathbb{G})$, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes T \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a\otimes 1"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes T) \arrow[r, "a"] & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes T)) \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes T \arrow[rr, "a"] & & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes T) \arrow[u, "1\otimes a"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes I) \otimes Y \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "r\otimes 1"'] & & X \otimes (I \otimes Y) \arrow[dl, "1\otimes l"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Estos dos diagramas son usualmente conocidos como el *axioma del pentágono* y el *axioma del triángulo* y, como es sabido [37, 42], aseguran la *coherencia* de los isomorfismos de asociatividad y unidad a izquierda y derecha. Es decir, cualquier morfismo en $\mathbb{G}$ generado por las "operaciones" $\otimes$, $\circ$, $(\ )^{-1}$, a partir de las componentes de a, l, r está unívocamente determinado. Llamaremos a tales morfismos *canónicos* (otra forma de expresar la coherencia puede verse en [48]).

$\mathbb{G}$ se dice *categoría monoidal trenzada* si se tienen isomorfismos naturales,

$$c = c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

llamados de *conmutatividad*, tal que los dos diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & (Y\otimes X)\otimes Z \arrow[dr, "a"] & \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[ur, "c\otimes 1"] \arrow[d, "a"'] & & Y\otimes(X\otimes Z) \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "c"'] & & Y\otimes(Z\otimes X) \arrow[u, "1\otimes c"'] \\
 & (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[ur, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X\otimes(Z\otimes Y) & \\
X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[ur, "1\otimes c"] & & (X\otimes Z)\otimes Y \arrow[ul, "a"'] \arrow[d, "c\otimes 1"] \\
(X\otimes Y)\otimes Z \arrow[u, "a"] \arrow[dr, "c"'] & & (Z\otimes X)\otimes Y \arrow[dl, "a"] \\
 & Z\otimes(X\otimes Y) &
\end{tikzcd}$$

para cualesquiera tres objetos X, Y, Z de $\mathbb{G}$.

Finalmente, $\mathbb{G}$ se dice una *categoría monoidal simétrica* si es trenzada y la condición

$$c_{Y,X} \circ c_{X,Y} = 1_{X\otimes Y}$$

se tiene para cualesquiera objetos X, Y de $\mathbb{G}$. En este caso, c es también llamado una *simetría*. Como anteriormente, se tienen análogos teoremas de coherencia [34, 42], incluyendo a c como nueva componente.

En una categoría monoidal $\mathbb{G}$ un objeto X se dice *2-regular* si los funtores de traslación $Y \mapsto X\otimes Y$ e $Y \mapsto Y \otimes X$ son equivalencias.

Definición 1.1.1. *Un grupo categórico (trenzado, simétrico) es una categoría monoidal $\mathbb{G}$ (trenzada, simétrica) en la que todo objeto es 2-regular y cuya categoría subyacente es un grupoide, es decir, todo morfismo es un isomorfismo.*

La hipótesis de 2-regularidad sobre los objetos de $\mathbb{G}$ es equivalente a la existencia de un funtor $(-)^* : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, $X \mapsto X^*$, así como de isomorfismos naturales

$$m = m_X : X \otimes X^* \to I, \qquad n = n_X : X^* \otimes X \to I$$

de forma que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes X^*) \otimes X \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "m_X \otimes 1"'] & & X \otimes (X^* \otimes X) \arrow[d, "1 \otimes n_X"] \\
I \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X & X \otimes I \arrow[l, "r_X"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo objeto X de $\mathbb{G}$.

La conmutatividad del diagrama anterior es uno de los axiomas que impone Ulbrich [53] para demostrar la coherencia de los isomorfismos m_X y n_X. Sin embargo, se observa sin dificultad (véase [40]) que no es necesario imponer axioma alguno de coherencia sobre m ó n, ni incluso la funtorialidad de $(-)^*$. Esto es, *si* $\mathbb{G}$ *es un grupoide monoidal entonces,* $\mathbb{G}$ *es un grupo categórico si, y solamente si, para cada objeto* X *existe un objeto* X^* *y un morfismo* $m_X : X \otimes X^* \to I$*.*

Sin embargo (y fundamentalmente para el caso de grupos categóricos simétricos), supondremos elegido un funtor $(-)^*$ e isomorfismos naturales m, n, como anteriormente. A la terna (X^*, m_X, n_X), o simplemente X^*, le llamaremos un *inverso* para X. Supondremos también que para $X = I$, $(I^*, m_I, n_I) = (I, r_I, l_I)$.

Una demostración, más legible que la dada en [53], del correspondiente teorema de coherencia para grupos categóricos, es la dada por Laplaza en [40]. Este viene a expresar que cualesquiera dos morfismos canónicos en $\mathbb{G}$, con el mismo dominio y codominio coinciden. En este caso, un morfismo canónico en $\mathbb{G}$ es el generado por $\otimes$, $\circ$, $(-)^{-1}$ y $(\ )^*$ a partir de a, l, r, m y n. El teorema de coherencia para grupos categóricos simétricos es un caso particular del teorema de coherencia para categorías compactas cerradas demostrado en [38] (véase también [39]). Finalmente, en el caso trenzado, no existe en la literatura un teorema de coherencia exclusivo para grupos categóricos trenzados (esto es, en el que intervengan los isomorfismos naturales m y n); en cualquier caso, el teorema de coherencia para categorías monoidales trenzadas de Joyal-Street, [34], es suficiente para nuestros propósitos.

Para terminar con los comentarios sobre coherencia, señalamos que la coherencia realmente se establece en términos de igualdad entre transformaciones naturales (siendo los morfismos canónicos las componentes de dichas transformaciones naturales). Así, para $\mathbb{G}$ un grupo categórico simétrico, el teorema de coherencia no asegura la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \otimes X^* \arrow[rr, "c_{X,X^*}"] \arrow[dr, "m_X"'] & & X^* \otimes X \arrow[dl, "n_X"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

pues éste carece de sentido como diagrama de transformaciones naturales. De hecho, la conmutatividad del diagrama anterior es equivalente, [40], a que $\mathbb{G}$ sea *estrictamente coherente*, en el sentido de Saavedra, [48]; esto es, tal que

$$c_{X,X} = 1_{X \otimes X},$$

para todo objeto X en $\mathbb{G}$. Los grupos categóricos simétricos estrictamente coherentes son también llamados *categorías de Picard conmutativas.*

Una categoría monoidal se dice *estricta* si los isomorfismos de asociatividad y unidad a, l, r son todos identidades. Un grupo categórico $\mathbb{G}$ se dice *estricto* si lo es como categoría monoidal y los isomorfismos m_X, y entonces también n_X, pueden ser elegidos identidades. Los grupos categóricos estrictos son los objetos grupo en la categoría de categorías pequeñas.

Supongamos $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ grupos categóricos. Un *homomorfismo* $F = (F, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ consiste de un funtor $F : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ junto con una familia de isomorfismos naturales

$$\mu = \mu_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y),$$

tal que, para cualesquiera objetos X, Y, Z de $\mathbb{G}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \partial^2 F_n \arrow[r, "\partial\theta"] \arrow[d, "\chi'"'] & \partial F_{n+1}\partial \arrow[r, "\theta\partial"] & F_{n+2}\partial^2 \arrow[d, "F_{n+2}(\chi)"] \\ 0 & & F_{n+2}(0) \arrow[ll, "\mu_0"] \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

es conmutativo. Si $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ son además trenzados o simétricos, entonces también ha de ser conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X)\otimes F(Y) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "c"'] & F(X\otimes Y) \arrow[d, "F(c)"] \\ F(Y)\otimes F(X) \arrow[r, "\mu"] & F(Y\otimes X) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

para cualquier par de objetos X, Y de $\mathbb{G}$.

En tal caso, existe además un único isomorfismo

$$\mu_0 : F(I) \to I$$

de forma que los diagramas

$$\begin{tikzcd} I\otimes F(X) \arrow[r, "l"] & F(X) \\ F(I)\otimes F(X) \arrow[u, "\mu_0\otimes 1"] \arrow[r, "\mu"'] & F(I\otimes X) \arrow[u, "F(l)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X)\otimes I \arrow[r, "r"] & F(X) \\ F(X)\otimes F(I) \arrow[u, "1\otimes\mu_0"] \arrow[r, "\mu"'] & F(X\otimes I) \arrow[u, "F(r)"'] \end{tikzcd}$$

son conmutativos, para todo X de $\mathbb{G}$. Respecto a los inversos, existen isomorfismos naturales (únicos)

$$k_X : F(X)^* \to F(X^*)$$

tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} F(X)\otimes F(X^*) \arrow[rr, "\mu"] & & F(X\otimes X^*) \arrow[d, "F(m_X)"] \\ F(X)\otimes F(X)^* \arrow[u, "1\otimes k_X"] \arrow[r, "m_{F(X)}"'] & I & F(I) \arrow[l, "\mu_0"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(X^*)\otimes F(X) \arrow[rr, "\mu"] & & F(X^*\otimes X) \arrow[d, "F(n_X)"] \\ F(X)^*\otimes F(X) \arrow[u, "k_X\otimes 1"] \arrow[r, "n_{F(X)}"'] & I & F(I) \arrow[l, "\mu_0"] \end{tikzcd}$$

conmutan para todo X de $\mathbb{G}$.

Un homomorfismo de grupos categóricos es llamado *estricto* cuando cada uno de los isomorfismos $\mu_{X,Y}, \mu_0$ y k_X es una identidad.

Si $(F,\mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ y $(F',\mu') : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ son homomorfismos de grupos categóricos, su composición es el homomorfismo $(F' \circ F, \mu * \mu') : \mathbb{G} \to \mathbb{K}$ donde $(\mu * \mu')_{X,Y}$ es dado por la composición:

$$(F' \circ F)(X) \otimes (F' \circ F)(Y) \xrightarrow{\mu'} F'(F(X) \otimes F(Y)) \xrightarrow{F'(\mu)} (F' \circ F)(X \otimes Y).$$

Denotaremos a las correspondientes categorías de grupos categóricos, grupos categóricos trenzados y grupos categóricos simétricos por **GC**, **GCT** y **GCS**, respectivamente; mientras que $\mathbf{GC}_*$, $\mathbf{GCT}_*$ y $\mathbf{GCS}_*$ denotarán las subcategorías, de las anteriores, que tienen, respectivamente, los mismos objetos y cuyos morfismos son aquellos que son estrictos en el objeto unidad (es decir, con μ_0 una identidad).

Si $(F,\mu),(G,\mu') : \mathbb{G} \to \mathbb{H}$ son homomorfismos de grupos categóricos (trenzados o simétricos), una *transformación monoidal (u homotopía)*, entre ellos, es una equivalencia natural $\theta : F \Rightarrow G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes F(Y) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta_X \otimes \theta_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\theta_{X \otimes Y}"] \\ G(X) \otimes G(Y) \arrow[r, "\mu'"'] & G(X \otimes Y) \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

y entonces también es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I & \\ F(I) \arrow[ur, "\mu_0"] \arrow[rr, "\theta_I"'] & & G(I) \arrow[ul, "\mu'_0"'] \end{tikzcd}$$

Veamos algunos ejemplos de grupos categóricos.

Ejemplo 1.1.2. Si G es un grupo, la categoría discreta $\underline{G} = (G \rightrightarrows G)$ con sólo identidades, y con objetos los elementos de G, es un grupo categórico con producto tensor dado por el producto en G.

Si consideramos ahora un grupo abeliano A, este tiene asociado un grupo categórico simétrico, usualmente denotado por $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$, con un único objeto y A como conjunto de morfismos. La composición de morfismos y el producto tensor coinciden con la operación del grupo A.

Ejemplo 1.1.3. *El grupo categórico de autoequivalencias $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ de un grupo categórico.*

Para $\mathbb{G}$ un grupo categórico, $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ tiene por objetos los homomorfismos de grupos categóricos $(F, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ que son equivalencias, y por morfismos las transformaciones monoidales entre ellos. La composición en $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ viene dada por la composición vertical usual de transformaciones naturales y, entonces, es claro que $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ es un grupoide.

La composición de homomorfismos y la composición horizontal de transformaciones naturales definen un funtor $\otimes : \mathcal{E}q(\mathbb{G}) \times \mathcal{E}q(\mathbb{G}) \to \mathcal{E}q(\mathbb{G})$, de forma que $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ es un grupo categórico estricto con $I = 1_{\mathbb{G}}$ y donde el inverso de un objeto (F, μ) se obtiene tomando un cuasi-inverso de F.

$\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ contiene como subgrupo categórico a $\mathcal{A}ut(\mathbb{G})$, el *grupo categórico de los automorfismos* de $\mathbb{G}$, cuyos objetos son los homomorfismos estrictos $F : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ que son isomorfismos de categorías.

Si $\mathbb{G}$ fuese trenzado o simétrico, puede considerarse igualmente el subgrupo categórico de $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ de las autoequivalencias $(F, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ que son homomorfismos de grupos categóricos trenzados o simétricos.

Ejemplo 1.1.4. *Módulos cruzados.*

Es bien conocido que grupos categóricos estrictos son lo mismo que módulos cruzados de Whitehead [60] (véase también [5]). Recordemos que un *módulo cruzado* es un homomorfismo de grupos $\delta : N \to O$ junto con una acción de O sobre N, $(x, n) \mapsto {}^{x}n$, tal que se verifican las siguientes condiciones

$$\delta({}^{x}n) = x\delta(n)x^{-1}, \qquad {}^{\delta(n)}n' = nn'n^{-1}.$$

Si $\mathbb{G}$ es un grupo categórico estricto, este tiene asociado un módulo cruzado como sigue: O es el conjunto de objetos de $\mathbb{G}$, N es el conjunto de flechas $f : X \to I$ en el objeto unidad, $\delta : N \to O$ es la función dominio y la acción es la conjugación:

$${}^{X}(f : Y \to I) = (1_X \otimes f \otimes 1_{X^*} : X \otimes Y \otimes X^* \to I).$$

Las estructuras de grupo en N y O son las inducidas por el producto tensor de $\mathbb{G}$.

Recíprocamente, dado un módulo cruzado $\delta : N \to O$, el correspondiente grupo categórico estricto, $\mathbb{G}(\delta)$, tiene por objetos los elementos de O, mientras que el conjunto de flechas de $\mathbb{G}(\delta)$ es el producto semidirecto $N \rtimes O$. Un elemento (n, x) tiene a x, (respectivamente, $\delta(n)x$), como dominio, (respectivamente, rango). La composición es la multiplicación en N y el producto tensor de objetos y flechas es dado por la multiplicación en O y $N \rtimes O$, respectivamente.

Los isomorfismos de conmutatividad para grupos categóricos estrictos están en biyección con los "operadores corchete" [15] para los correspondientes módulos cruzados. Un *operador corchete* para un módulo cruzado $\delta : N \to O$ es una función $\{-,-\} : O \times O \to N$ verificando las cinco condiciones siguientes

$$\{x, yz\} = \{x, z\}\ {}^{z}\{x, y\}, \qquad \{xy, z\} = {}^{x}\{y, z\}\ \{x, z\},$$
$$\delta\{x, y\} = xyx^{-1}y^{-1}, \qquad \{\delta n, x\}\ {}^{x}n = n, \qquad \{x, \delta n\}\ n = {}^{x}n.$$

Un módulo cruzado junto con un operador corchete $(\delta : N \to O, \{-,-\})$, es también llamado un *módulo cruzado reducido*.

Si el grupo categórico estricto $\mathbb{G}$ es trenzado, el operador corchete sobre el correspondiente módulo cruzado es dado por

$$\{X, Y\} = c_{X,Y} \otimes 1_{X^* \otimes Y^*} : X \otimes Y \otimes X^* \otimes Y^* \to I.$$

Recíprocamente, dado un módulo cruzado reducido $(\delta : N \to O, \{-,-\})$, el isomorfismo de conmutatividad en el correspondiente grupo categórico estricto es dado por la ecuación

$$c_{x,y} = (\{y, x\}, xy) : xy \to yx.$$

Así pues grupos categóricos estrictos y trenzados se corresponden biyectivamente con módulos cruzados reducidos.

Finalmente, la condición de simetría sobre c se traduce en que el operador corchete correspondiente verifique

$$\{x, y\}\ \{y, x\} = 1.$$

Los módulos cruzados reducidos $(\delta : N \to O, \{-,-\})$ verificando la identidad anterior se llaman *módulos cruzados estables*. Deducimos entonces que éstos son esencialmente lo mismo que grupos categóricos estrictos y simétricos.

Ejemplo 1.1.5. *El centro de un grupo categórico.*

Si $\mathbb{G}$ es un grupo categórico, el *centro* de $\mathbb{G}$, [34], es la categoría $\mathbb{Z}_{\mathbb{G}}$ cuyos objetos son pares (A, u), donde $A \in Obj(\mathbb{G})$ y $u : A \otimes - \to - \otimes A$ es un isomorfismo natural tal que verifica las dos condiciones siguientes:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "u_{X \otimes Y}"] & (X \otimes Y) \otimes A \arrow[dr, "a"] & \\
(A \otimes X) \otimes Y \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "u_X \otimes 1"'] & & & X \otimes (Y \otimes A) \\
 & (X \otimes A) \otimes Y \arrow[r, "a"'] & X \otimes (A \otimes Y) \arrow[ur, "1 \otimes u_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes I \arrow[rr, "u_I"] \arrow[dr, "r"'] & & I \otimes A \arrow[dl, "l"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Un morfismo $f : (A, u) \to (B, v)$ en $\mathbb{Z}_{\mathbb{G}}$ es un morfismo $f : A \to B$ en $\mathbb{G}$ tal que para todo objeto X en $\mathbb{G}$:

$$(1_X \otimes f) \cdot u_X = v_X \cdot (f \otimes 1_X).$$

Entonces $\mathbb{Z}_{\mathbb{G}}$ es un grupo categórico trenzado con producto tensor dado por

$$(A, u) \otimes (B, v) = (A \otimes B, (u \otimes 1) \cdot (1 \otimes v)),$$

e isomorfismo de conmutatividad dado por

$$c_{(A,u),(B,v)} = u_B : (A, u) \otimes (B, v) \to (B, v) \otimes (A, u).$$

El objeto unidad es (I, i) con $i_X = r_X^{-1} \cdot l_X : I \otimes X \to X \otimes I$.

Ejemplo 1.1.6. *El grupo categórico de los homomorfismos,* $\underline{Hom}(\mathbb{G}, \mathbb{A})$.
Si $\mathbb{G}$ es un grupo categórico y $\mathbb{A}$ es un grupo categórico trenzado, $\underline{Hom}(\mathbb{G}, \mathbb{A})$ es la categoría cuyos objetos son los homomorfismos de grupos categóricos de $\mathbb{G}$ en $\mathbb{A}$ y cuyas flechas son las transformaciones monoidales entre ellos; entonces $\underline{Hom}(\mathbb{G}, \mathbb{A})$ es obviamente un grupoide.

Definimos el producto tensor de objetos $(F, \mu), (G, \mu')$ de $\underline{Hom}(\mathbb{G}, \mathbb{A})$ por

$$(F, \mu) \otimes (G, \mu') = (F \otimes G, \mu \Diamond \mu'), \tag{1.4}$$

donde $(F\otimes G)(X) = F(X)\otimes G(X)$, para cada $X \in Obj(\mathbb{G})$ y $(\mu\Diamond\mu')_{X,Y} : (F\otimes G)(X)\otimes(F\otimes G)(Y) \to (F\otimes G)(X\otimes Y)$ viene dado por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(X)\otimes G(X)\otimes F(Y)\otimes G(Y) \arrow[rr, "(\mu\ \ \mu')_{X,Y}"] \arrow[dr, "1\otimes c\otimes 1"'] & & (F\otimes G)(X\otimes Y) \\
& F(X)\otimes F(Y)\otimes G(X)\otimes G(Y) \arrow[ur, "\mu_{X,Y}\otimes\mu'_{X,Y}"'] &
\end{tikzcd}$$

para cada $X, Y \in Obj(\mathbb{G})$, (donde hemos omitido el isomorfismo de asociatividad).

Si $\theta : (F,\mu) \Rightarrow (F_1,\mu_1)$ y $\theta' : (G,\mu') \Rightarrow (G_1,\mu'_1)$ son morfismos de $\underline{Hom}(\mathbb{G},\mathbb{A})$, entonces $\theta\otimes\theta' : (F,\mu)\otimes(G,\mu') \Rightarrow (F_1,\mu_1)\otimes(G_1,\mu'_1)$ se define para cada X en $\mathbb{G}$ por

$$(\theta\otimes\theta')_X = \theta_X\otimes\theta'_X : F(X)\otimes G(X) \to F'(X)\otimes G'(X).$$

Con estas definiciones $\underline{Hom}(\mathbb{G},\mathbb{A})$ es un grupo categórico donde el isomorfismo de asociatividad $a_{F,G,H} : (F\otimes G)\otimes H \Rightarrow F\otimes(G\otimes H)$ tiene por componentes $(a_{F,G,H})_X = a_{F(X),G(X),H(X)}$, para cada $X \in Obj(\mathbb{G})$. El objeto unidad es el homomorfismo constante $I = (I, r_I) : \mathbb{G} \to \mathbb{A}$, que llamaremos homomorfismo *nulo*, y los isomorfismos unidad a izquierda y derecha $l_F : I\otimes F \Rightarrow F$ y $r_F : F\otimes I \Rightarrow F$ están definidos por $(l_F)_X = l_{F(X)}$ y $(r_F)_X = r_{F(X)}$.

Finalmente, el inverso de un homomorfismo $(F,\mu) \in Obj(\underline{Hom}(\mathbb{G},\mathbb{A}))$ es el homomorfismo $(F^*,\tilde{\mu}) : \mathbb{G} \to \mathbb{A}$, donde para cada par de objetos X, Y de $\mathbb{G}$, $F^*(X) = F(X)^*$ y $\tilde{\mu}_{X,Y} : F^*(X)\otimes F^*(Y) \to F^*(X\otimes Y)$, viene dado por la composición

$$F(X)^*\otimes F(Y)^* \xrightarrow{\nu_{F(X),F(Y)}} (F(X)\otimes F(Y))^* \xrightarrow{(\mu_{X,Y})^*} F(X\otimes Y)^*\,,$$

siendo $\nu = \nu_{A,B} : A^*\otimes B^* \to (A\otimes B)^*$ el isomorfismo canónico en $\mathbb{A}$ obtenido por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes B)\otimes(A^*\otimes B^*) \arrow[rr, "1\otimes c_{B,A^*}\otimes 1"] \arrow[d, "1_{A\otimes B}\otimes\nu_{A,B}"'] & & A\otimes A^*\otimes B\otimes B^* \arrow[d, "m_A\otimes m_B"] \\
(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)^* \arrow[r, "m_{A\otimes B}"'] & I & I\otimes I \arrow[l, "r_I"]
\end{tikzcd}$$

Señalemos que aunque el grupo categórico $\mathbb{A}$ sea trenzado, sin embargo, no podemos decir lo mismo de $\underline{Hom}(\mathbb{G},\mathbb{A})$: Si definimos, como para a, l, r, $c_{F,G} : (F,\mu)\otimes(G,\mu') \Rightarrow (G,\mu')\otimes(F,\mu)$ por

$$(c_{F,G})_X = c_{F(X),G(X)} : (F\otimes G)(X) \to (G\otimes F)(X),$$

entonces la conmutatividad del diagrama (1.3) se tiene asegurada cuando el isomorfismo de conmutatividad en $\mathbb{A}$ es una simetría, es decir, cuando $\mathbb{A}$ es un grupo categórico simétrico. En este caso, además $\underline{Hom}(\mathbb{G},\mathbb{A})$ es un grupo categórico simétrico con simetría dada por $c_{F,G}$.

En particular, si $\mathbb{B}$ es un grupo categórico simétrico entonces $\underline{Hom}(\mathbb{B},\mathbb{A})$ contiene como subgrupo categórico simétrico a $\underline{Hom}_s(\mathbb{B},\mathbb{A})$, el subgrupoide de los homomorfismos de grupos categóricos simétricos de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{A}$.

Por otro lado, si $\mathbb{G}$ y $\mathbb{A}$ son trenzados, entonces el grupoide de homomorfismos de grupos categóricos trenzados $\underline{Hom}_t(\mathbb{G},\mathbb{A})$ no es, en general, un grupo categórico pues, de nuevo, la conmutatividad de (1.2), para $\mu\Diamond\mu'$ exige que además $\mathbb{A}$ sea simétrico (véase [34, Prop. 5.4].

Ejemplo 1.1.7. *El grupo categórico de Picard de un anillo conmutativo.*

Sea R un anillo conmutativo y unitario. La categoría de Picard de R, $\mathcal{P}ic(R)$, es la que tiene por objetos los R-módulos proyectivos finitamente generados de rango constante uno y por morfismos los R-isomorfismos entre ellos.

$\mathcal{P}ic(R)$ es pues un grupoide que admite una estructura monoidal con producto tensor $\otimes = \otimes_R$, el producto tensor usual de R-módulos. El objeto unidad es el propio anillo R y los isomorfismos de asociatividad, unidad y conmutatividad son los usuales del producto tensor de R-módulos.

Para cada objeto P de $\mathcal{P}ic(R)$, considerando $P^* = Hom_R(P,R)$, se tiene que el morfismo de R-módulos $P^*\otimes P \to R$, $y^*\otimes x \mapsto y^*(x)$, es, por ser P proyectivo de tipo finito y de rango uno, un isomorfismo. Consecuentemente, $Hom_R(P,R)$ es un inverso para P y $\mathcal{P}ic(R)$ es un grupo categórico simétrico.

1.2 Grupoides de homotopía superiores.

En esta sección estudiamos con detalle otros ejemplos de grupos categóricos que son fundamentales para nosotros: Los *grupoides de homotopía superiores* de un conjunto simplicial de Kan definidos por Carrasco-Cegarra en [9]. En lo que sigue $X_\bullet$ será un conjunto simplicial de Kan, que también llamaremos complejo de Kan.

$$X_\bullet \quad = \quad \cdots \quad \begin{tikzcd}[column sep=large] X_3 \arrow[r, shift left=4.5, "d_0"] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[r, shift right=4.5, "d_3"'] & X_2 \arrow[l, bend right=20, "s_0"'] \arrow[l, bend right=35] \arrow[l, bend right=50, "s_2"'] \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3, "d_2"'] & X_1 \arrow[l, bend right=25, "s_0"'] \arrow[l, bend right=45, "s_1"'] \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_1"'] & X_0 \arrow[l, bend right=30, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

Referencias básicas sobre conjuntos simpliciales que manejamos son [16], [26], [45] y [46].

Recordemos que dos n-símplices x, x' de $X_\bullet$ se dicen *homotópicos*, $x \sim x'$, si existe un (n+1)-símplex $y \in X_{n+1}$, tal que $d_n(y) = x$, $d_{n+1}(y) = x'$ y $d_i(y) = s_{n-1}d_i(x) = s_{n-1}d_i(x')$, $0 \leq i \leq n-1$. Como es bien conocido, para conjuntos simpliciales de Kan, la relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de n-símplices de $X_\bullet$, para todo $n \geq 0$.

Consideremos el conjunto de clases de homotopía de 1-símplices, o arcos, de $X_\bullet$, que denotaremos por $[X_1]$. Este conjunto es el conjunto de flechas del *grupoide fundamental*, también llamado grupoide de Poincaré, de $X_\bullet$, que denotaremos por $\wp(X_\bullet)$. Este grupoide tiene como objetos el conjunto de 0-símplices X_0 y su grafo es

$$\wp(X) \quad = \quad \begin{tikzcd}[column sep=large] {[X_1]} \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, shift right=2, "t"'] & X_0 \arrow[l, bend right=30, "1"'] \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

donde $s\,[x] = d_1(x)$, $t\,[x] = d_0(x)$ e $1_A = [s_0(A)]$. La composición se define de forma que $[d_1\sigma] = [d_0\sigma] \cdot [d_2\sigma]$, para cada 2-símplex $\sigma \in X$. En otras palabras, si $[x] : A \to B$ e $[y] : B \to C$ son morfismos componibles en $\wp(X_\bullet)$, usando la condición de extensión elegimos $\sigma \in X_2$ tal que $d_0(\sigma) = y$ y $d_2(\sigma) = x$ y entonces $[y] \cdot [x] = [d_1\sigma]$. Este grupoide es isomorfo al grupoide fundamental, en el sentido de Brown [4], del par $(|X_\bullet|, |X_\bullet^0|)$, donde $|-|$ es el funtor realización geométrica y $X_\bullet^0$ es el 0-esqueleto de $X_\bullet$.

Esta construcción de $\wp$ es funtorial, además aplica equivalencias homotópicas simpliciales $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ en equivalencias $\wp(f) : \wp(X_\bullet) \to \wp(Y_\bullet)$, entre los correspondientes grupoides fundamentales.

Consideremos dos casos particulares que nos serán de utilidad:

1. Un conjunto simplicial de Kan $X_\bullet$ se dice *minimal* si siempre que $d_i(x) = d_i(y), i \neq k, x, y \in X_n$, entonces $d_k(x) = d_k(y)$. Esta propiedad es equivalente a que la relación de homotopía entre símplices sea trivial, es decir, dos n-símplices son homotópicos si, y solamente si, son iguales. Consecuentemente, si $X_\bullet$ es minimal, entonces $[X_1] = X_1$, $s = t$ y $\wp(X_\bullet)$ es esqueletal (es decir, cualesquiera dos objetos isomorfos son iguales). $\wp(X_\bullet)$ se identifica así con la unión de los grupos fundamentales de $X_\bullet$ en cada vértice, esto es, $\wp(X_\bullet) = \bigcup_{A \in X_0} \pi_1(X_\bullet, A)$. Señalemos que todo conjunto simplicial de Kan $X_\bullet$ tiene un subcomplejo de Kan $M_\bullet \subset X_\bullet$, que es minimal y un retracto fuerte de deformación de él, [45].

2. Por otro lado, supongamos que $X_\bullet = G_\bullet$ es un grupo simplicial, es decir, cada G_n es un grupo y los operadores cara y de degeneración son homomorfismos de grupos. Entonces la relación de homotopía en G_n es una congruencia y, en particular, $[G_1] = G_1/d_2(Kerd_0 \cap Kerd_1)$. Así, para grupoides simpliciales, $\wp(G_\bullet)$ es un grupoide interno en la categoría de grupos o, en otras palabras, un grupo categórico estricto con producto tensor dado por la multiplicación del grupo.

En orden a definir los grupoides de homotopía superiores, recordemos que el complejo de lazos $\Omega(X_\bullet, *)$ de un conjunto simplicial de Kan punteado $(X_\bullet, *)$, $* \in X_0$, se define como el conjunto simplicial cuyos n-símplices son:

$$\Omega_n(X_\bullet, *) = \{x \in X_{n+1}; d_0(x) = * \text{ y } d_1 ... d_{n+1}(x) = *\}$$

y cuyos operadores cara y operadores de degeneración $d_i : \Omega_n(X_\bullet, *) \to \Omega_{n-1}(X_\bullet, *)$ y $s_j : \Omega_n(X_\bullet, *) \to \Omega_{n+1}(X_\bullet, *)$ son las restricciones de los operadores cara y degeneración $d_{i+1} : X_{n+1} \to X_n$, $s_{j+1} : X_{n+1} \to X_{n+2}$, respectivamente, $0 \leq i \leq n$ y $0 \leq j \leq n$. Este complejo de lazos $\Omega(X_\bullet, *)$ es un conjunto simplicial de Kan punteado por $* = s_0(*)$ y, de hecho, esta construcción es funtorial desde la categoría de conjuntos simpliciales de Kan punteados. Es claro además, desde la definición, que si $X_\bullet$ es minimal, entonces también lo es $\Omega(X_\bullet, *)$, mientras que si $X_\bullet = G_\bullet$ es un grupo simplicial y lo punteamos por el elemento neutro $e \in G_0$, entonces $\Omega(G_\bullet, e)$ es también un grupo simplicial.

Los *grupoides de homotopía superiores* $\wp_n(X_\bullet,*)$ de un complejo de Kan punteado se definen de forma análoga a la definición de Moore, [46], de sus grupos de homotopía.

Definición 1.2.1 (Carrasco-Cegarra [9]). *Sea $(X_\bullet,*)$ un complejo de Kan punteado. Para cada $n \geq 0$, el n-ésimo grupoide de homotopía de $(X_\bullet,*)$ es definido por:*

$$\wp_n(X_\bullet,*) = \wp(\Omega^n(X_\bullet,*)),$$

donde para $n=0$, $\wp_0(X_\bullet,*) = \wp(X_\bullet,*)$, el grupoide fundamental.

Notemos que el conjunto de componentes conexas de $\wp_n(X_\bullet,*)$ se identifica con $\pi_n(X_\bullet,*)$, el n-ésimo grupo de homotopía de $X_\bullet$, y el conjunto de automorfismos de $*$ se identifica con $\pi_{n+1}(X_\bullet,*)$.

La estructura monoidal de estos grupoides de homotopía $\wp_n(X_\bullet,*)$, para $n \geq 1$, se define de forma combinatoria, usando únicamente la estructura simplicial del complejo, al igual que Kan hace para definir la operación producto en los grupos de homotopía del complejo [35]. De hecho, éstas son generalizaciones de la estructura de grupo de $\pi_1(X_\bullet,*)$ o de la de grupo abeliano de $\pi_n(X_\bullet,n)$, $n \geq 2$.

Describiremos a continuación como están definidas:

1.2.2. Estructura monoidal (trenzada) de los grupoides de homotopía superiores.

Sea $(X_\bullet,*)$ un complejo de Kan punteado y sea $n \geq 1$.

Para cada par de 0-símplices del n-ésimo complejos de lazos, $A,B \in \Omega^n_0(X_\bullet,*) \subseteq X_n$, elegimos un $(n+1)$-símplex $Z_{A,B} \in X_{n+1}$ tal que $d_i(Z_{A,B}) = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1}(Z_{A,B}) = A$ y $d_{n+1}(Z_{A,B}) = B$. Definimos entonces

$$\boxed{A \otimes B = d_n(Z_{A,B}).} \tag{1.6}$$

Sobre morfismos, sean $x,y \in \Omega^n_1(X_\bullet,*) \subseteq X_{n+1}$ dos elementos que representan morfismos en $\wp_n(X_\bullet,*)$, $[x]: A \to C$, $[y]: B \to D$. Por la condición de extensión, existen símplices $Z_{x,D}$, $\bar{Z}_{A,y}$, $Z_{A,y}$ y $Z_{x,y} \in X_{n+2}$ tales que: $d_i(Z_{x,D}) = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1}(Z_{x,D}) = x$, $d_{n+1}(Z_{x,D}) = Z_{C,D}$ y $d_{n+2}(Z_{x,D}) = Z_{A,D}$; $d_i(\bar{Z}_{A,y}) = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1}(\bar{Z}_{A,y}) = s_{n-1}(A)$,

$d_n(\bar{Z}_{A,y}) = Z_{A,D}$ y $d_{n+2}(\bar{Z}_{A,y}) = y$; $d_i(Z_{A,y}) = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1}(Z_{A,y}) = s_n(A)$, $d_{n+1}(Z_{A,y}) = d_{n+1}(\bar{Z}_{A,y})$ y $d_{n+2}(Z_{A,y}) = Z_{A,B}$; y finalmente $d_i(Z_{x,y}) = *$, para $0 \leq i \leq n-1$, $d_n(Z_{x,y}) = d_n(Z_{x,D})$ y $d_{n+2}(Z_{x,y}) = d_n(Z_{A,y})$. Se define entonces

$$\boxed{[x] \otimes [y] = [d_{n+1} Z_{x,y}] : A \otimes B \to C \otimes D} \tag{1.7}$$

que, en efecto, constituye un morfismo en $\wp_n(X_\bullet, *)$ ya que $d_i d_{n+1} Z_{x,y} = d_n d_i Z_{x,y} = d_n(*) = *$, si $0 \leq i \leq n-1$, y $d_n d_{n+1} d_{n+1} Z_{x,y} = d_n d_{n+1} d_n Z_{A,y} = d_n d_n Z_{A,B} = *$. Su dominio es $A \otimes B$, pues $d_{n+1} d_{n+1} Z_{x,y} = d_{n+1} d_n Z_{A,y} = d_n Z_{A,B} = A \otimes B$ y, análogamente, su codominio es $C \otimes D$.

La definición de $[x] \otimes [y]$, una vez elegidos los elementos $\{Z_{A,B}\}$, como en (1.6), únicamente depende de la clase de homotopía de x e y.

Consideremos ahora tres 0-símplices $A, B, C \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$. Usando la condición de extensión, elegimos $\bar{Z}_{A,B,C}$,$Z_{A,B,C} \in X_{n+2}$ tal que: $d_i \bar{Z}_{A,B,C} = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1} \bar{Z}_{A,B,C} = Z_{A,B}$, $d_n \bar{Z}_{A,B,C} = Z_{A,B\otimes C}$, $d_{n+2} \bar{Z}_{A,B,C} = Z_{B,C}$ y $d_i Z_{A,B,C} = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1} Z_{A,B,C} = s_n(A \otimes B)$, $d_{n+1} Z_{A,B,C} = d_{n+1} \bar{Z}_{A,B,C}$ y $d_{n+2} Z_{A,B,C} = Z_{A\otimes B,C}$. Tenemos entonces un $(n+1)$-símplex $d_n Z_{A,B,C} \in X_{n+1}$ verificando $d_i d_n Z_{A,B,C} = d_{n+1}(*) = *$, $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1} d_n Z_{A,B,C} = d_{n-1} s_n(A \otimes B) = *$ y $d_n d_{n+1} d_n Z_{A,B,C} = d_n d_n Z_{A\otimes B,C} = d_n C = *$. Por tanto, $d_n Z_{A,B,C}$ representa un morfismo en $\wp_n(X_\bullet, *)$ cuyo dominio es $d_{n+1} d_n Z_{A,B,C} = d_n Z_{A\otimes B,C} = (A \otimes B) \otimes C$ y cuyo rango es $d_n d_n Z_{A,B,C} = d_n d_{n+1} \bar{Z}_{A,B,C} = d_n Z_{A,B\otimes C} = A \otimes (B \otimes C)$. Se define

$$\boxed{a_{A,B,C} : [d_n Z_{A,B,C}] : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C).} \tag{1.8}$$

Para cada $A \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$ se eligen ahora $(n+2)$-símplices $\bar{Z}_A$ y Z_A de $X_\bullet$ con $d_i Z_A = *$, para $0 \leq i \leq n-1$, $d_{n+1} Z_A = s_n(A)$ y $d_{n+2} Z_A = Z_{*,A}$; $d_i \bar{Z}_A = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1} \bar{Z}_A = s_n(A)$, $d_{n+1} \bar{Z}_A = s_{n-1}(A)$ y $d_{n+2} \bar{Z}_A = Z_{A,*}$. Como anteriormente, $d_n Z_A, d_n \bar{Z}_A \in \Omega_1^n(X_\bullet, *)$ y estos definen los morfismos canónicos de unidad en $\wp_n(X_\bullet, *)$:

$$\boxed{l_A = [d_n Z_A] : * \otimes A \to A,} \qquad \boxed{r_A = \left[d_n \bar{Z}_A\right] : A \otimes * \to A,} \tag{1.9}$$

Supongamos ahora $n \geq 2$, podemos definir morfismos canónicos de conmutatividad en $\wp_n(X_\bullet, *)$, como sigue:

Para cada $A, B \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$, se pueden considerar símplices U_A, $U_{A,B}$, $V_{A,B}$ y $W_{A,B}$ en X_{n+2} verificando las siguientes condiciones en sus caras: $d_i U_A = *$, para $0 \leq i \leq n-3$, $d_{n-2}U_A = s_{n-1}(A)$, $d_{n-1}U_A = s_n(A)$, $d_{n+1}U_A = s_{n-2}(A)$ y $d_{n+2}U_A = s_{n-1}(A)$; $d_i U_{A,B} = *$, para $0 \leq i \leq n-3$, $d_{n-1}U_{A,B} = d_n U_B$, $d_n U_{A,B} = d_n U_{B\otimes A}$, $d_{n+1}U_{A,B} = d_n U_A$ y $d_{n+2}U_{A,B} = Z_{B,A}$; $d_i V_{A,B} = *$, para $0 \leq i \leq n-3$, $d_{n-2}V_{A,B} = s_n(B)$, $d_n V_{A,B} = s_{n-1}(A)$, $d_{n+1}V_{A,B} = d_{n-2}U_{A,B}$ y $d_{n+2}V_{A,B} = s_{n-2}(B)$; y finalmente $d_i W_{A,B} = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1}W_{A,B} = s_n(A)$, $d_{n+1}W_{A,B} = d_{n-1}V_{A,B}$ y $d_{n+2}W_{A,B} = Z_{A,B}$.

Entonces $d_n W_{A,B}$ pertenece a $\Omega_1^n(X_\bullet, *)$ y su clase de homotopía define un morfismo en $\wp_n(X_\bullet, *)$ con dominio $d_{n+1}d_n W_{A,B} = d_n Z_{A,B} = A \otimes B$, y con rango $d_n d_n W_{A,B} = d_n d_{n-1} V_{A,B} = d_{n-1} d_{n-2} U_{A,B} = d_{n-2} d_n U_{B\otimes A} = B \otimes A$. Se define entonces el isomorfismo de conmutatividad por

$$\boxed{c_{A,B} = [d_n W_{A,B}] : A \otimes B \to B \otimes A.} \tag{1.10}$$

para cualesquiera objetos A y B de $\wp_n(X_\bullet, *)$.

Notemos, de nuevo, que una vez elegidos los elementos $\{Z_{A,B}\}$, $A, B \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$, como en (1.6) los morfismos anteriores (1.8),(1.9) y (1.10) son independientes de las elecciones efectuadas para su construcción.

El siguiente teorema es la conjunción de los teoremas 1.3 y 1.4 de [9]:

Teorema 1.2.3. *Sea $(X_\bullet, *)$ un complejo de Kan punteado. Para cada elección $Z_{A,B}$, $A, B \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$, como en (1.6), $\wp_n(X_\bullet, *) = (\wp_n(X_\bullet, *), \otimes, a, *, l, r)$ es un grupo categórico para $n \geq 1$; $(\wp_n(X_\bullet, *), c)$ es un grupo categórico trenzado para $n \geq 2$.*

Diferentes elecciones de los $Z_{A,B}$ determinan estructuras monoidales isomorfas sobre $\wp_n(X_\bullet, *)$, $n \geq 1$. Estas construcciones son funtoriales con respecto a aplicaciones simpliciales y aplican equivalencias homotópicas de conjuntos simpliciales en equivalencias de grupos categóricos (trenzados si $n \geq 2$).

Si $f : (X_\bullet, *) \to (X'_\bullet, *)$ es una aplicación simplicial de complejos de Kan punteados, y en $\wp_n(X_\bullet, *)$, $\wp_n(X_\bullet, *)$ consideramos las estructuras monoidales definidas, usando sistemas $\{Z_{A,B}\}$, $\{Z_{A',B'}\}$, respectivamente, como en (1.6), entonces la estructura monoidal del homomorfismo de grupoides inducido

$$\wp_n(f) : \wp_n(X_\bullet, *) \to \wp_n(X'_\bullet, *)$$

es dada como sigue:

Para cada par de 0-símplices $A, B \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$, la condición de extensión sobre $X'_\bullet$ asegura la existencia de un $(n+2)$-símplex $T_{A,B} \in X'_{n+2}$ tal que $d_i T_{A,B} = *$, para $0 \leq i \leq n-2$, $d_{n-1}T_{A,B} = s_n f(A)$, $d_{n+1}T_{A,B} = f(Z_{A,B})$ y $d_{n+2}T_{A,B} = Z_{f(A),f(B)}$.

El $(n+1)$-símplex $d_n T_{A,B} \in X'_{n+1}$ pertenece a $\Omega_1^n(X'_\bullet, *)$ y su clase de homotopía define el morfismo en $\wp_n(X'_\bullet, *)$

$$\boxed{\mu_{A,B} = [d_n T_{A,B}] : f(A) \otimes f(B) \to f(A \otimes B)} \tag{1.11}$$

y entonces $(\wp_n(f), \mu, 1_*) : \wp_n(X_\bullet, *) \to \wp_n(X'_\bullet, *)$ es el homomorfismo de grupos categóricos (trenzados para $n \geq 2$) asociado a f, que es estricto en el objeto unidad.

1.2.4. Relación de $\wp_n(X_\bullet, *)$ con otras construcciones. La condición de simetría de $\wp_n(X_\bullet, *)$, para $n \geq 3$.

Como ya hemos comentado, si $X_\bullet = G_\bullet$ es un grupo simplicial, su grupoide fundamental $\wp(G_\bullet)$ es un grupo categórico estricto. Entonces, puesto que el funtor Ω preserva grupos simpliciales, punteando $G_\bullet$ por el elemento neutro $e \in G_0$, resulta que $\wp_n(G_\bullet, e)$ es un grupo categórico estricto para todo $n \geq 0$.

Ahora, en este caso, en analogía con lo que ocurre con los grupos de homotopía de $G_\bullet$ que, como es conocido, son abelianos en dimensiones positivas, $\wp_1(G_\bullet, e)$ es también trenzado, como se prueba en [15] y [7] aunque en términos de módulos cruzados (véase Ejemplo 1.1.4). Por otro lado en [6, Proposición 1.2], se demuestra que $\wp\Omega^2(G_\bullet, e)$ es un grupo categórico simétrico, y así para todo $n \geq 2$, $\wp_n(G_\bullet, e)$ es un grupo categórico estricto y simétrico

$\wp_n(G_\bullet, e)$, $n \geq 1$, como grupo categórico estricto es el grupoide interno en grupos

$$\begin{tikzcd} \dfrac{\Omega_1^n(G_\bullet, e)}{d_{n+2}(\widetilde{G}_{n+2})} \arrow[r, shift left, "\bar{d}_{n+1}"] \arrow[r, shift right, "\bar{d}_n"'] & \Omega_0^n(G_\bullet, e), \arrow[l, bend right, "\bar{s}_n"'] \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

donde, $\widetilde{G}_{n+2} = Ker(d_0) \cap .... \cap Ker(d_{n+1}) \subset G_{n+1}$ (es decir, el grupo en dimensión $n+2$ del complejo de Moore del grupo simplicial $G_\bullet$, [46]), $\Omega_0^n(G_\bullet, e) = Ker(d_0) \cap .... \cap Ker(d_n) \subset G_n$, $\Omega_1^n(G_\bullet, e) = \{x \in G_{n+1}; d_i(x) = e, 0 \le i \le n-1 \text{ y } d_n d_{n+1}(x) = e\}$ y $\bar{d}_{n+1}, \bar{d}_n$ y $\bar{s}_n$ son los inducidos por $d_n, d_{n+1} : G_{n+1} \to G_n$ y $s_n : G_n \to G_{n+1}$, respectivamente.

El producto tensor en objetos y morfismos está dado por las correspondientes multiplicaciones. El isomorfismo de conmutatividad se define como sigue: Para cada par de objetos A, B de $\wp_n(G_\bullet, e)$, es decir, $A, B \in G_n$ con $d_i(A) = e = d_i(B)$, $0 \le i \le n$, consideramos el $(n+1)$-símplex $\{A, B\} = s_{n-1}(B)s_n(A)s_{n-1}(B^{-1})s_n(BA^{-1}B^{-1})$. Entonces se observa fácilmente que $\{A, B\}s_n(BA) \in \Omega_1^n(G_\bullet, e)$ y entonces representa un morfismo en $\wp_n(G_\bullet, e)$ con dominio $d_{n+1}(\{A, B\}s_n(BA)) = AB$ y con rango $d_n(\{A, B\}s_n(BA)) = BA$. El isomorfismo de conmutatividad es así:

$$c_{A,B} = [\{A, B\}s_n(BA)] : AB \to BA \tag{1.13}$$

Notemos que $\{-, -\}$ no es otro que el operador corchete del módulo cruzado reducido (o estable) asociado a $\wp_n(G_\bullet, e)$. (Véase Ejemplo 1.1.4).

Pretendemos a continuación relacionar los grupoides de homotopía de complejos de Kan punteados con los grupoides de homotopía de grupos simpliciales.

Para ello, consideramos el funtor llamado "*grupo simplicial de lazos*"

$$G(-) : (\mathbf{Sets}^{\Delta^{op}})_0 \to \mathbf{Gr}^{\Delta^{op}}, \tag{1.14}$$

[35], [45], desde la categoría de conjuntos simpliciales reducidos (es decir, con sólo un 0-símplex) en la categoría de grupos simpliciales: Si $K_\bullet$ es un conjunto simplicial reducido, $G(K_\bullet)$ es el grupo simplicial cuyo grupo de n-símplices, $G_n(K_\bullet)$, $n \ge 0$, es el grupo libre generado por los elementos de K_{n+1}, módulo las relaciones $s_0(x) = e_n$, para $x \in K_n$. Si para cada $x \in K_{n+1}$, denotamos por $\sigma(x)$ la clase de x en $G_n(K_\bullet)$, los operadores cara y de degeneración están

definidos por:

$$\begin{aligned} d_0(\sigma(x)) &= \sigma(d_0(x))^{-1}\sigma(d_1(x)), \\ d_i(\sigma(x)) &= \sigma(d_{i+1}(x)),\ i > 0, \\ s_j(\sigma(x)) &= \sigma(s_{j+1}(x)),\ j \geq 0. \end{aligned}$$

Este grupo simplicial $G(K_\bullet)$ está estrechamente relacionado con el complejo de lazos $\Omega(K_\bullet)$, (en su único vértice) pues, la aplicación σ, anteriormente considerada, define un morfismo simplicial

$$\sigma : \Omega(K_\bullet) \to G(K_\bullet)$$

que resulta ser una equivalencia homotópica ([35], [46]).

Ahora, sea $(X_\bullet, *)$ un complejo de Kan punteado y denotemos por $F(X_\bullet, *) \subseteq (X_\bullet, *)$ al subcomplejo fibra de $X_\bullet$ en el vértice $*$, (esto es, $F_0(X_\bullet, *) = \{*\}$, $F_1(X_\bullet, *) = \{x \in X_1; d_0(x) = d_1(x) = *\}$ y $F_n(X_\bullet, *) = \{x \in X_n; d_0 ... d_n(x) = *\}$, $n \geq 2$). Claramente $\Omega(X_\bullet, *) = \Omega(F(X_\bullet, *))$ y entonces, σ define una equivalencia homotópica

$$\sigma : \Omega(X_\bullet, *) \to G(X_\bullet, *), \tag{1.15}$$

donde $G(X_\bullet, *)$ denota el grupo simplicial $G(F(X_\bullet, *))$.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 1.2.5. *Sea $(X_\bullet, *)$ un complejo de Kan punteado. La equivalencia homotópica (1.15), induce para cada $n \geq 1$, un homomorfismo de grupos categóricos (trenzados si $n \geq 2$)*

$$(\sigma, \mu) : \wp_n(X_\bullet, *) \to \wp_{n-1}(G(X_\bullet, *))$$

que es una equivalencia de grupos categóricos.

En particular, $\wp_n(X_\bullet, *)$ es un grupo categórico simétrico para todo $n \geq 3$.

Demostración.

El isomorfismo natural μ se define como sigue: Para cada par de objetos $A, B \in \Omega_0^n(X_\bullet, *)$, consideramos el elemento $g_{A,B} = \sigma(s_n(A))\sigma(s_{n-1}(A))^{-1}\sigma(Z_{A,B}) \in G_n(X_\bullet, *)$, elegidos $\{Z_{A,B}\} \subset X_{n+1}$

como (1.6), para definir la estructura monoidal de $\wp_n(X_\bullet,*)$, nótese que si $n=1$, entonces $g_{A,B}=\sigma(s_1(A))\sigma(Z_{A,B})\in G_1(X_\bullet,*)$, dado que $\sigma(s_0(A))=e$, por definición de $G(X_\bullet,*)$.

Entonces, teniendo en cuenta la definición de los morfismos cara y de degeneración en $G(X_\bullet,*)$, un cálculo elemental nos conduce a que para todo $n\geq 2$, $d_i(g_{A,B})=e$, para $0\leq i\leq n-2$ y $d_{n-1}d_n(g_{A,B})=e$. Es decir, $g_{A,B}\in\Omega_1^{n-1}(G(X_\bullet,*))$, (véase (1.12)), y consecuentemente representa un morfismo en $\wp_{n-1}(G(X_\bullet,*))$ con dominio $d_n(g_{A,B})=\sigma(d_{n+1}s_n(A))\sigma(d_{n+1}s_{n-1}(A))^{-1}\sigma(d_{n+1}Z_{A,B})=\sigma(A)\sigma(B)$ y rango $d_{n-1}(g_{A,B})=\sigma(d_ns_n(A))\sigma(d_ns_{n-1}(A))^{-1}\sigma(d_nZ_{A,B})=\sigma(A\otimes B)$.

Por otro lado, si $n=1$, $\wp_0(G(X_\bullet,*))=\wp(G(X_\bullet,*))$ y así $g_{A,B}=\sigma(s_1(A))\sigma(Z_{A,B})\in G_1(X_\bullet,*)$ representa un morfismo en $\wp G(X_\bullet,*)$ con dominio $d_1(g_{A,B})=\sigma(A)\sigma(B)$ y rango $d_0(g_{A,B})=\sigma(d_0s_1(A))^{-1}\sigma(d_1s_1(A))\sigma(d_0Z_{A,B})^{-1}\sigma(d_1Z_{A,B})=\sigma(A)\sigma(A)^{-1}\sigma(A\otimes B)=\sigma(A\otimes B)$. Entonces el isomorfismo μ es dado por

$$\mu_{A,B}=[g_{A,B}]:\sigma(A)\sigma(B)\to\sigma(A\otimes B)\tag{1.16}$$

y (σ,μ) es un homomorfismo de grupos categóricos (trenzados para $n\geq 2$).

Puesto que el funtor grupoide fundamental aplica equivalencias homotópicas en equivalencias de grupoides, se tiene que (σ,μ) es, en efecto, una equivalencia de grupos categóricos, (dado que un homomorfismo de grupos categóricos es una equivalencia de grupos categóricos si, y solamente si, es una equivalencia de grupoides, véase [25, Lema 1.12]).

Finalmente, como ya hemos comentado $\wp_{n-1}(G(X_\bullet,*))$ es un grupo categórico simétrico para $n-1\geq 2$, y entonces, puesto que (σ,μ) es una equivalencia de grupos categóricos trenzados en estos casos, entonces $\wp_n(X_\bullet,*)$ es también simétrico, para $n\geq 3$. ■

Señalemos que la condición de simetría de $\wp_n(X_\bullet,*)$, $n\geq 3$, no es demostrada en [9], aunque ésta puede abordarse usando los mismos métodos que en el citado trabajo. En todo caso, una demostración alternativa del carácter simétrico de $\wp_n(X_\bullet,*)$, $n\geq 3$, puede verse en [27].

Finalizamos este apartado con dos ejemplos, donde estudiamos otras relaciones de los grupos categóricos $\wp_n(X_\bullet,*)$ con construcciones ya conocidas.

Ejemplo 1.2.6. Supongamos $(X,*)$ un CW-complejo conexo y punteado. En [6] se define para cada $n \geq 3$, el n-grupo categórico estricto y simétrico del espacio $(X,*)$ por $\mathcal{C}_n(X,*) = \wp\Omega^{n-1}GS_*(X)$, donde $S_*(X)$ denota el complejo fibra en $*$ del complejo singular de X, $S(X)$. Es decir, en nuestra notación $S_*(X) = F(S(X),*)$.

El Teorema anterior nos dice entonces que se tienen equivalencias de grupos categóricos simétricos

$$\wp_n(S(X),*) \cong \mathcal{C}_n(X,*), \quad n \geq 3.$$

Señalamos que, a pesar del carácter no estricto de los grupos categóricos $\wp_n(S(X),*)$, sin embargo, estos son más fáciles de manejar, dado que sus elementos siguen siendo símplices y no elementos del grupo libre sobre ellos.

Otra construcción más clásica es debida a Whitehead, [60], que asocia al CW-complejo $(X,*)$ su *módulo cruzado de homotopía*

$$W(X,*) = \pi_2(X,X^1,*) \to \pi_1(X^1,*),$$

donde X^1 denota el 1-esqueleto de X. En [8, Proposición 2.2.4.] se demuestra que $W(X,*)$ es isomorfo al módulo cruzado asociado al grupo categórico $\wp GS_*(X)$. Entonces, por el Teorema 1.2.5, existe una equivalencia de grupos categóricos

$$\wp_1(S(X),*) \cong \mathbb{G}(W(X,*)),$$

donde $\mathbb{G}(W(X,*))$ es el grupo categórico asociado al módulo cruzado anterior (Ejemplo 1.1.4).

Ejemplo 1.2.7. La construcción de los grupos categóricos $\wp_n(X_\bullet,*)$ está también estrechamente relacionada con los invariantes cohomológicos de $X_\bullet$. Los casos $n = 1, 2$ se analizan en [9]. Supongamos ahora $n \geq 3$:

Sea $(X_\bullet,*)$ un complejo de Kan punteado (n-1)-conexo, es decir, $\pi_r(X_\bullet,*) = 0$, $0 \leq r \leq n-1$. Consideramos el subcomplejo minimal $(M_\bullet,*)$ retracto de deformación de $(X_\bullet,*)$. Entonces la inclusión induce una equivalencia de grupos categóricos simétricos $\wp_n(M_\bullet,*) \hookrightarrow \wp_n(X_\bullet,*)$. En este caso, $(M_\bullet,*)$ tiene sólo un r-símplex en dimensiones $0 \leq r \leq n-1$ y entonces el grafo de $\wp_n(M_\bullet,*)$ es

$$\begin{tikzcd}\pi_{n+1}(X_\bullet,*)\times\pi_n(X_\bullet,*) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & \pi_n(X_\bullet,*) \arrow[l, bend right, "1"']\end{tikzcd}, \tag{1.17}$$

donde $s = t$ =proyección e $1_A = (0, A)$. La composición es dada por la suma en $\pi_{n+1}(X_\bullet, *)$ y el producto tensor en objetos y morfismos es la suma en $\pi_n(X_\bullet, *)$ y en $\pi_{n+1}(X_\bullet, *) \times \pi_n(X_\bullet, *)$, respectivamente. Los isomorfismos de unidad a izquierda y derecha y los isomorfismos de asociatividad y conmutatividad serán pues pares $a_{A,B,C} = (h_{A,B,C}, A+B+C)$ y $c_{A,B} = (d_{A,B}, A+B)$, donde $h_{A,B,C} : \pi_n(X_\bullet, *)^3 \to \pi_{n+1}(X_\bullet, *)$ y $d_{A,B} : \pi_n(X_\bullet, *)^2 \to \pi_{n+1}(X_\bullet, *)$ son aplicaciones verificando las siguientes identidades:

i) $h_{B,C,D} + h_{A,B+C,D} + h_{A,B,C} = h_{A+B,C,D} + h_{A,B,C+D}$,

ii) $h_{A,B,C} + h_{B,C,A} + d_{A,B+C} = d_{A,C} + d_{A,B} + h_{B,C,A}$,

iii) $h_{C,A,B} + h_{A,B,C} + d_{B,C} = d_{A+B,C} + d_{A,C} + h_{A,C,B}$,

iv) $d_{A,B} + d_{B,A} = 0$,

que se obtienen al considerar el pentágono de coherencia para a (*i)*), los hexágonos de coherencia para a y c, (*ii), iii)*) y la condición de simetría sobre c (*iv)*).

Las condiciones *i), ii), iii)* expresan que el par (h, d) es un *3-cociclo abeliano* de $\pi_n(X_\bullet, *)$ con coeficientes en $\pi_{n+1}(X_\bullet, *)$, en el sentido de Eilenberg-MacLane [21],[41]. Su clase de cohomología no es otro que el primer invariante de Postnikov no nulo de $X_\bullet$: En efecto, este viene dado por un elemento de $H^{n+2}(K(\pi_n(X_\bullet), n), \pi_{n+1}(X_\bullet))$. Puesto que $n \geq 3$, el teorema de suspensión de Eilenberg-MacLane [21] establece un isomorfismo

$$H^{n+2}(K(\pi_n(X_\bullet), n), \pi_{n+1}(X_\bullet)) \cong H^5(K(\pi_n(X_\bullet), 3), \pi_{n+1}(X_\bullet))$$

y un monomorfismo

$$H^5(K(\pi_n(X_\bullet), 3), \pi_{n+1}(X_\bullet)) \hookrightarrow H^4(K(\pi_n(X_\bullet), 2), \pi_{n+1}(X_\bullet)) \cong H^3_{ab}(\pi_n(X_\bullet), \pi_{n+1}(X_\bullet)).$$

La condición *iv)* sobre (h, d) asegura según [23, Teorema 17.2] que su clase de cohomología está en la imagen del monomorfismo anterior y, en consecuencia, representa el invariante de Postnikov de $X_\bullet$.

Notemos, por otro lado, que si consideramos la función traza asociada al 3-cociclo (h, d), $q : \pi_n(X_\bullet) \to \pi_{n+1}(X_\bullet)$ dada por $q(x) = d(x, x)$, la condición *iv)* implica que q define un homomorfismo de $\pi_n(X_\bullet)$ en ${}_2\pi_{n+1}(X_\bullet)$, el subgrupo de $\pi_{n+1}(X_\bullet)$ formado por los elementos de orden 2. Este homomorfismo no es otro que el asociado por Sinh al grupo categórico simétrico $\wp_n(X_\bullet, *)$, de acuerdo a su teorema de clasificación de grupos categóricos simétricos [50].

1.3 Cohomología de Takeuchi-Ulbrich.

En este apartado recordamos la cohomología de Takeuchi-Ulbrich de complejos de cocadenas y complejos cosimpliciales de grupos categóricos simétricos [51], [52]. Esta última será básica para la definición de la cohomología con coeficientes en un grupo categórico simétrico.

Esta sección es puramente técnica y todos los resultados y construcciones que se estudian están dedicados a culminar con el Teorema de normalización, que será fundamental en el Capítulo 2 para demostrar el Teorema de representatividad homotópica (Teorema 2.3.10). Destacamos, en todo caso, la obtención de la sucesión exacta larga a partir de la sucesión exacta corta de complejos, (Definición 1.3.3), que nos viene a señalar como esta teoría de cohomología goza de propiedades análogas a la usual cohomología de complejos en una categoría abeliana.

En lo que sigue, para $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico denotaremos aditivamente el producto tensor en $\mathbb{A}$, el objeto unidad por 0 y hablaremos entonces de *objeto cero* y, para cada objeto P de $\mathbb{A}$, su inverso se denotará por $-P$ y, como es usual, se llamará el *opuesto* de P.

1.3.1 Cohomología de complejos de cocadenas.

Como es usual, cuando se trasladan definiciones, en las que intervienen identidades al contexto de grupos categóricos, estas identidades son sustituidas por isomorfismos naturales y, entonces, se establecen las adecuadas condiciones de coherencia. Con esta idea Ulbrich define el concepto de complejo de cocadenas de grupos categóricos simétricos como sigue:

Definición 1.3.1. *Un complejo de cocadenas de grupos categóricos simétricos $\mathcal{A} = (\mathbb{A}_n, \chi)$ consiste de una sucesión de grupos categóricos simétricos y homomorfismos entre ellos*

$$\mathcal{A} = \ \mathbb{A}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{A}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\partial_2} \cdots \longrightarrow \mathbb{A}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbb{A}_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \cdots , \tag{1.18}$$

junto con una familia de transformaciones monoidales $\chi = (\chi_n : \partial_{n+1}\partial_n \to 0)_{n\geq 0}$, donde 0 denota el homomorfismo constante 0 de $\mathbb{A}_n$ en $\mathbb{A}_{n+2}$ (u homomorfismo nulo en la terminología del Ejemplo 1.1.6), de forma que, para cada objeto P de $\mathbb{A}_n$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \partial^3 P \arrow[r, "\chi_{\partial P}"] \arrow[d, "\partial(\chi_P)"'] & 0 \arrow[d, equal] \\ \partial(0) \arrow[r, "\mu_0"'] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.19}$$

es conmutativo.

Los grupos de cohomología de un complejo $\mathcal{A} = (\mathbb{A}_n, \chi)$ se definen como sigue:

Un *n-cociclo*, $n \geq 0$, de $\mathcal{A}$ es un par (P, g) consistente de un objeto $P \in Obj(\mathbb{A}_n)$ y un morfismo $g : \partial P \to 0$ en $\mathbb{A}_{n+1}$ tal que verifica la *condición de cociclo*, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \partial^2(P) \arrow[r, "\partial(g)"] \arrow[d, "\chi_P"'] & \partial(0) \arrow[dl, "\mu_0"] \\ 0 & \end{tikzcd} \tag{1.20}$$

ha de ser conmutativo.

La categoría $Z^n(\mathcal{A})$ de n-cociclos tiene como objetos los n-cociclos y como morfismos, $f : (P, g) \to (Q, h)$, morfismos $f : P \to Q$ en $\mathbb{A}_n$ tal que $h \cdot \partial f = g$.

Esta categoría es también un grupo categórico simétrico, donde la suma en objetos se define por:

$$(P,g)+(Q,h)=\left(P+Q,\partial(P+Q)\xrightarrow{\mu^{-1}}\partial P+\partial Q\xrightarrow{g+h}0+0\xrightarrow{r_0}0\right)$$

y en morfismos como en $\mathbb{A}_n$. El objeto unidad es el cociclo $(0,\mu_0:\partial 0\to 0)$ y los isomorfismos de asociatividad, conmutatividad y unidad son dados como en $\mathbb{A}_n$.

Si denotamos por $\mathbf{Z}^n(\mathcal{A})$ al grupo abeliano de componentes conexas de $Z^n(\mathcal{A})$, este contiene como subgrupo al conjunto $\mathbf{B}^n(\mathcal{A})$ de elementos representados por los pares $(\delta(Q),\chi_Q)$, con $Q\in Obj(\mathbb{A}_{n-1})$ y $n\geq 1$, que llamaremos subgrupo de *n-cobordes*.

Entonces el *n-ésimo grupo de cohomología* del complejo $\mathcal{A}$ se define por:

$$H^n(\mathcal{A})=\mathbf{Z}^n(\mathcal{A})/\mathbf{B}^n(\mathcal{A}),\qquad n\geq 0,\qquad \text{con } \mathbf{B}^0(\mathcal{A})=0.$$

Una definición alternativa de estos grupos de cohomología puede verse en [52].

Notemos que estos grupos de cohomología coinciden con los grupos de cohomología usuales de un complejo de cocadenas de grupos abelianos, cuando estos son vistos como grupos categóricos discretos.

$H^n(-)$ define, para cada $n\geq 0$, un funtor desde la categoría de complejos de cocadenas de grupos categóricos simétricos en la categoría de grupos abelianos: Recordemos que un *homomorfismo* $(F,\theta):(\mathcal{A},\chi)\to(\mathcal{B},\chi')$ de complejos de cocadenas consiste de homomorfismos $F_n:\mathbb{A}_n\to\mathbb{B}_n$ y transformaciones monoidales

$$\theta=\theta_n:\partial F_n\Longrightarrow F_{n+1}\partial,\qquad n\geq 0,$$

tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $n\geq 0$:

$$\begin{tikzcd}
\partial^2 F_n \arrow[r, "\partial\theta"] \arrow[d, "\chi'"'] & \partial F_{n+1}\partial \arrow[r, "\theta\partial"] & F_{n+2}\partial^2 \arrow[d, "F_{n+2}(\chi)"] \\
0 & & F_{n+2}(0) \arrow[ll, "\mu_0"]
\end{tikzcd} \tag{1.21}$$

La conmutatividad de este diagrama permite demostrar que para todo n-cociclo (P,g) de $Z^n(\mathcal{A})$, el par

$$F_*(P,g)=(F_n(P),\mu_0\cdot F_{n+1}(g)\cdot(\theta_n)_P) \tag{1.22}$$

es un n-cociclo de $\mathcal{B}$ y se tiene entonces un funtor, para cada $n \geq 0$,

$$F_* : Z^n(\mathcal{A}) \to Z^n(\mathcal{B}),$$

que en morfismos viene dado por $F_*(f : (P, g) \to (P', g')) = F_n(f)$. Este funtor es además un homomorfismo de grupos categóricos donde $\mu : F_*(P, g) + F_*(P', g') \to F_*((P, g) + (P', g'))$ y $\mu_0 : F_*(0, \mu_0) \to (0, \mu_0)$ son dadas justamente por los correspondientes de F_n.

Por tanto, se induce un homomorfismo entre los grupos abelianos de componentes conexas de n-cociclos, $F_* : \mathbf{Z}^n(\mathcal{A}) \to \mathbf{Z}^n(\mathcal{B})$, para cada $n \geq 0$. Este homomorfismo aplica el subgrupo de n-cobordes $\mathbf{B}^n(\mathcal{A})$ en $\mathbf{B}^n(\mathcal{B})$, puesto que, para cada Q objeto de $\mathbb{A}_{n-1}$, $\theta_{n-1} : \partial F_{n-1}Q \to F_n\partial Q$ define un morfismo

$$(\partial F_{n-1}Q, \chi'_{F_{n-1}Q}) \to F_*(\partial Q, \chi_Q) = (F_n\partial Q, \mu_0 \cdot F_{n+1}(\chi_Q) \cdot \theta)$$

en $Z^n(\mathcal{B})$, como consecuencia de la conmutatividad de (1.21).

Entonces $H^n(F, \theta) = F_*$ es el homomorfismo inducido entre los correspondientes grupos cocientes, esto es,

$$H^n(F, \theta) = F_* : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B}), \qquad [(P, g)] \mapsto [F_*(P, g)]$$

para todo $n \geq 0$, y donde $[(P, g)]$ denota la clase del n-cociclo (P, g) en el cociente.

Estos funtores de n-cohomología verifican la siguiente propiedad de "aditividad"

$$H^n((F, \theta) + (G, \theta')) = H^n(F, \theta) + H^n(G, \theta'), \qquad n \geq 0, \tag{1.23}$$

donde la suma en el segundo miembro es la usual de homomorfismos de grupos abelianos, mientras que la suma $(F, \theta) + (G, \theta')$ de homomorfismos $(F, \theta), (G, \theta') : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es definida como $F_n + G_n$ (suma en $\underline{Hom}(\mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n)$ como en el Ejemplo 1.1.6) en cada dimensión y con transformaciones monoidales $\theta''_n : \partial(F_n + G_n) \Rightarrow (F_{n+1} + G_{n+1})\partial$ definida, para cada P objeto de $\mathbb{A}_n$ y $n \geq 0$, por la conmutatividad del diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\partial(F_n+G_n)(P)=\partial(F_n(P)+G_n(P)) \arrow[r, "\mu^{-1}"] \arrow[dr, "\theta''_P\cdot\mu"'] & \partial F_n(P)+\partial G_n(P) \arrow[d, "\theta_P+\theta'_P"] \\
& F_{n+1}\partial P+G_{n+1}\partial P = \\
& =(F_{n+1}+G_{n+1})\partial P
\end{tikzcd}
$$

Otra analogía de esta cohomología con la usual de complejos de cocadenas en una categoría abeliana es la existencia de una sucesión exacta larga asociada a una sucesión exacta corta de complejos.

La noción de sucesión exacta corta de grupos categóricos simétricos que consideramos es la dada en [10], que en [47] se denomina extensión cofibrada de grupos categóricos, en nuestro caso, simétricos. (Otra noción más general de sucesión exacta corta de grupos categóricos simétricos puede verse en [59]).

Recordemos, previamente, que una *fibración* de grupoides es un funtor $F:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ tal que para cada objeto P de $\mathbb{A}$ y para cada morfismo $g:F(P)\to Q$ existe un morfismo $f:P\to P'$ con $F(f)=g$.

Definición 1.3.2. *Una sucesión de homomorfismos de grupos categóricos simétricos*

$$\mathbb{A}\xrightarrow{j}\mathbb{B}\xrightarrow{q}\mathbb{C}$$

decimos que es exacta corta si 1) q es fibración esencialmente sobreyectiva, 2) $q\cdot j$ es el homomorfismo nulo y 3) $j:\mathbb{A}\to q^{-1}(0)$ es una equivalencia de categorías, siendo $q^{-1}(0)$ la fibra de q en el objeto 0 de $\mathbb{C}$; esto es, la subcategoría de $\mathbb{B}$ cuyos objetos se aplican, por q, en 0 y los morfismos se aplican en la identidad en 0.

Definición 1.3.3. *Una sucesión de complejos de cocadenas de grupos categóricos simétricos y homomorfismos*

$$(\mathcal{A},\chi')\xrightarrow{(j,\theta)}(\mathcal{B},\chi)\xrightarrow{(q,\theta')}(\mathcal{C},\chi'')$$

decimos que es exacta corta si, para cada $n\geq 0$: 1) $\mathbb{A}_n\xrightarrow{j_n}\mathbb{B}_n\xrightarrow{q_n}\mathbb{C}_n$ es *una sucesión exacta corta y 2) el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_n \arrow[r, "j_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & \mathbb{B}_n \arrow[r, "q_n"] \arrow[d, "\partial_n"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\theta_n"] & \mathbb{C}_n \arrow[d, "\partial_n"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\theta'_n"] \\ \mathbb{A}_{n+1} \arrow[r, "j_{n+1}"'] & \mathbb{B}_{n+1} \arrow[r, "q_{n+1}"'] & \mathbb{C}_{n+1} \end{tikzcd}$$

es un morfismo de sucesiones exactas cortas de grupos categóricos simétricos, o equivalentemente, para cada objeto P de $\mathbb{A}_n$, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} q_{n+1}\partial_n j_n(P) \arrow[r, "q_{n+1}(\theta_P)"] & q_{n+1}j_{n+1}\partial_n(P) = 0 \\ \partial_n q_n j_n(P) = \partial_n(0) \arrow[u, "\theta'_{j_nP}"] \arrow[ur, "\mu_0"'] & \end{tikzcd} \tag{1.24}$$

Teorema 1.3.4. *Dada una sucesión exacta corta*

$$(\mathcal{A}, \chi') \xrightarrow{(j,\theta)} (\mathcal{B}, \chi) \xrightarrow{(q,\theta')} (\mathcal{C}, \chi'')$$

de complejos de cocadenas de grupos categóricos simétricos, existe un homomorfismo de grupos

$$w_n : H^n(\mathcal{C}) \to H^{n+1}(\mathcal{A}), \qquad n \geq 0,$$

el morfismo de conexión, tal que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{H^n(j,\theta)} H^n(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^n(q,\theta)} H^n(\mathcal{C}) \xrightarrow{w_n} H^{n+1}(\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Demostración.

Definimos w_n primero sobre cociclos: Sea $(P, g : \partial_n(P) \to 0) \in Z^n(\mathcal{C})$. Usando que q_n es esencialmente sobreyectivo, elegimos un objeto Q de $\mathbb{B}_n$ y un morfismo $f : q_n(Q) \to P$ en $\mathbb{C}_n$.

Considerando la composición $q_{n+1}\partial_n(Q) \xrightarrow{(\theta')_n^{-1}} \partial_n q_n(Q) \xrightarrow{\partial_n f} \partial_n(P) \xrightarrow{g} 0$, y puesto que q_{n+1} es fibración, existirá un morfismo $\widetilde{g} : \partial_n(Q) \to R$ en $\mathbb{B}_{n+1}$ tal que $q_{n+1}(\widetilde{g}) = g \cdot \partial_n f \cdot (\theta'_n)^{-1}$. En particular, $q_{n+1}(R) \in Obj(q_{n+1}(0)^{-1})$ y puesto que $j_{n+1} : \mathbb{A}_{n+1} \to q_{n+1}(0)^{-1}$ es una equivalencia, existirá un objeto

$A = A_{(P,g)} \in Obj(\mathbb{A}_{n+1})$ y un morfismo $b : j_{n+1}(A_{(P,g)}) \to R$, con $q_{n+1}(b) = id_0$.

Sea $\widetilde{b} = \widetilde{g}^{-1} \cdot b : j_{n+1}(A_{(p,g)}) \to \partial_n(Q)$. Usando que j_{n+1} es fiel y pleno, definimos $a_{(P,g)} : \partial_{n+1}(A) \to 0$ como el único morfismo en $\mathbb{A}_{n+2}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial j_{n+1}(A) \arrow[rr, "\partial\widetilde{b}"] \arrow[d, "\theta"'] & & \partial^2(Q) \arrow[d, "\chi_Q"] \\
j_{n+2}\partial(A) \arrow[r, "j_{n+2}(a_{(P,g)})"'] & j_{n+2}(0) \arrow[r, "\mu_0"'] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.25}$$

es conmutativo.

Obtenemos así un par $(A_{(P,g)}, a_{(P,g)} : \partial_{n+1}(A_{(P,g)}) \to 0)$ que resulta ser un $(n+1)$-cociclo del complejo $(\mathcal{A}, \chi')$. En efecto, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial^2 j_{n+1}(A) \arrow[rrrr, "\partial^2\widetilde{b}"] \arrow[dr, "\chi_{j_{n+1}(A)}"'] \arrow[dddd, "\partial\theta"'] & & & & \partial^3(Q) \arrow[dlll, "\chi_{\partial Q}"] \arrow[dddd, "\partial\chi_Q"] \\
& 0 & ① & & \\
& j_{n+3}(0) \arrow[u, "\mu_0"] & & ③ & \\
② & j_{n+3}\partial^2 A \arrow[u, "j_{n+3}(\chi_A)"] \arrow[r, "j_{n+3}\partial a_{(P,g)}"'] & j_{n+3}\partial(0) \arrow[ul, "j_{n+3}(\mu_0)"'] & ⑤ & \\
\partial j_{n+2}\partial(A) \arrow[ur, "\theta"] \arrow[rrr, "\partial j_{n+2}a_{(P,g)}"'] & & ⑥ & \partial j_{n+2}(0) \arrow[ul, "\theta"'] \arrow[r, "\partial\mu_0"'] & \partial 0 \arrow[uuulll, "\mu_0"]
\end{tikzcd}$$

donde ① es conmutativo por la naturalidad de χ aplicada al morfismo $\widetilde{b}$, ② por ser el correspondiente diagrama de coherencia (1.21) de (j, θ), ③ es el diagrama (1.19) de coherencia del complejo $\mathcal{B}$, ⑤ lo es por la condición de coherencia de la transformación monoidal θ_{n+2} con respecto al objeto unidad y ⑥ es conmutativo por la naturalidad de θ_{n+2} aplicada sobre $a_{(P,g)}$. Puesto que el diagrama exterior es conmutativo, pues es el resultado de aplicar ∂_{n+2} a (1.25), obtenemos que el triángulo interior ④ ha de ser conmutativo. Ya que j_{n+3} es un funtor fiel, deducimos la condición de cociclo sobre $(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})$.

La construcción de $(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})$ depende de la elección de $Q, f, \widetilde{g}, R, A_{(P,g)}$ y b. Sean $Q' \in Obj(\mathbb{B}_n)$, $f' : q_n(Q') \to P$ en $\mathbb{C}_n$,

$\widetilde{g}' : \partial_n Q' \to R'$ y $b' : j_{n+1}(A'_{(P,g)}) \to R'$ en $\mathbb{B}_{n+1}$, otra elección como anteriormente, y sea $(A'_{(P,g)}, a'_{(P,g)})$ el $(n+1)$-cociclo que se obtiene.

Considerando la composición $q_n(Q) \xrightarrow{f} P \xrightarrow{(f')^{-1}} q_n(Q')$, existirá un objeto $\widetilde{A}$ de $\mathbb{A}_n$ y un morfismo $u : Q \to j_n(\widetilde{A}) + Q'$ en $\mathbb{B}_n$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
q_n(Q) \arrow[r, "q_n(u)"] \arrow[d, "(f')^{-1}\cdot f"'] & q_n(j_n(\widetilde{A}) + Q') \\
q_n(Q') & 0 + q_n(Q') \arrow[l, "l"] \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo (véase [10, Proposición 3.2]). Definimos

$$s : A_{(P,g)} \to \partial_n(\widetilde{A}) + A'_{(P,g)}$$

como el único morfismo en $\mathbb{A}_{n+1}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
j_{n+1}(A) \arrow[r, "\widetilde{b}"] \arrow[dd, "j_{n+1}(s)"'] & \partial_n Q \arrow[r, "\partial_n(u)"] & \partial_n(j_n(\widetilde{A}) + Q') \\
 & & \partial_n j_n(\widetilde{A}) + \partial_n Q' \arrow[u, "\mu"'] \\
j_{n+1}(\partial_n \widetilde{A} + A') & & j_{n+1}\partial_n \widetilde{A} + j_{n+1}(A') \arrow[ll, "\mu"] \arrow[u, "\theta^{-1}+\widetilde{b}'"']
\end{tikzcd} \tag{1.26}$$

es conmutativo. Este morfismo define un morfismo de $(n+1)$-cociclos en $Z^{n+1}(\mathcal{A}, \chi')$,

$$s : (A_{(P,g)}, a_{(P,g)}) \to (\partial_n \widetilde{A}, \chi'_{\widetilde{A}}) + (A'_{(P,g)}, a'_{(P,g)})$$

y así $(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})$ y $(A'_{(P,g)}, a'_{(P,g)})$ definen el mismo elemento en $H^{n+1}(\mathcal{A})$. Por otro lado, no es difícil ver que si $[(P,g)] = [(P',g')]$, entonces también $[(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})] = [(A_{(P',g')}, a_{(P',g')})]$ y entonces definimos

$$w_n : H^n(\mathcal{C}) \to H^{n+1}(\mathcal{A}), \qquad n \geq 0,$$

por $w_n([(P,g)]) = [(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})]$.

Veamos ahora que w_n es un homomorfismo de grupos. Consideremos $[(P,g)], [(P',g')] \in H^n(\mathcal{C})$. Elegimos Q y Q' objetos de $\mathbb{B}_n$,

$f : q_n(Q) \to P$, $f' : q_n(Q') \to P'$ en $\mathbb{C}_n$, $\widetilde{g} : \partial_n(Q) \to R$, $\widetilde{g}' : \partial_n(Q') \to R'$ en $\mathbb{B}_{n+1}$ y $b : j_{n+1}(A_{(P,g)}) \to R$, $b' : j_{n+1}(A_{(P',g')}) \to R'$ en $\mathbb{B}_{n+1}$, de forma que $w_n[(P,g)] = [(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})]$ y $w_n[(P',g')] = [(A_{(P',g')}, a_{(P',g')})]$, donde $a_{(P,g)}$ y $a_{(P',g')}$ son dados por la conmutatividad de (1.25).

Puesto que $(P,g) + (P',g') = (P + P', r_0 \cdot (g + g') \cdot \mu^{-1})$, considerando la composición $q_n(Q+Q') \xrightarrow{\mu^{-1}} q_n(Q) + q_n(Q') \xrightarrow{f+f'} P + P'$, elegimos $\widetilde{g}'' : \partial_n(Q+Q') \to R''$ tal que $q_{n+1}(\widetilde{g}'')$ es dado por la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
\partial q_n(Q+Q') \arrow[ddd, "\theta'"'] & \partial(q_n(Q)+q_n(Q')) \arrow[l, "\partial\mu"'] \arrow[r, "\partial(f+f')"] & \partial(P+P') \\
 & & \partial P + \partial P' \arrow[u, "\mu"'] \arrow[d, "g+g'"] \\
 & & 0+0 \arrow[d, "r_0"] \\
q_{n+1}\partial(Q+Q') \arrow[rr, "q_{n+1}(\widetilde{g}'')"'] & & 0
\end{tikzcd} \tag{1.27}$$

entonces, $w([(P,g)] + [(P',g')]) = [A_{(P,g)+(P',g')}, a_{(P,g)+(P',g')}]$, donde $a_{(P,g)+(P',g')}$ es dado por la conmutatividad de (1.25) una vez elegido $A_{(P,g)+(P',g')}$ en $\mathbb{A}_{n+1}$ y $b'' : j_{n+1}(A_{(P,g)+(P',g')}) \to R''$ en $\mathbb{B}_{n+1}$.

Definimos $h : A_{(P,g)+(P',g')} \to A_{(P,g)} + A_{(P',g')}$ como el único morfismo en $\mathbb{A}_{n+1}$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial(Q+Q') & j_{n+1}(A_{(P,g)+(P',g')}) \arrow[l, "\widetilde{b''}"'] \arrow[dr, "j_{n+1}(h)"] & \\
 & & j_{n+1}(A_{(P,g)} + A_{(P',g')}) \\
\partial Q + \partial Q' \arrow[uu, "\mu"] & j_{n+1}(A_{(P,g)}) + j_{n+1}(A_{(P',g')}) \arrow[l, "\widetilde{b}+\widetilde{b'}"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Tenemos entonces un morfismo en $Z^{n+1}(\mathcal{A})$

$$h : (A_{(P,g)+(P',g')}, a_{(P,g)+(P',g')}) \to (A_{(P,g)}, a_{(P,g)}) + (A_{(P',g')}, a_{(P',g')})$$

y así

$$w_n([(P,g) + (P',g')]) = w_n([(P,g)]) + w_n([(P',g')]).$$

Finalmente, veamos la exactitud de la sucesión en cohomología:

Sea $(B,g) \in Z^n(\mathcal{B})$, entonces $q_*([(B,g)]) = [(q_n(B), q_*(g)]$, donde $q_*(g)$ es dado por la composición $\partial_n q_n(B) \xrightarrow{\theta'_n} q_{n+1}\partial_n B \xrightarrow{q_{n+1}(g)} q_{n+1}(0) \xrightarrow{\mu_0} 0$, (véase 1.22). Para calcular $w_n(q_*([(B,g)])) = w_n([(q_n(B), q_*(g))])$, tomamos $Q = B$ y $f = id_{q_n(B)}$ y entonces $\widetilde{g} : \partial_n(B) \to R$ (que en este caso verifica que $q_{n+1}(\widetilde{g}) = \mu_0 \cdot q_{n+1}(g)$), $A_{(q_n(B),q_*(g))} \in Obj(\mathbb{A}_{n+1})$ y $b : j_{n+1}(A_{(q_n(B),q_*(g))}) \to R$ en $\mathbb{B}_{n+1}$, de forma que $w_n q_*([(B,g)]) = [A_{(q_n(B),q_*(g))}, a_{(q_n(B),q_*(g))}]$ donde $a_{(q_n(B),q_*(g))}$ es dado por la conmutatividad de (1.25).

Usando de nuevo que j_{n+1} es un funtor fiel, existirá un único morfismo $s : A_{(q_n(B),q_*(g))} \to 0$ en $\mathbb{A}_{n+1}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
j_{n+1}(A_{(q_n(B),q_*(g))}) \arrow[r, "\widetilde{g}^{-1}\cdot b"] \arrow[d, "j_{n+1}(s)"'] & \partial_n(B) \arrow[d, "g"] \\
j_{n+1}(0) \arrow[r, "\mu_0"'] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.28}$$

es conmutativo. Entonces también es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\partial_{n+1}(A_{(q_n(B),q_*(g))}) \arrow[r, "a_{(q_n(B),q_*(g))}"] \arrow[d, "\partial_{n+1}(s)"'] & 0 \\
\partial_{n+1}(0) \arrow[ur, "\mu_0"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.29}$$

pues aplicando ∂_{n+1} sobre (1.28), la parte exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial j_{n+1}(A) \arrow[rrrr, "\partial(\widetilde{g}^{-1}b)"] \arrow[dr, "\theta"] \arrow[ddd, "\partial j_{n+1}(s)"'] & & & & \partial^2(B) \arrow[dl, "\chi"'] \arrow[ddd, "\partial g"] \\
& j_{n+2}\partial(A) \arrow[r, "j_{n+2}(a)"] \arrow[d, "j_{n+2}\partial(s)"'] \arrow[dl, phantom, "②"] & j_{n+2}(0) \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[u, phantom, "①"] & 0 \arrow[r, phantom, "④"] & \\
& j_{n+2}\partial(0) \arrow[ur, "j_{n+2}(\mu_0)"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "③"] \arrow[rr, phantom, "⑤"] & & & \\
\partial j_{n+1}(0) \arrow[ur, "\theta"'] \arrow[rrrr, "\partial\mu_0"'] & & & & \partial 0 \arrow[uul, "\mu_0"]
\end{tikzcd}$$

es también conmutativo, donde hemos denotado a $A_{(q_n(B),q_*(g))}$ y $a_{(q_n(B),q_*(g))}$ mediante A y a, respectivamente, por simplicidad. Ahora ① es conmutativo por la definición de $a_{(q_n(B),q_*(g))}$ (1.25), ② por naturalidad de θ, ④ por la condición de cociclo de g y ⑤ por coherencia. Se obtiene pues la conmutatividad de ③, que es equivalente, usando que j_{n+2} es fiel, a la conmutatividad de (1.29). Consecuentemente $s : (A_{(q_n(B),q_*(g))}, a_{(q_n(B),q_*(g))}) \to (0, \mu_0)$ es un morfismo de cociclos y $w_n q_*([(B,g)]) = 0$.

Sea $[(P,g)] \in H^n(\mathcal{C})$ un elemento tal que $w_n([(P,g)]) = [(A_{(P,g)}, a_{(P,g)})] = [(0,\mu_0)]$. Existirá un objeto A' de $\mathbb{A}_n$ y un morfismo de $(n+1)$-cociclos

$$t : (A_{(P,g)}, a_{(P,g)}) + (\partial_n A', \chi'_{A'}) \to (0, \mu_0),$$

es decir, un morfismo $t : A_{(P,g)} + \partial_n A' \to 0$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial(A_{(P,g)} + \partial A') \arrow[d, "\partial(t)"'] & \partial(A_{(P,g)}) + \partial^2(A') \arrow[l, "\mu"'] \arrow[r, "a_{(P,g)}+\chi'_{A'}"] & 0+0 \arrow[d, "r"] \\
\partial(0) \arrow[rr, "\mu_0"'] & & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Definimos $c : \partial_n(Q + j_n(A')) \to 0$ por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\partial(Q + j_n(A')) \arrow[d, "c"'] & \partial Q + \partial j_n(A') \arrow[l, "\mu"'] \arrow[r, "\widetilde{b}^{-1}+\theta"] & j_{n+1}(A_{(P,g)}) + j_{n+1}\partial(A') \arrow[d, "\mu"] \\
0 & j_{n+1}(0) \arrow[l, "\mu_0"] & j_{n+1}(A_{(P,g)} + \partial A') \arrow[l, "j_{n+1}(t)"]
\end{tikzcd}$$

donde Q, $\widetilde{b}$ son los elegidos para el cálculo de $w_n([(P,g)])$. Entonces $(Q + j_n(A'), c)$ es un n-cociclo en $\mathcal{B}$ y la composición

$$q_n(Q + j_n(A')) \xrightarrow{\mu^{-1}} q_n(Q) + 0 \xrightarrow{f+1} P + 0 \xrightarrow{r} P\ ,$$

define un morfismo de cociclos desde $q_*(Q + j_n(A'), c)$ en (P, g). Esto es, $[(P,g)] = q_*([(Q + j_n(A'), c)])$ y se tiene la exactitud en $H^n(\mathcal{C})$.

La exactitud en $H^n(\mathcal{B})$ y $H^{n+1}(\mathcal{A})$ se demuestra de forma análoga. ∎

Nos ocupamos ahora de estudiar cuándo dos morfismos de complejos inducen el mismo homomorfismo en los grupos de cohomología, esto es, de concretar el concepto de morfismos de complejos homotópicamente equivalentes.

Proposición 1.3.5. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos complejos de cocadenas de grupos categóricos simétricos y supongamos dada una familia de homomorfismos de grupos categóricos simétricos $R = (R_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathbb{B}_n)_{n\geq 0}$*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} = & \mathbb{A}_0 \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{A}_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "R_0"] & \mathbb{A}_2 \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "R_1"] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{A}_n \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{A}_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "R_n"] & \cdots \\
\mathcal{B} = & \mathbb{B}_0 \arrow[r, "\partial"'] & \mathbb{B}_1 \arrow[r, "\partial"'] & \mathbb{B}_2 \arrow[r, "\partial"'] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{B}_n \arrow[r, "\partial"'] & \mathbb{B}_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{1.30}$$

Entonces R tiene asociado un homomorfismo de complejos $(\widetilde{R}, \widetilde{\theta}) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que $H^n(\widetilde{R}, \widetilde{\theta}) = 0 : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B})$, para todo $n \geq 0$.

Demostración.

Definimos $\widetilde{R}_0 = R_0\partial_0 : \mathbb{A}_0 \to \mathbb{B}_0$ y $\widetilde{R}_n = R_n\partial_n + \partial_{n-1}R_{n-1} : \mathbb{A}_n \to \mathbb{B}_n$, para $n \geq 1$.

En cuanto a $\widetilde{\theta} = \left(\widetilde{\theta}_n : \partial\widetilde{R}_n \Rightarrow \widetilde{R}_{n+1}\partial\right)_{n\geq 0}$, definimos $\widetilde{\theta}_0 : \partial\widetilde{R}_0 \Rightarrow \widetilde{R}_1\partial$, para cada objeto P de $\mathbb{A}_0$, por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\partial\widetilde{R}_0(P) = \partial R_0\partial(P) \arrow[d, "(\widetilde{\theta}_0)_P"'] & & 0 + \partial R_0\partial(P) \arrow[ll, "l"'] \\
\widetilde{R}_1\partial(P) = R_1\partial^2(P) + \partial R_0\partial(P) \arrow[rr, "R_1(\chi_P)+1"'] & & R_1(0) + \partial R_0\partial(P) \arrow[u, "\mu_0+1"']
\end{tikzcd}$$

y para $n \geq 1$, $\widetilde{\theta}_n : \partial\widetilde{R}_n \Rightarrow \widetilde{R}_{n+1}\partial$ es dado, para cada objeto P de $\mathbb{A}_n$, por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\partial\widetilde{R}_n(P)=\partial(R_n\partial(P)+\partial R_{n-1}(P)) \arrow[r, "\mu^{-1}"] \arrow[dd, dotted, "(\widetilde{\theta}_n)_P"'] & \partial R_n\partial(P)+\partial^2 R_{n-1}(P) \arrow[r, "1+\chi_{R_{n+1}(P)}"] & \partial R_n\partial(P)+0 \arrow[d, "r"] \\
 & & \partial R_n\partial(P) \\
\widetilde{R}_{n+1}\partial(P)=R_{n+1}\partial^2(P)+\partial R_n\partial(P) \arrow[r, "R_{n+1}(\chi_P)+1"'] & R_{n+1}(0)+\partial R_n\partial(P) \arrow[r, "\mu_0+1"'] & 0+\partial R_n\partial(P) \arrow[u, "l"']
\end{tikzcd}$$

Entonces, es fácil, aunque laborioso, demostrar que los diagramas (1.21) son conmutativos y, por tanto, $(\widetilde{R}, \widetilde{\theta}) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo de complejos.

Supongamos $n \geq 1$ y $(P, g) \in Z^n(\mathcal{A})$, el n-cociclo en $\mathcal{B}$ inducido por $\widetilde{R}$ es según (1.22)

$$\widetilde{R}_*(P, g) = (R_n\partial(P) + \partial R_{n-1}(P), \mu_0 \cdot (R_{n+1}\partial(g) + \partial R_n(g)) \cdot (\widetilde{\theta}_n)_P).$$

Ahora, a partir de la condición de cociclo sobre (P, g), así como de la definición $\widetilde{\theta}_n$, deducimos que $\widetilde{R}_*(P, g)$ es suma de dos n-cociclos en $\mathcal{B}$: El n-cociclo $(R_n\partial P, \partial R_n\partial P \xrightarrow{\partial R_n(g)} \partial R_n(0) \xrightarrow{\mu_0} 0)$ y el n-cociclo $(\partial R_{n-1}P, \partial^2 R_{n-1}(P) \xrightarrow{\chi_{R_{n-1}P}} 0)$. El primero es claramente isomorfo, en $Z^n(\mathcal{B})$, al n-cociclo $(R_n(0), \mu_0 : \partial R_n(0) \to 0)$ por el morfismo $R_n g : R_n\partial P \to R_n(0)$, y entonces también isomorfo a $(0, \mu_0 : \partial 0 \to 0)$; así su clase de cohomología es nula.

El segundo es un coborde en $Z^n(\mathcal{B})$ y entonces también es nula su clase de cohomología. Consecuentemente, $H^n(\widetilde{R}, \widetilde{\theta})[(P, g)] = 0$.

Para $n = 0$ y (P, g) un 0-cociclo en $Z^0(\mathcal{A})$ $\widetilde{R}_*(P, g) = (R_0\partial P, \mu_0 \cdot (R_1\partial g + \partial R_0(g)) \cdot (\widetilde{\theta}_0)_P)$, quien, de nuevo por la condición de cociclo y la definición de $\widetilde{\theta}_0$, es isomorfo, por $R_0(g) : R_0\partial(P) \to R_0(0)$, al 0-cociclo $(R_0(0), \mu_0)$ y entonces, como anteriormente, su clase en $H^0(\mathcal{B})$ es nula, lo que acaba la demostración.

■

Establecemos entonces la siguiente definición:

Definición 1.3.6. *Dos homomorfismos $(F, \theta), (F', \theta') : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de complejos se dicen equivalentes si existe una familia de transformaciones monoidales $\nu = (\nu_n : F_n \Rightarrow F'_n)_{n \geq 0}$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} (\partial F_n)(P) \arrow[r, "\partial((\nu_n)_P)"] \arrow[d, "\theta_n"'] & (\partial F'_n)(P) \arrow[d, "\theta'_n"] \\ F_{n+1}\partial(P) \arrow[r, "(\nu_{n+1}\partial)_P"'] & F'_{n+1}\partial(P) \end{tikzcd} \tag{1.31}$$

es conmutativo, para todo objeto P de $\mathbb{A}_n$ y $n \geq 0$.

Dos homomorfismos $(F, \theta), (G, \theta) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ diremos que son homotópicamente equivalentes si existe una familia de homomorfismos

$R = (R_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathbb{B}_n)_{n \geq 0}$ *tal que* (F, θ) *y* $(G, \theta) + (\widetilde{R}, \widetilde{\theta})$ *son equivalentes, donde* $(\widetilde{R}, \widetilde{\theta}) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *es el homomorfismo asociado a* R *de la Proposición anterior.*

Tenemos entonces:

Teorema 1.3.7.

i. Si $(F, \theta), (F', \theta') : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *son equivalentes, entonces*

$$H^n(F, \theta) = H^n(F', \theta') : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B}), \qquad n \geq 0.$$

ii. Si $(F, \theta), (G, \theta) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *son homotópicamente equivalentes, entonces también se tiene*

$$H^n(F) = H^n(G) : H^n(\mathcal{A}) \to H^n(\mathcal{B}), \qquad n \geq 0.$$

Demostración.

i. Sea $\nu = (\nu_n : F_n \to F'_n)_{n \geq 0}$ la familia de transformaciones monoidales que establece la equivalencia entre (F, θ) y (F', θ') y sea $(P, g) \in Z^n(\mathcal{A})$, un n-cociclo. En el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \partial F_n(P) \arrow[rr, "\partial(\nu_n)_P"] \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[dd, dotted, "F_*(g)"' near end] & & \partial F'_n(P) \arrow[dl, "\theta'"'] \arrow[dd, "F'_*(g)"] \\
F_{n+1}\partial(P) \arrow[rr, "(\nu_{n+1})_{\partial P}" near end] \arrow[dd, "F_{n+1}(g)"'] & & F'_{n+1}\partial(P) \arrow[dd, "F'_{n+1}(g)"' near start] & \\
& 0 \arrow[rr, equal] & & 0 \\
F_{n+1}(0) \arrow[rr, "(\nu_{n+1})_0"'] \arrow[ur, dotted, "\mu_0"] & & F'_{n+1}(0) \arrow[ur, "\mu_0"'] &
\end{tikzcd}$$

la cara superior es el diagrama (1.31), las caras laterales (izquierda y derecha) se corresponden con las definiciones de $F_*(g)$ y $F'_*(g)$ (1.22) y la cara frontal y la inferior son conmutativos por naturalidad. Consecuentemente, también es conmutativa la cara posterior o, equivalentemente, $(\nu_n)_P : F_n(P) \to F'_n(P)$ define un morfismo en $Z^n(\mathcal{B})$ entre $F_*(P, g)$ y $F'_*(P, g)$ y así

$$H^n(F, \theta)[(P, g)] = H^n(F', \theta')[(P, g)].$$

Ahora, teniendo en cuenta la Proposición 1.3.5, así como la identidad (1.23), *ii* es consecuencia directa de *i*. ■

1.3.2 Cohomología de complejos simpliciales.

Un complejo *cosimplicial de grupos categóricos simétricos* es un diagrama de grupos categóricos simétricos y homomorfismos entre ellos

$$\mathbb{A}_\bullet \;=\; \begin{tikzcd} \mathbb{A}_0 \arrow[r, shift left, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_1"'] & \mathbb{A}_1 \arrow[l, bend right=60, "\delta_0"'] \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\varepsilon_2"'] & \mathbb{A}_2 \arrow[l, bend right=40, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=70, "\delta_1"'] \arrow[r, shift left=3, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "\varepsilon_3"'] & \mathbb{A}_3 \arrow[l, bend right=30, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=55] \arrow[l, bend right=80, "\delta_2"'] & \cdots \end{tikzcd} \tag{1.32}$$

verificando las *identidades cosimpliciales* usuales [1]:

i) $\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}\varepsilon_i \qquad i \leq j$

ii) $\delta_j\delta_i = \delta_{i-1}\delta_j \qquad i > j$

iii) $\delta_j\varepsilon_i = \varepsilon_i\delta_{j-1} \qquad i < j$

$\delta_j\varepsilon_j = \delta_j\varepsilon_{j+1} = 1$

$\delta_j\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}\delta_j \qquad i > j+1$

Estos complejos son un caso particular de los complejos semicosimpliciales considerados por Takeuchi-Ulbrich en [51], donde no se consideran los morfismos δ_i y las identidades en **i)** se sustituyen por transformaciones monoidales con el correspondiente axioma de coherencia. En el trabajo citado se demuestra un teorema de coherencia que permite construir un complejo de cocadenas de grupos categóricos simétricos, $(\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet), \chi)$, como en (1.18), verificando la conmutatividad de (1.19), por medio de la fórmula usual del operador coborde. Esto es,

$$\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet) = \mathbb{A}_0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\partial} \cdots \longrightarrow \mathbb{A}_n \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}_{n+1} \xrightarrow{\partial} \cdots, \tag{1.33}$$

donde $\partial_n : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_{n+1}$ viene dado por

$$\partial_n(P) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \,\varepsilon_i(P), \tag{1.34}$$

para cada objeto P de $\mathbb{A}_n$ y de forma análoga se define para morfismos. Las transformaciones monoidales $\chi_n : \partial^2 \Rightarrow 0$ se construyen a partir de los isomorfismos canónicos en cada $\mathbb{A}_n$. Entonces:

Definición 1.3.8. *Sea $\mathbb{A}_\bullet$ un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos. Se definen los grupos de cohomología de $\mathbb{A}_\bullet$ como los grupos de cohomología del complejo de cocadenas $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$, construido a partir de él, esto es,*

$$H^n(\mathbb{A}_\bullet) = H^n(\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)), \qquad n \geq 0. \tag{1.35}$$

Aunque en la construcción del complejo $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ no intervienen los homomorfismos δ_i, y entonces tampoco en la de los grupos de cohomología, nos proponemos demostrar que, bajo ciertas condiciones, que llamaremos *condiciones de normalización*, el complejo $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ puede sustituirse, para el cálculo de los grupos de cohomología de $\mathbb{A}_\bullet$, por otro complejo de cocadenas de grupos categóricos simétricos, en el cual los grupoides de cocadenas tienen por objetos aquellos $P \in Obj(\mathbb{A}_n)$ tales que $\delta_i(P) = 0$, para todo $0 \leq i \leq n$.

Este resultado de normalización particulariza, y está, de hecho, inspirado en el clásico de MacLane [43], cuando $\mathbb{A}_\bullet$ es un complejo cosimplicial de grupos abelianos, vistos como grupos categóricos simétricos discretos.

Para establecer la condición de normalización, recordemos el concepto de n-ésimo núcleo cosimplicial de $\mathbb{A}_\bullet$, $\Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$, $n \geq 0$: Este es definido para $n = 0$ como $\Delta_0(\mathbb{A}_\bullet) = \mathbb{A}_0$ y si $n \geq 1$, $\Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$ es el subgrupoide del grupoide producto $(\mathbb{A}_n)^{n+1}$ cuyos objetos (respectivamente morfismos) son aquellos $(P_0, ..., P_n) \in Obj((\mathbb{A}_n)^{n+1})$, tales que $\delta_i(P_j) = \delta_{j-1}(P_i)$ para $0 \leq i < j \leq n$.

Los homomorfismos δ_i definen un funtor

$$\begin{array}{rcl} S_n : \mathbb{A}_{n+1} & \longrightarrow & \Delta_n(\mathbb{A}_\bullet) \\ & & \\ P & \longmapsto & (\delta_0(P), ..., \delta_n(P)) \end{array} \tag{1.36}$$

y análogamente en morfismos.

Notemos que si los homomorfismos δ_i fuesen estrictos, entonces $\Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$ sería un subgrupo categórico simétrico de $(\mathbb{A}_n)^{n+1}$ y el funtor (1.36) un homomorfismo estricto de grupos categóricos simétricos.

En términos de este funtor establecemos:

Definición 1.3.9. *Un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos $\mathbb{A}_\bullet$, como en (1.32), verifica la condición de normalización si*

i. $\delta_i(0) = 0$, *para todo* $i \geq 0$, *es decir, los homomorfismos* δ_i *son estrictos en el objeto cero.*

ii. $S_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$ *es una fibración de grupoides, para todo* $n \geq 0$.

Para introducir el complejo normalizado asociado a un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos, nos apoyaremos en el siguiente lema.

Lema 1.3.10. *Sea* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *un homomorfismo de grupos categóricos simétricos verificando que* $F(0) = 0$ *y* F *es una fibración de grupoides. Entonces la fibra de* F *en cero,* $F^{-1}(0)$, *tiene una estructura de grupo categórico simétrico de tal manera que la inclusión* $F^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{A}$ *es un homomorfismo de grupos categóricos simétricos.*

Demostración.

Recordemos que $F^{-1}(0)$ es el subgrupoide de $\mathbb{A}$ cuyos objetos son aquellos que se aplican por F en 0 y morfismos los que se aplican en la identidad en 0. En particular, ya que $F(0) = 0$, 0 es un objeto de $F^{-1}(0)$.

Para $A, B \in Obj(F^{-1}(0))$, denotamos por $\overline{\alpha}_{A,B} : F(A + B) \to 0$ al morfismo canónico $F(A+B) \xrightarrow{\mu^{-1}} F(A) + F(B) = 0 + 0 \xrightarrow{r_0} 0$; entonces, puesto que F es fibración, elegimos un objeto en $\mathbb{A}$, que denotaremos $A\widetilde{+}B$ y un morfismo en $\mathbb{A}$:

$$\alpha_{A,B} : A + B \to A\widetilde{+}B$$

tal que $F(\alpha_{A,B}) = \overline{\alpha}_{A,B}$. En particular, $F(A\widetilde{+}B) = 0$ y, así, $A\widetilde{+}B$ es un objeto de $F^{-1}(0)$.

Sean $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ dos morfismos en $F^{-1}(0)$. Definimos

$$f\widetilde{+}g : A\widetilde{+}B \to A'\widetilde{+}B'$$

como el único morfismo haciendo conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A + B \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "f+g"'] & A\widetilde{+}B \arrow[d, "f\widetilde{+}g"] \\
A' + B' \arrow[r, "\alpha_{A',B'}"'] & A'\widetilde{+}B'
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos F sobre este diagrama, obtenemos uno nuevo, también conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0+0 \arrow[d, "F(f)+F(g)=1"'] & F(A+B) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[r, "\overline{\alpha}_{A,B}"] \arrow[d, "F(f+g)"'] & 0 \arrow[d, "F(f\widetilde{+}g)"] \\
0+0 & F(A'+B') \arrow[l, "\mu"] \arrow[r, "\overline{\alpha}_{A',B'}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

y entonces, por definición de $\overline{\alpha}_{A,B}$ y $\overline{\alpha}_{A',B'}$, $F(f\widetilde{+}g)$ ha de ser, necesariamente, la identidad en 0. Tenemos entonces definido el bifuntor

$$-\widetilde{+}- : F^{-1}(0) \times F^{-1}(0) \to F^{-1}(0) \tag{1.37}$$

Los isomorfismos canónicos de asociatividad y de conmutatividad vienen dados por la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A+(B+C) \arrow[r, "\alpha_{A,B+C}"] & A\widetilde{+}(B+C) \arrow[r, "1\widetilde{+}\alpha_{B,C}"] & A\widetilde{+}(B\widetilde{+}C) \\
(A+B)+C \arrow[u, "a"] \arrow[r, "\alpha_{A+B,C}"'] & (A+B)\widetilde{+}C \arrow[r, "\alpha_{A,B}\widetilde{+}1"'] & (A\widetilde{+}B)\widetilde{+}C \arrow[u, "\tilde{a}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A+B \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "c"'] & A\widetilde{+}B \arrow[d, "\tilde{c}"] \\
B+A \arrow[r, "\alpha_{B,A}"'] & B\widetilde{+}A
\end{tikzcd}$$

para cada $A, B, C \in Obj(F^{-1}(0))$.

Puesto que $0 \in Obj(F^{-1}(0))$, éste será el objeto unidad para este producto tensor, siendo los isomorfismos naturales $\tilde{l} : 0\widetilde{+}A \to A$ y $\tilde{r} : A\widetilde{+}0 \to A$ determinados por los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
0+A \arrow[dr, "l"] \arrow[dd, "\alpha_{0,A}"'] & \\
& A \\
0\widetilde{+}A \arrow[ur, "\tilde{l}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A+0 \arrow[dr, "r"] \arrow[dd, "\alpha_{A,0}"'] & \\
& A \\
A\widetilde{+}0 \arrow[ur, "\tilde{r}"'] &
\end{tikzcd}$$

para cada objeto A de $F^{-1}(0)$.

Finalmente, $F^{-1}(0)$ es un grupo categórico pues, utilizando que F es fibración, para cada objeto A de $F^{-1}(0)$, elegimos en $\mathbb{A}$ un morfismo $\beta_A : -A \to A^*$ tal que su imagen por F es el isomorfismo canónico $F(\beta_A) = k_A^{-1} : F(-A) \to -F(A) = 0$. Entonces A^* es un objeto de $F^{-1}(0)$ y existe un isomorfismo $\widetilde{m}_A : A\widetilde{+}A^* \to 0$ en $F^{-1}(0)$ determinado por la conmutatividad de:

$$
\begin{tikzcd}
A+(-A) \arrow[r, "1+\beta_A"] \arrow[d, "m_A"'] & A+A^* \arrow[d, "\alpha_{A,A^*}"] \\
0 & A\widetilde{+}A^* \arrow[l, "\widetilde{m}_A"]
\end{tikzcd}
$$

Por construcción, la inclusión $J : F^{-1}(0) \to \mathbb{A}$, junto con los isomorfismos naturales $\alpha_{A,B} : A+B = J(A)+J(B) \to A\widetilde{+}B = J(A\widetilde{+}B)$, definen un homomorfismo de grupos categóricos simétricos con $J(0) = 0$. ■

1.3.11. Sea $\mathbb{A}_\bullet$ un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos, como en (1.32), verificando la condición de normalización. Supongamos además que los homomorfismos $\delta_i : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathbb{A}_n$, $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, son estrictos. Entonces, para cada $n \geq 0$,

$$S_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \Delta_n(\mathbb{A}_\bullet),$$

es una fibración de grupos categóricos simétricos con $S_n(0) = (0, \cdots, 0)$ y, por el Lema anterior, $S_n^{-1}(0, \cdots, 0)$, la fibra de S_n en el objeto cero de $\Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$, tiene estructura de grupo categórico simétrico.

Definimos el *complejo normalizado* $\mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)$ asociado al complejo cosimplicial $\mathbb{A}_\bullet$ como sigue:

Los grupos categóricos de cocadenas son

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ \mathcal{N}_0(\mathbb{A}_\bullet) = \mathbb{A}_0 \\
&\bullet\ \mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet) = S_n^{-1}(0, \cdots, 0), \qquad n \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

El homomorfismo coborde $\partial^N : \mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet)$ está definido, en función del correspondiente $\partial : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_{n+1}$ del complejo $\mathcal{C}(A_\bullet)$, (1.33), de la siguiente manera:

Si P es un objeto de $\mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet)$, entonces $\delta_i(P) = 0$, para $0 \leq i \leq n-1$ y las composiciones

$$\delta_j(\partial_n(P)) \xrightarrow{can} \sum_{i<j}(-1)^i \varepsilon_i \delta_{j-1}(P) + (-1)^j P + (-1)^{j+1} P + \sum_{i>j+1}(-1)^i \varepsilon_{i-1}\delta_j(P) \xrightarrow{can} 0$$

determinan morfismos canónicos $\overline{\theta}_j : \delta_j(\partial_n(P)) \to 0$, para $0 \leq j \leq n$. Entonces tenemos un morfismo en $\Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$,

$$\overline{\theta} = \overline{\theta}_P : S_n(\partial_n(P)) \to (0, ..., 0),$$

que, al estar $\overline{\theta}_j$ definido por morfismos canónicos, define una transformación monoidal

$$\overline{\theta} : S_n \partial_n \Rightarrow 0.$$

Utilizando que S_n es una fibración, elegimos un morfismo

$$\theta = \theta_P : \partial_n(P) \to \partial_n^N(P) \tag{1.39}$$

en $\mathbb{A}_{n+1}$ tal que $S_n(\theta) = \overline{\theta}$. En particular $\partial_n^N(P)$ es un objeto de $\mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet)$ y tenemos definido un funtor

$$\partial_n^N : \mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet) \tag{1.40}$$

que asocia a cada morfismo $f : P \to P'$ en $\mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet)$ el único morfismo, $\partial_n^N(f)$, haciendo conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\partial_n(P) \arrow[r, "\theta_P"] \arrow[d, "\partial_n(f)"'] & \partial_n^N(P) \arrow[d, "\partial_n^N(f)"] \\
\partial_n(P') \arrow[r, "\theta_{P'}"'] & \partial_n^N(P')
\end{tikzcd}$$

Las condiciones de naturalidad sobre $\overline{\theta}$ demuestran que $\partial_n^N(f)$ es un morfismo de $\mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet)$.

∂_n^N es además un homomorfismo de grupos categóricos simétricos con isomorfismos canónicos,

$$\mu^N : \partial_n^N(P) \widetilde{+} \partial_n^N(P') \to \partial_n^N(P + P') \qquad \text{y} \qquad \mu_0^N : \partial_n^N(0) \to 0,$$

dados por la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & \partial(P)+\partial(P') \arrow[r, "\mu"] \arrow[dl, "\theta_P+\theta_{P'}"'] & \partial(P+P') \arrow[dr, "\partial(\alpha)"] & \\
\partial^N(P)+\partial^N(P') \arrow[dr, "\alpha"'] & & & \partial(P\widetilde{+}P') \arrow[dl, "\theta_{P\widetilde{+}P'}"] \\
 & \partial^N(P)\widetilde{+}\partial^N(P') \arrow[r, "\mu^N"'] & \partial^N(P\widetilde{+}P') &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\partial(0) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\mu_0"'] & & \partial^N(0)\ , \arrow[dl, "\mu_0^N"] \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

para cualesquiera objetos P, P' de $\mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet)$.

Finalmente, la transformación monoidal $\chi : \partial^2 \Rightarrow 0$ del complejo $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ determina una transformación monoidal

$$\chi^N : (\partial^N)^2 \Rightarrow 0, \tag{1.41}$$

que, para cada objeto P de $\mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)$, es dado por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\partial^N\partial^N(P) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\chi^N"'] & \partial\partial^N(P) \\
0 & \partial\partial(P) \arrow[l, "\chi"] \arrow[u, "\partial\theta"']
\end{tikzcd}$$

Concluimos entonces, de forma inmediata, que

Proposición 1.3.12. *El complejo $\mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)$ definido por (1.38), (1.40) y (1.41) es un complejo de grupos categóricos simétricos, que llamaremos complejo normalizado de $\mathbb{A}_\bullet$.*

Si denotamos, para cada $n \geq 0$, por $(J_n, \alpha_n) : \mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathbb{A}_n$ al homomorfismo definido por la inclusión (véase la demostración del Lema 1.3.10), entonces se tiene un homomorfismo de complejos de cocadenas $(J, \theta) : \mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}_0(\mathbb{A}) \arrow[r, "\partial^N"] \arrow[d, equal] & \mathcal{N}_1(\mathbb{A}) \arrow[r, "\partial^N"] \arrow[d, "J_1"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{N}_n(\mathbb{A}) \arrow[r, "\partial^N"] \arrow[d, "J_n"] & \mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}) \arrow[r, "\partial^N"] \arrow[d, "J_{n+1}"] & \cdots \\
\mathbb{A}_0 \arrow[r, "\partial"'] & \mathbb{A}_1 \arrow[r, "\partial"'] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{A}_n \arrow[r, "\partial"'] \arrow[ur, phantom, "\theta_n \Nearrow"] & \mathbb{A}_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $\theta_n : \partial J_n \Rightarrow J_{n+1}\partial^N$ se define para cada objeto P de $\mathcal{N}_n(\mathbb{A}_\bullet)$, por el homomorfismo (1.39).

■

El resultado fundamental es:

Teorema 1.3.13 (Teorema de Normalización). *Sea $\mathbb{A}_\bullet$ un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos verificando la condición de normalización y supongamos que los homomorfismos δ_i son estrictos. Entonces $(J, \theta) : \mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración.

La demostración no difiere sustancialmente de la ofrecida por MacLane en [43] y esquemáticamente es como sigue:

Para cada $k \geq 0$, consideramos

$$R^k = \left(R^k_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathbb{A}_n\right)_{n \geq 0}$$

definida por

$$R^k_n = \begin{cases} (-1)^{k+1}\delta_k & \text{si } n \geq k \\ 0 & \text{si } n < k \end{cases}$$

Por la Proposición 1.3.5, R^k tiene asociado un morfismo de complejos $\widetilde{R}^k = (\widetilde{R}^k, \widetilde{\theta}^k) : \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ tal que $H^n(\widetilde{R}^k, \widetilde{\theta}^k) = 0$, para todo $n \geq 0$. Entonces el homomorfismo

$$F^k = id_{\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)} + \widetilde{R}^k : \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$$

es homotópicamente equivalente a la identidad en $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ (véase la Definición 1.3.6), para todo $k \geq 0$.

Como $F_j^k(P) = P$, para todo objeto P de $\mathbb{A}_j$, $0 \leq j \leq k-1$, podemos considerar la composición $F = F^0F^1F^2...$, que define un homomorfismo de complejos $F : \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$ homotópicamente equivalente a la identidad.

Si consideramos los morfismos canónicos, para cada objeto P de $\mathbb{A}_j$, $can : F_j^k(P) \to P$, las identidades cosimpliciales implican la existencia de morfismos naturales canónicos $\widetilde{\beta}_{i,P} : \delta_i F(P) \to 0$, para cada $0 \leq i \leq n$ y $P \in Obj(\mathbb{A}_{n+1})$. Usando que $S_n : \mathbb{A}_{n+1} \to \Delta_n(\mathbb{A}_\bullet)$ es una fibración, podremos elegir un morfismo en $\mathbb{A}_{n+1}$, $\beta_P : F(P) \to F'(P)$, con $\delta_i(\beta_P) = \widetilde{\beta}_{i,P}$; en particular, $F'(P)$ es un objeto de $\mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet)$. F' extiende a un homomorfismo de grupos categóricos simétricos $F' : \mathbb{A}_{n+1} \to \mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet)$, ya que si $f : P \to P'$ es un morfismo en $\mathbb{A}_{n+1}$, entonces $F'(f)$ es el único morfismo en $\mathcal{N}_{n+1}(\mathbb{A}_\bullet)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[r, "\beta_P"] \arrow[d, "F(f)"'] & F'(P) \arrow[d, "F'(f)"] \\ F(P') \arrow[r, "\beta_{P'}"'] & F'(P') \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, por naturalidad, se cumple que $\delta_i F'(f) = id$. Tenemos, pues, un homomorfismo de complejos $F' : \mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet) \to \mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)$ de manera que $\beta : F \to J \cdot F'$ es una equivalencia de homomorfismos de complejos. Concluimos así que $J \cdot F'$ es homotópicamente equivalente a la identidad en $\mathcal{C}(\mathbb{A}_\bullet)$. Por otro lado, $F' \cdot J = id_{\mathcal{N}(\mathbb{A}_\bullet)}$ y esto concluye, a su vez, la demostración.

■

Como consecuencia del teorema anterior, podemos utilizar cociclos y cobordes normalizados para el cálculo de la cohomología de un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos que verifique las condiciones del Teorema. Así el grupoide de n-cociclos $Z^n(\mathbb{A}_\bullet)$, $n \geq 1$, es equivalente al grupoide de n-cociclos normalizados $Z_N^n(\mathbb{A}_\bullet)$ que tiene por objetos los n-cociclos (P, g), con $\delta_j(P) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$ y $\delta_j(g) = can$, para cada $0 \leq j \leq n$; esto es, el morfismo canónico siguiente:

$$
\begin{array}{c}
\delta_j(\partial_n(P)) = \delta_j(\sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, \varepsilon_i(P)) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle can} \\
\sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, \delta_j \varepsilon_i(P) \\
\Big\| \\
\sum\limits_{i<j} (-1)^i \varepsilon_i \delta_{j-1}(P) + (-1)^j P + (-1)^{j+1} P + \sum\limits_{i>j+1} (-1)^i \varepsilon_{i-1} \delta_j(P) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle can} \\
0
\end{array}
$$

Los morfismos en $Z_n^N(\mathbb{A}_\bullet)$ son los morfismos entre cociclos normalizados, $f : (P, g) \to (P', g')$, tales que $\delta_j(f) = id_0$, $0 \leq j \leq n-1$.

Capítulo 2

Cohomología simplicial con coeficientes en grupos categóricos simétricos.

En este segundo capítulo definimos y estudiamos, de forma exhaustiva, una teoría de cohomología de conjuntos simpliciales con coeficientes en grupos categóricos simétricos, haciendo uso de la cohomología de Takeuchi-Ulbrich estudiada en el capítulo anterior. Relacionamos esta cohomología con otras bien conocidas (cohomología singular, cohomología de grupos de Eilenberg-MacLane) y con otras menos clásicas (cohomología de Ulbrich-Frölich-Wall [57] y los conjuntos de cohomología definidos por Breen [2], Carrasco-Cegarra [9] o Cegarra-Garzón [14]). Definimos y estudiamos los complejos $K(\mathbb{A}, n)$, *n-nervio* de un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, que juegan para nuestra cohomología un papel análogo al jugado por los clásicos complejos de Eilenberg-MacLane, $K(A, n)$ en cohomología singular. En particular, los conjuntos simpliciales $K(\mathbb{A}, n)$ se usan para dar un Teorema de representación homotópica, para la cohomología que definimos. Finalmente, demostramos que los funtores $\wp_n(-)$, n-ésimo grupoide fundamental, y $K(-, n)$, $n \geq 3$, establecen una situación de adjunción, con propiedades que nos proporcionan una nueva forma de probar que grupos categóricos simétricos son modelos algebraicos para tipos de homotopía de CW-complejos conexos con grupos de homotopía nulos en dimensiones distintas de n y $n+1$. (El grupoide de homotopía superior $\wp(X_\bullet, *)$ resulta ser el modelo algebraico de $X_\bullet$ y el n-nervio de $K(\mathbb{A}, n)$ es complejo clasificador de $\mathbb{A}$). Obtenemos también, haciendo uso de esta adjunción, un Teorema de clasificación análogo al teorema de clasificación de Eilenberg-MacLane.

2.1 Definición y primeras propiedades.

Es bien conocido que si X es un conjunto y éste es considerado coma una categoría discreta, entonces la categoría de funtores de X en un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^X$, hereda la estructura de grupo categórico simétrico de $\mathbb{A}$. Análogamente, si $f : X \to Y$ es una aplicación, entonces el funtor inducido $f^* : \mathbb{A}^Y \to \mathbb{A}^X$ por composición con f (i.e., $f^*(F : Y \to \mathbb{A}) = F \cdot f : X \to \mathbb{A}$) es un homomorfismo de grupos categóricos simétricos estricto.

Entonces si

$$X_\bullet \quad = \quad \cdots \qquad \begin{tikzcd} X_3 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] & X_2 \arrow[l, bend right=20, "s_0"'] \arrow[l, bend right=40, "s_2"'] \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & X_1 \arrow[l, bend right=20, "s_0"'] \arrow[l, bend right=40, "s_1"'] \arrow[r, shift left=1, "d_0"] \arrow[r, shift right=1, "d_1"'] & X_0 \arrow[l, bend right=30, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

es un conjunto simplicial, obtenemos un complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos

$$\mathbb{A}^{X_\bullet} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathbb{A}^{X_0} \arrow[r, shift left=1, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift right=1, "\varepsilon_1"'] & \mathbb{A}^{X_1} \arrow[l, bend right=30, "\delta_0"'] \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\varepsilon_2"'] & \mathbb{A}^{X_2} \arrow[l, bend right=20, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=40, "\delta_1"'] \arrow[r, shift left=3, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "\varepsilon_3"'] & \mathbb{A}^{X_3} \arrow[l, bend right=20, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=40, "\delta_2"'] \end{tikzcd} \; \cdots\,, \tag{2.1}$$

como (1.32), donde $\varepsilon_i = d_i^*$ y $\delta_j = s_j^*$. Podemos entonces definir:

Definición 2.1.1. *Para $X_\bullet$ un conjunto simplicial y $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico, definimos la cohomología de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ como la cohomología del complejo cosimplicial $\mathbb{A}^{X_\bullet}$ (Definición 1.3.8). Esto es,*

$$H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) = H^n(\mathbb{A}^{X_\bullet}), \quad n \geq 0.$$

Puesto que $H^n(\mathbb{A}^{X_\bullet}) = H^n(\mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}))$, $n \geq 0$, entonces para el cálculo de estos grupos de cohomología, el complejo de cocadenas de grupos categóricos simétricos a considerar es:

$$\mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) = \mathbb{A}^{X_0} \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}^{X_1} \xrightarrow{\partial} \cdots \longrightarrow \mathbb{A}^{X_n} \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}^{X_{n+1}} \xrightarrow{\partial} \cdots, \tag{2.2}$$

donde $\partial_n : \mathbb{A}^{X_n} \to \mathbb{A}^{X_{n+1}}$ viene dado por:

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \, d_i^*, \tag{2.3}$$

y la transformación monoidal $\chi : \partial^2 \Rightarrow 0$ es la única posible a partir de los isomorfismos canónicos.

Consecuentemente, para $n \geq 0$, un n-cociclo de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ consiste de un par (P, g), donde P es un objeto de $\mathbb{A}^{X_n}$, es decir, una aplicación $P : X_n \to Obj(\mathbb{A})$; y $g : \partial P \to 0$ es un morfismo en $\mathbb{A}^{X_{n+1}}$, es decir, una aplicación $g : X_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$ tal que

$$\begin{tikzcd} \partial^2(P) \arrow[rr, "\partial(g)"] \arrow[dr, "\chi_P"'] & & \partial(0) \arrow[dl, "\mu_0"] \\ & 0 & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

es conmutativo.

Denotaremos por $Z^n(X_\bullet, \mathbb{A})$ al grupo categórico simétrico de n-cociclos y por $\mathbf{Z}^n(X_\bullet, \mathbb{A})$ al grupo abeliano de componentes conexas o clases de isomorfía de n-cociclos.

Análogamente, $\mathbf{B}^n(X_\bullet, \mathbb{A})$ denotará, para todo $n \geq 0$, el subgrupo de $\mathbf{Z}^n(X_\bullet, \mathbb{A})$ de n-cobordes. Esto es, $\mathbf{B}^0(X_\bullet, \mathbb{A}) = 0$ y, para $n \geq 1$, $\mathbf{B}^n(X_\bullet, \mathbb{A})$ el subgrupo de los elementos representados por los n-cociclos $(\partial Q, \chi_Q)$, para $Q : X_{n-1} \to Obj(\mathbb{A})$ un objeto en $\mathbb{A}^{X_{n-1}}$.

Entonces será

$$H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) = \mathbf{Z}^n(X_\bullet, \mathbb{A}) / \mathbf{B}^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \tag{2.5}$$

La proposición siguiente nos permite asegurar, usando el Teorema 1.3.13 de normalización, que podemos reducirnos a cociclos normalizados.

Proposición 2.1.2. *El complejo cosimplicial de grupos categóricos simétricos $\mathbb{A}^{X_\bullet}$ satisface la condición de normalización (Definición 1.3.9).*

Demostración.

La condición *i)* es clara, pues los δ_i son morfismos estrictos. Sea $n \geq 0$ y consideremos $S_n : \mathbb{A}^{X_{n+1}} \to \Delta_n(\mathbb{A}^{X_\bullet})$, para ver que S_n es fibración supongamos un objeto P en $\mathbb{A}^{X_{n+1}}$, es decir, una aplicación $P : X_{n+1} \to Obj(\mathbb{A})$, y un morfismo en $\Delta_n(\mathbb{A}^{X_\bullet})$ de dominio $S_n(P) = (Ps_0, ..., Ps_n)$, es decir, una lista de aplicaciones $(\lambda_0, ..., \lambda_n)$, con $\lambda_i : X_n \to Mor(\mathbb{A})$, tal que $s(\lambda_i) = Ps_i$ (s denota la aplicación dominio), $0 \leq i \leq n$ y $\lambda_j s_i = \lambda_i s_{j-1}$, para $0 \leq i < j \leq n$. Bajo dichas condiciones, hemos de encontrar un morfismo en $\mathbb{A}^{X_{n+1}}$, $g : X_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$, tal que $s(g) = P$ y $S_n(g) = (\lambda_0, ..., \lambda_n)$, i.e., $gs_i = \lambda_i$, para $0 \leq i \leq n$.

Para $x \in X_{n+1}$, si x es degenerado, es decir, $x = s_i(y)$, para cierto $y \in X_n$ e $i \in \{0, ..., n\}$, definimos $g(x) = \lambda_i(y)$. Esta definición es buena ya que si $s_i(y) = x = s_j(z)$, con $z \in X_n$ y $j \in \{0, ..., n\}$, entonces $\lambda_i(y) = \lambda_j(z)$: En efecto, supongamos $i < j$ (si $i = j$ trivialmente $\lambda_i(y) = \lambda_j(z)$), entonces $y = d_i s_i(y) = d_i s_j(z) = s_{j-1} d_i(z)$ y, así, $d_j(y) = d_j s_{j-1} d_i(z) = d_i(z)$. Además, $z = d_{j+1} s_j(z) = d_{j+1} s_i(y) = s_i d_j(y)$, con lo que, $\lambda_i(y) = \lambda_i s_{j-1} d_i(z) = \lambda_j s_i d_i(z) = \lambda_j s_i d_j(y) = \lambda_j(z)$.

Si $x \in X_{n+1}$ es no degenerado, definimos $g(x) = id_{P(x)}$. Es claro que g es el morfismo pedido. ■

2.1.3. De esta forma, como concluíamos al final del Capítulo anterior, $Z^n(X_\bullet, \mathbb{A})$ es equivalente al grupoide de n-cociclos normalizados, que en lo sucesivo denotaremos $Z^n_N(X_\bullet, \mathbb{A})$, $n \geq 0$, cuyos objetos son los n-cociclos (P, g) tales que $Ps_j(x) = 0$, para todo $x \in X_{n-1}$ y $0 \leq j \leq n-1$ y

$$gs_j(y) = can : \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i P d_i s_j(y) \to 0,$$

para todo $y \in X_n$ y $0 \leq j \leq n$.

Un morfismo $f : (P, g) \to (P', g')$ en $Z^n_N(X_\bullet, \mathbb{A})$ es un morfismo $f : P \to P'$ en $\mathbb{A}^{X_n}$ tal que $fs_j(x) = id_0$, para todo $x \in X_{n-1}$ y $0 \leq j \leq n-1$.

2.1.4. Tanto la construcción del complejo cosimplicial $\mathbb{A}^{X_\bullet}$ como la del complejo de cocadenas $\mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet})$ son bifuntoriales, contravariantes respecto a aplicaciones simpliciales y covariantes respecto a homomorfismos de grupos categóricos simétricos. Esto es, si $\alpha : Y_\bullet \to X_\bullet$ es una aplicación simplicial, entonces induce un homomorfismo

$$\alpha^* : \mathbb{A}^{X_\bullet} \to \mathbb{A}^{Y_\bullet} \tag{2.6}$$

de complejos cosimpliciales de grupos categóricos simétricos por composición con α_n, en cada dimensión:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{X_\bullet} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{A}^{X_0} \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift right=2, "\varepsilon_1"'] \arrow[d, "\alpha_0^*"] & \mathbb{A}^{X_1} \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[r, shift left=3, "\varepsilon_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3, "\varepsilon_2"'] \arrow[d, "\alpha_1^*"] & \mathbb{A}^{X_2} \arrow[l, bend right=20, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=40, "\delta_1"'] \arrow[r, shift left=4, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=4, "\varepsilon_3"'] \arrow[d, "\alpha_2^*"] & \mathbb{A}^{X_3} \cdots \arrow[l, bend right=15, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=45, "\delta_2"'] \arrow[d, "\alpha_3^*"] \\
\mathbb{A}^{Y_\bullet} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{A}^{Y_0} \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift right=2, "\varepsilon_1"'] & \mathbb{A}^{Y_1} \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[r, shift left=3, "\varepsilon_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3, "\varepsilon_2"'] & \mathbb{A}^{Y_2} \arrow[l, bend right=20, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=40, "\delta_1"'] \arrow[r, shift left=4, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=4, "\varepsilon_3"'] & \mathbb{A}^{Y_3} \cdots \arrow[l, bend right=15, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=45, "\delta_2"']
\end{tikzcd}$$

Además, cada α_n^* es un homomorfismo estricto de grupos categóricos simétricos. El homomorfismo (2.6) induce un homomorfismo entre los complejos de cocadenas asociados

$$\alpha^* : \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}^{Y_\bullet}),$$

donde las transformaciones monoidales $\theta_n : \partial\alpha_n^* \Rightarrow \alpha_{n+1}^*\partial$ son, en este caso, identidades.

Así, según observábamos en la Sección 1.3.1, $(\alpha^*, id) : \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet})$, define, para cada $n \geq 0$, un homomorfismo de grupos categóricos simétricos, entre las correspondientes categorías de n-cociclos, que denotaremos por $Z^n(\alpha, \mathbb{A})$:

$$Z^n(\alpha, \mathbb{A}) : Z^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \to Z^n(Y_\bullet, \mathbb{A}).$$

Este homomorfismo es estricto y su definición, en este caso, es particularmente simple y se reduce a componer con α, es decir,

$$Z^n(\alpha, \mathbb{A})(f : (P, g) \to (P', g')) = f \cdot \alpha_n : (P\alpha_n, g\alpha_{n+1}) \to (P'\alpha_n, g'\alpha_{n+1})$$

y entonces el homomorfismo entre los grupos de cohomología

$$H^n(\alpha, \mathbb{A}) : H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \to H^n(Y_\bullet, \mathbb{A}), \quad n \geq 0,$$

está dado por $H^n(\alpha,\mathbb{A})([(P,g)]) = [(P\alpha_n, g\alpha_{n+1})]$.

Notemos que puesto que $\alpha_n s_i = s_i\alpha_{n-1}$, $0 \le i \le n-1$, $n \ge 1$, $Z^n(\alpha,\mathbb{A})$ aplica cociclos normalizados en cociclos normalizados o, equivalentemente, α induce un morfismo de grupoides

$$Z^n_N(\alpha,\mathbb{A}) : Z^n_N(X_\bullet,\mathbb{A}) \to Z^n_N(Y_\bullet,\mathbb{A}), \quad n \ge 1. \tag{2.7}$$

Respecto a la segunda variable, supongamos $F = (F,\mu) : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un homomorfismo de grupos categóricos simétricos. Este induce un homomorfismo de complejos cosimpliciales $F_* : \mathbb{A}^{X_\bullet} \to \mathbb{B}^{X_\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{X_\bullet} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{A}^{X_0} \arrow[r, shift left, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_1"'] \arrow[d, "F_*"] & \mathbb{A}^{X_1} \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\varepsilon_2"'] \arrow[d, "F_*"] & \mathbb{A}^{X_2} \cdots \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=40, "\delta_1"'] \arrow[d, "F_*"] \\
\mathbb{B}^{X_\bullet} \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{B}^{X_0} \arrow[r, shift left, "\varepsilon_0"] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_1"'] & \mathbb{B}^{X_1} \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[r, shift left=2, "\varepsilon_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\varepsilon_2"'] & \mathbb{B}^{X_2} \cdots \arrow[l, bend right, "\delta_0"'] \arrow[l, bend right=40, "\delta_1"']
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

donde $F_* : \mathbb{A}^{X_n} \to \mathbb{B}^{X_n}$ es dado en objetos y morfismos por composición con $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ y el isomorfismo canónico $\mu_* : F_*(P) + F_*(P') \to F_*(P+P')$ se define, para cada $x \in X_n$, por $\mu_*(x) = \mu_{P(x),P'(x)}$.

$F_* : \mathbb{A}^{X_\bullet} \to \mathbb{B}^{X_\bullet}$ induce un homomorfismo de complejos de cocadenas

$$(F_*,\theta) : \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) \to \mathcal{C}(\mathbb{B}^{X_\bullet}),$$

donde $\theta_n : \partial F_* \Rightarrow F_*\partial$ se obtiene a partir del isomorfismo canónico de F, es decir, si P es un objeto de $\mathbb{A}^{X_n}$ entonces, para cada $x \in X_{n+1}$,

$$\theta_P(x) = can : (\partial F_*(P))(x) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, F(Pd_i(x)) \to$$
$$F(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i\, Pd_i(x)) = (F_*\partial(P))(x).$$

Denotaremos por $Z^n(X_\bullet,F)$ al homomorfismo de grupos categóricos simétricos inducido entre las categorías de n-cociclos

$$Z^n(X_\bullet,F) : Z^n(X_\bullet,\mathbb{A}) \to Z^n(X_\bullet,\mathbb{B})$$

que, según (1.22), está definido por: $Z^n(X_\bullet, F)(f : (P, g) \to (P', g')) = F\cdot f : (F \cdot P, (F \cdot g) \cdot \theta_P) \to (F \cdot P', (F \cdot g') \cdot \theta_{P'})$; y entonces el morfismo de grupos abelianos

$$H^n(X_\bullet, F) : H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \to H^n(X_\bullet, \mathbb{B})$$

viene dado por $H^n(X_\bullet, F)([(P, g)]) = [(F \cdot P, (F \cdot g) \cdot \theta_P)]$.

Finalmente, si $(F, \mu) : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es estricto en el objeto cero, es decir, $F(0) = 0$, entonces $Z^n(X_\bullet, F)$ restringe a un morfismo de grupoides

$$Z^n_N(X_\bullet, F) : Z^n_N(X_\bullet, \mathbb{A}) \to Z^n_N(X_\bullet, \mathbb{B}), \quad n \geq 1. \tag{2.9}$$

En efecto, si (P, g) es un n-cociclo normalizado, entonces $\delta_j(F \cdot P)(x) = (F \cdot P)(s_j(x)) = F(0) = 0$, para todo $x \in X_{n-1}$ y $0 \leq j \leq n-1$. Análogamente, $\delta_j((F \cdot g) \cdot \theta_P)(x) = (F \cdot g)(s_j(x)) \cdot \theta_P(s_j(x))$ es el morfismo canónico, por ser composición de morfismos canónicos, esto es, $Z^n_N(X_\bullet, F)(P, g)$ es también normalizado.

La siguiente proposición muestra el comportamiento de $H^n(-, -)$ con respecto a aplicaciones simpliciales homotópicas y homomorfismos de grupos categóricos homotópicos.

Proposición 2.1.5.

i) Si $\alpha, \beta : Y_\bullet \to X_\bullet$ son aplicaciones simpliciales homotópicas, entonces los homomorfismos $H^n(\alpha, \mathbb{A}), H^n(\beta, \mathbb{A}) : H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \to H^n(Y_\bullet, \mathbb{A})$ son iguales.

ii) Si $\theta : F \Rightarrow G$ es una transformación monoidal entre homomorfismos de grupos categóricos simétricos $F, G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, entonces $H^n(X_\bullet, F), H^n(X_\bullet, G) : H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \to H^n(X_\bullet, \mathbb{B})$ son iguales.

Demostración.

i) Veamos que $(\alpha^*, id), (\beta^*, id) : \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}^{Y_\bullet})$ son homomorfismos de complejos homotópicamente equivalentes (Definición 1.3.6), y entonces, del Teorema 1.3.7, se sigue el resultado.

Sea $h = (h^n_i : Y_n \to X_{n+1}, n \geq 0, 0 \leq i \leq n)$ la homotopía de α en β y sea $(h^n_i)^* : \mathbb{A}^{X_{n+1}} \to \mathbb{A}^{Y_n}$ el homomorfismo de grupos categóricos simétricos inducido. Tomando sumas alternadas, obtenemos una familia de morfismos

$H = \left(H_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (h_i^n)^* : \mathbb{A}^{X_{n+1}} \to \mathbb{A}^{Y_n} \right)_{n\geq 0}$, que tendrá asociada, por la Proposición 1.3.5, un homomorfismo de complejos $(\widetilde{H}, \widetilde{\theta}) : \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) \to \mathcal{C}(\mathbb{A}^{Y_\bullet})$.

Ahora, usando las identidades homotópicas para h, obtenemos, a partir de los isomorfismos canónicos de $\mathbb{A}$, un única transformación monoidal $\nu_n : \alpha_n^* \Rightarrow \beta_n^* + \widetilde{H}_n$ de forma que $\nu = \{\nu_n\}_{n\geq 0}$ define una equivalencia entre α^* y $\beta^* + \widetilde{H}$, es decir, α^* y β^* son homotópicamente equivalentes.

ii) Para cada $n \geq 0$, sea $\theta_n : F_* \Rightarrow G_*$ la transformación monoidal

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{X_n} \arrow[r, bend left, "F_*"] \arrow[r, bend right, "G_*"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_n"] & \mathbb{B}^{X_n} \end{tikzcd}$$

que asocia a cada objeto P de $\mathbb{A}^{X_n}$ el morfismo en $\mathbb{B}^{X_n}$, $\theta_{n,P} : F \cdot P \to G \cdot P$ dado por:

$$\theta_{n,P}(x) = \theta_{P(x)} : F(P(x)) \to G(P(x)),$$

para cada $x \in X_n$. Entonces la familia $\{\theta_n\}_{n\geq 0}$ establece una equivalencia entre F_* y G_* y el resultado se sigue, de nuevo, del Teorema 1.3.7. ■

Finalizamos esta sección con la obtención de dos sucesiones exactas largas en cohomología. La primera de ellas es la asociada a una sucesión exacta corta de grupos categóricos simétricos y la segunda establece la relación de nuestra cohomología con la cohomología simplicial usual con coeficientes en grupos abelianos [45]. En primer lugar tenemos:

Lema 2.1.6. *Sea* $\mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{B} \xrightarrow{q} \mathbb{C}$ *una sucesión exacta corta de grupos categóricos simétricos y* $X_\bullet$ *un conjunto simplicial. Entonces la sucesión de complejos de cocadenas inducida*

$$\mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}) \xrightarrow{(j_*,\theta)} \mathcal{C}(\mathbb{B}^{X_\bullet}) \xrightarrow{(q_*,\theta')} \mathcal{C}(\mathbb{C}^{X_\bullet})$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas (Definición 1.3.3).

Demostración.

En primer lugar, es fácil demostrar que para todo $n \geq 0$, la sucesión

$$\mathbb{A}^{X_n} \xrightarrow{j_*} \mathbb{B}^{X_n} \xrightarrow{q_*} \mathbb{C}^{X_n}$$

es una sucesión exacta corta. Así, por ejemplo, sean $P : X_n \to Obj(\mathbb{B})$ y $Q : X_n \to Obj(\mathbb{C})$ objetos en $\mathbb{B}^{X_n}$ y $\mathbb{C}^{X_n}$, respectivamente. Supongamos dado un morfismo en $\mathbb{C}^{X_n}$, $f : q_*(P) \to Q$, esto es, una aplicación $f : X_n \to Mor(\mathbb{C})$ con $f(x) : q(P(x)) \to Q(x)$, para todo $x \in X_n$. Puesto que q es una fibración, existirá un morfismo en $\mathbb{B}$, $\widetilde{f}(x) : P(x) \to Q'(x)$, tal que $q(\widetilde{f}(x)) = f(x)$, para todo $x \in X_n$. En otras palabras, $\widetilde{f} : X_n \to Mor(\mathbb{B})$ es un morfismo en $\mathbb{B}^{X_n}$ verificando que $q_*(\widetilde{f}) = f$. Con ello, q_* es una fibración. El resto de las condiciones se demuestran de forma análoga.

Por otro lado, puesto que la transformación monoidal $\theta : \partial j_* \Rightarrow j_*\partial$ (respectivamente $\theta' : \partial q_* \Rightarrow q_*\partial$) viene definida a partir del isomorfismo canónico de j (respectivamente de q), entonces la conmutatividad del diagrama (1.24) es consecuencia de que la composición $q \cdot j$ es el homomorfismo nulo. ■

Entonces por el Teorema 1.3.4, tenemos:

Teorema 2.1.7. *Sea $\mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{B} \xrightarrow{q} \mathbb{C}$ una sucesión exacta corta de grupos categóricos simétricos y $X_\bullet$ un conjunto simplicial. Para cada $n \geq 0$, existe un homomorfismo de grupos*

$$w_n : H^n(X_\bullet, \mathbb{C}) \to H^{n+1}(X_\bullet, \mathbb{A})$$

tal que la sucesión

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^n(X_\bullet,\mathbb{A}) \arrow[r, "H^n(X_\bullet,j)"] & H^n(X_\bullet,\mathbb{B}) \arrow[r, "H^n(X_\bullet,q)"] & H^n(X_\bullet,\mathbb{C}) \arrow[dll, "w_n"'] & \\ & H^{n+1}(X_\bullet,\mathbb{A}) \arrow[r, "H^{n+1}(X_\bullet,j)"'] & H^{n+1}(X_\bullet,\mathbb{B}) \arrow[r, "H^{n+1}(X_\bullet,q)"'] & H^{n+1}(X_\bullet,\mathbb{C}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

es exacta

Respecto a la segunda sucesión anunciada, recordemos que a partir de un complejo de cocadenas de grupos categóricos simétricos $(\mathcal{A}, \chi)$

$$\mathcal{A} = \mathbb{A}_0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\partial} \cdots \longrightarrow \mathbb{A}_n \xrightarrow{\partial} \mathbb{A}_{n+1} \xrightarrow{\partial} \cdots \tag{2.10}$$

podemos considerar dos complejos de grupos abelianos: El complejo

$$\pi_0(\mathcal{A}) = \pi_0(\mathbb{A}_0) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(\mathbb{A}_n) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\mathbb{A}_{n+1}) \xrightarrow{\partial} \cdots, \tag{2.11}$$

que se obtiene al considerar los grupos de componentes conexas de cada $\mathbb{A}_n$ y donde, para cada objeto P de $\mathbb{A}_n$, $\partial\overline{P} = \overline{\partial P}$, denotando por $\overline{P}$ la componente conexa de P en $\mathbb{A}_n$. Y el complejo

$$\pi_1(\mathcal{A}) = \pi_1(\mathbb{A}_0) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_1(\mathbb{A}_n) \xrightarrow{\partial} \pi_1(\mathbb{A}_{n+1}) \xrightarrow{\partial} \cdots, \tag{2.12}$$

que se deduce al considerar los grupos de automorfismos en el objeto cero de cada $\mathbb{A}_n$. El homomorfismo $\partial : \pi_1(\mathbb{A}_n) \to \pi_1(\mathbb{A}_{n+1})$, $n \geq 0$, aplica un automorfismo $u : 0 \to 0$ en $\mathbb{A}_n$ en $\partial(u) = \mu_0^{-1} \cdot \partial u \cdot \mu_0$, donde $\mu_0 : \partial(0) \to 0$ es el isomorfismo canónico de $\partial : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_{n+1}$, [50].

La relación entre la cohomología de estos tres complejos viene dada por medio de la siguiente sucesión exacta obtenida por Ulbrich [52]

$$\cdots \longrightarrow H^{n+1}(\pi_1(\mathcal{A})) \xrightarrow{\alpha_n} H^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\beta_n} H^n(\pi_0(\mathcal{A})) \xrightarrow{\gamma_n} H^{n+2}(\pi_1(\mathcal{A})) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \cdots \tag{2.13}$$

donde los morfismos α_n, β_n y γ_n son definidos como sigue:

Si $u \in \pi_1(\mathbb{A}_{n+1})$ es un $(n+1)$-cociclo de (2.12), entonces $\partial(u) = \mu_0^{-1} \cdot \partial u \cdot \mu_0 = 1_0$, lo que implica que $(0, \mu_0 \cdot \partial u)$ es un n-cociclo en $\mathcal{A}$, y entonces $\alpha_n([u]) = [(0, \mu_0 \cdot \partial(u))]$. Supongamos ahora (P, g) un n-cociclo en $\mathcal{A}$ entonces $\overline{P} \in \pi_0(\mathbb{A}_n)$ es un n-cociclo del complejo (2.11), por la existencia de $g : \partial P \to 0$, el homomorfismo β_n es dado, entonces, por $\beta_n([P, g]) = [\overline{P}]$. Finalmente, sea P un objeto de $\mathbb{A}_n$ verificando que $\partial(\overline{P}) = \overline{\partial P} = \overline{0}$, entonces existirá un morfismo en $\mathbb{A}_{n+1}$, $g : \partial P \to 0$. Sea $U_P \in \pi_1(\mathbb{A}_{n+2})$ definido por la composición

$$0 \xrightarrow{\chi_P^{-1}} \partial^2 P \xrightarrow{\partial g} \partial(0) \xrightarrow{\mu_0} 0\,,$$

resulta que U_P es un $(n+2)$-cociclo, que además, módulo cobordes en el complejo (2.12), no depende de g. Consecuentemente, γ_n es dado por $\gamma_n[\overline{P}] = [U_P]$.

Supongamos ahora que $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet})$ es el complejo (2.2) asociado a un conjunto simplicial $X_\bullet$ y a un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$.

Puesto que $\pi_0(\mathbb{A}^{X_n}) \cong \pi_0(\mathbb{A})^{X_n}$, el grupo abeliano de aplicaciones de X_n en $\pi_0(\mathbb{A})$, y de la misma forma $\pi_1(\mathbb{A}^{X_n}) \cong \pi_1(\mathbb{A})^{X_n}$, entonces los complejos (2.11) y (2.12) son, respectivamente, $\pi_0(\mathbb{A})^{X_\bullet}$ y $\pi_1(\mathbb{A})^{X_\bullet}$. Consecuentemente, $H^*(\pi_0(\mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}))) \cong H^*(X_\bullet, \pi_0(\mathbb{A}))$ y $H^*(\pi_1(\mathcal{C}(\mathbb{A}^{X_\bullet}))) \cong H^*(X_\bullet, \pi_1(\mathbb{A}))$, donde los segundos miembros denotan la cohomología usual de $X_\bullet$ con coeficientes en un grupo abeliano.

De la sucesión (2.13) concluimos:

Proposición 2.1.8. *Para cualquier conjunto simplicial $X_\bullet$ y cualquier grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, existe una sucesión exacta larga y natural*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{n+1}(X_\bullet, \pi_1(\mathbb{A})) \arrow[r] & H^n(X_\bullet, \mathbb{A}) \arrow[r] & H^n(X_\bullet, \pi_0(\mathbb{A})) \arrow[dll] \\ & H^{n+2}(X_\bullet, \pi_1(\mathbb{A})) \arrow[r] & H^{n+1}(X_\bullet, \mathbb{A}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}.$$

Si consideramos ahora $X_\bullet = S(X)$ el complejo singular asociado a un espacio topológico X, la sucesión anterior nos da una relación general de nuestra cohomología con la cohomología singular de espacios topológicos. En particular tenemos:

Corolario 2.1.9. *Sea X un espacio topológico y $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico:*

i) Si $\mathbb{A}$ es conexo (es decir, $\pi_0(\mathbb{A}) = 0$), entonces

$$H^n(S(X), \mathbb{A}) \cong H^{n+1}(X, \pi_1(\mathbb{A})), \qquad n \geq 0.$$

ii) Si $\mathbb{A}$ es discreto (es decir, $\pi_1(\mathbb{A}) = 0$), entonces

$$H^n(S(X), \mathbb{A}) \cong H^n(X, \pi_0(\mathbb{A})), \qquad n \geq 0.$$

Aquí, $H^n(X, -)$ denota la cohomología singular de espacios topológicos.

En el siguiente apartado estudiamos otros ejemplos de teorías de cohomología relacionados con la definida aquí.

2.2 Algunos ejemplos y casos particulares.

2.2.1 Cohomología de grupos con coeficientes en categorías de Picard simétricas.

En [56], Ulbrich define los grupos de cohomología de un grupo G con coeficientes en una categoría de Picard simétrica (i.e., un grupo categórico simétrico estrictamente coherente) $\mathbb{A}$ con una estructura de G-módulo izquierda coherente (véase Definición 3.1.3). Estos grupos de cohomología son isomorfos, como Ulbrich prueba en [57], a los grupos de cohomología definidos por Frölich y Wall en [25] de G con coeficientes en un grupo categórico G-graduado canónicamente asociado a $\mathbb{A}$ (véase el Ejemplo 3.1.6).

Si suponemos que la estructura de G-módulo es trivial, estos grupos de cohomología se definen como los del complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(G,\mathbb{A}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}^1(G,\mathbb{A}) \xrightarrow{\partial} \cdots \longrightarrow \mathcal{C}^n(G,\mathbb{A}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}^{n+1}(G,\mathbb{A}) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

que no es otro, si quitamos el grupo categórico 0, que el asociado al complejo cosimplicial $\mathbb{A}^{K(G,1)}$, donde $K(G,1)$ es el espacio de Eilenberg-MacLane definido por G. Concluimos entonces que

$$H^n(K(G,1),\mathbb{A}) = H^{n+1}_{Ulb}(G,\mathbb{A}), \qquad n \geq 0. \tag{2.14}$$

Por otro lado, en este caso, el grupo categórico G-graduado asociado a $\mathbb{A}$ es el producto cartesiano $(G \rightrightarrows \mathbf{1}) \times \mathbb{A}$ con graduación dada por la proyección. Entonces, de [57, Teorema 2.2], obtenemos isomorfismos:

$$H^n(K(G,1),\mathbb{A}) \cong H^{n+1}_{Fro}(G,(G \rightrightarrows \mathbf{1}) \times \mathbb{A}), \qquad n \geq 0.$$

En particular, si $\mathbb{A}$ es un grupo categórico discreto definido por un grupo abeliano A, i.e. $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows A)$, entonces

$$H^n(K(G,1), A \rightrightarrows A) \cong H^n_{E-M}(G,A), \qquad n \geq 0;$$

mientras que si $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows \mathbf{1})$ es el grupo categórico con un sólo objeto definido por A, entonces

$$H^n(K(G,1), A \rightrightarrows \mathbf{1}) \cong H^{n+1}_{E-M}(G,A), \qquad n \geq 0,$$

donde $H^*_{E-M}(G,A)$ denota la cohomología de grupos de Eilenberg-MacLane de G con coeficientes en el G-módulo trivial A.

Finalmente, en el caso estricto, esto es, si $\mathbb{A}=\mathbb{A}(\delta)$ es el grupo categórico definido por un módulo cruzado estable $\delta : N \to O$, (véase Ejemplo 1.1.4), entonces, para $X_\bullet$ cualquier conjunto simplicial, $H^n(X_\bullet,\mathbb{A}(\delta)) = \mathbb{H}^n(X_\bullet,\mathbb{A}(\delta))$, $n\geq 0$, donde estos últimos son los grupos de cohomología estudiados en [6], y que son también definidos por medio de la cohomología de Takeuchi-Ulbrich.

2.2.2 H^1 y Torsores.

Para $X_\bullet$ un conjunto simplicial y $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico, el grupo $H^1(X_\bullet,\mathbb{A})$ tiene la siguiente descripción alternativa:

Un 1-cociclo de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ se identifica con un par (P,t), donde

$$P : X_1 \to Obj(\mathbb{A}) \quad \text{y} \quad t : X_2 \to Mor(\mathbb{A})$$

son aplicaciones tal que, para todo $z\in X_2$, $t(z)$ es el morfismo en $\mathbb{A}$

$$t(z) : Pd_0(z) + Pd_2(z) \to Pd_1(z), \tag{2.15}$$

(correspondiéndose canónicamente con el morfismo $g : \partial P \to 0$), y tal que el siguiente diagrama es conmutativo, para todo $w\in X_3$:

$$\begin{tikzcd} Pd_0d_0(w)+Pd_2d_0(w)+Pd_2d_2(w) \arrow[r, "t(d_0(w))+1"] \arrow[d, "1+t(d_3(w))"'] & Pd_1d_0(w)+Pd_2d_2(w) \arrow[d, "t(d_2(w))"] \\ Pd_0d_0(w)+Pd_1d_3(w) \arrow[r, "t(d_1(w))"'] & Pd_1d_2(w) \end{tikzcd} \tag{2.16}$$

que se corresponde con la condición de cociclo. Por esta identificación, la condición de normalización se expresa por:

$$P(s_0(x)) = 0, \qquad x\in X_0,$$
$$t(s_0(y)) = r_{P(y)} : P(y)+0 \to P(y), \qquad y\in X_1,$$
$$t(s_1(y)) = l_{P(y)} : 0+P(y) \to P(y), \qquad y\in X_1.$$

En cuanto a la relación de cohomología, dos pares (P,t) y (P',t'), como anteriormente, definen el mismo elemento en $H^1(X_\bullet,\mathbb{A})$ si existen aplicaciones

$$Q : X_0 \to Obj(\mathbb{A}), \qquad q : X_1 \to Mor(\mathbb{A})$$

tal que, para cada $y \in X_1$,

$$q(y) : Qd_0(y) + P(y) \to P'(y) + Qd_1(y),$$

(correspondiéndose canónicamente con la existencia de un morfismo en $\mathbb{A}^{X_1}$, $f : \partial Q \otimes P' \to P$) y tal que el diagrama en $\mathbb{A}$

$$\begin{tikzcd} Qd_0d_1(z) + Pd_0(z) + Pd_2(z) \arrow[r, "1+t(z)"] \arrow[d, "q(d_0(z))+1"'] & Qd_0d_1(z) + Pd_1(z) \arrow[dd, "q(d_1(z))"] \\ P'd_0(z) + Qd_1d_0(z) + Pd_2(z) \arrow[d, "1+q(d_2(z))"'] & \\ P'd_0(z) + P'd_2(z) + Qd_1d_2(z) \arrow[r, "t'(z)+1"'] & P'd_1(z) + Qd_1d_2(z) \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

es conmutativo, para todo $z \in X_2$. Esta conmutatividad expresa que el morfismo, en $\mathbb{A}^{X_1}$, $f : \partial Q \otimes P' \to P$ define un morfismo $f : (\partial Q, \chi_Q) \otimes (P', g') \to (P, g)$ en $Z^1(X_\bullet, \mathbb{A})$. Finalmente, si (P,t) y (P',t') son normalizados, entonces el par (Q,q) puede elegirse normalizado: lo que se expresa por la condición

$$q(s_0(x)) = l^{-1}_{Q(x)} \cdot r_{Q(x)} : Q(x) + 0 \to 0 + Q(x), \quad x \in X_0.$$

El grupo $H^1(X_\bullet,\mathbb{A})$ es entonces el correspondiente conjunto cociente. La suma de elementos $[(P,t)], [(P',t')] \in H^1(X_\bullet,\mathbb{A})$ es dada por $[(P,t)] + [(P',t')] = [(P+P',t'')]$, donde $t'' : X_2 \to Mor(\mathbb{A})$ se define, para cada $z \in X_2$, por la composición

$$(P+P')(d_0(z))+(P+P')(d_2(z)) \xrightarrow{1+c+1} Pd_0(z)+Pd_2(z)+P'd_0(z)+P'd_2(z) \xrightarrow{t(z)+t'(z)} (P+P')(d_1(z)) \ .$$

El elemento neutro es $[(0, l_0 = r_0)]$ y el opuesto de $[(P,t)]$ es $[(-P,\tilde{t})]$, donde $\tilde{t} : X_2 \to Mor(\mathbb{A})$ es dada por la composición

$$-Pd_0(z) - Pd_2(z) \xrightarrow{can} -(Pdo(z) + Pd_2(z)) \xrightarrow{-t(z)} -Pd_1(z) \ .$$

Después de esta identificación, observamos que $H^1(X_\bullet, \mathbb{A})$ coincide con el conjunto de 2-cohomología $\mathbf{H}^2(X_\bullet, \mathbb{A})$ definido en [12], cuando los coeficientes son simétricos.

En particular, si $X_\bullet = Ner(\underline{\mathrm{B}})$ es el nervio de una categoría pequeña $\underline{\mathrm{B}}$, resulta entonces que $H^1(Ner(\underline{\mathrm{B}}), \mathbb{A})$ coincide con el conjunto de 2-cohomología $\mathbb{H}^2(\underline{\mathrm{B}}, \mathbb{A})$ de $\underline{\mathrm{B}}$ con coeficientes en $\mathbb{A}$, definido por Cegarra-Garzón en [14].

Entonces, apoyándonos en el Teorema 3.3 del citado trabajo, se tiene una biyección

$$H^1(Ner(\underline{\mathrm{B}}), \mathbb{A}) \cong Tors[\underline{\mathrm{B}}, \mathbb{A}],$$

donde $Tors[\underline{\mathrm{B}}, \mathbb{A}]$ es el conjunto de componentes conexas de la categoría de $\underline{\mathrm{B}}$-torsores sobre $\mathbb{A}$. Un $\underline{\mathrm{B}}$-*torsor sobre* $\mathbb{A}$ [14, Definición 2.5] es una $\underline{\mathrm{B}}$-categoría, es decir, un funtor $F : \underline{\mathrm{E}} \to \underline{\mathrm{B}}$, dotada de una $\mathbb{A}$-acción simplemente transitiva, es decir, un $\underline{\mathrm{B}}$-funtor $\mathbb{A} \times \underline{\mathrm{E}} \xrightarrow{ac} \underline{\mathrm{E}}$ (verificando las condiciones usuales de acción salvo isomorfismos naturales coherentes) de forma que el funtor $\mathbb{A} \times \underline{\mathrm{E}} \xrightarrow{(ac,pr)} \underline{\mathrm{E}} \times_{\underline{\mathrm{B}}} \underline{\mathrm{E}}$ es una equivalencia de categorías. Se supone además que el funtor F es sobreyectivo en morfismos.

La biyección anterior define en $Tors[\underline{\mathrm{B}}, \mathbb{A}]$ una estructura natural de grupo abeliano inducida por la de $H^1(Ner(\underline{\mathrm{B}}), \mathbb{A})$.

Finalmente, si $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\delta)$ es el grupo categórico asociado a un módulo cruzado estable $\delta : N \to O$ y $X_\bullet = K(G, 1)$, para G un grupo arbitrario, entonces es fácil ver que un 1-cociclo de $K(G, 1)$ con coeficientes en $\mathbb{A}(\delta)$ se traduce exactamente en un 2-cociclo de Dedecker de G con coeficientes en δ, [17], y en definitiva podemos concluir con un isomorfismo de grupos

$$H^1(K(G, 1), \mathbb{A}(\delta)) \cong \mathbb{H}^2_{Deck}(G, \delta),$$

donde la estructura de grupo del segundo viene asegurada por la existencia del operador corchete $\{-, -\} : O \times O \to N$, [7, Proposición 2.4]

2.2.3 H^2 y Extensiones.

Procedemos como en el caso anterior: Un 2-cociclo de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ puede identificarse con un par de aplicaciones

$$P : X_2 \to Obj(\mathbb{A}) \quad \text{y} \quad t : X_3 \to Mor(\mathbb{A})$$

tal que, para cada $z \in X_3$, $t(z)$ es el morfismo en $\mathbb{A}$

$$t(z) : Pd_0(z) + Pd_2(z) \to Pd_3(z) + Pd_1(z).$$

La condición de cociclo establece que, para cada $w \in X_4$, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} Pd_0d_0(w) + Pd_2d_0(w) + \\ Pd_2d_2(w) \end{matrix} \arrow[r, "t(d_0(w))+1"] \arrow[d, "1+t(d_3(w))"'] & \begin{matrix} Pd_3d_0(w) + Pd_1d_0(w) + \\ Pd_2d_2(w) \end{matrix} \arrow[d, "1+t(d_2(w))"] \\
\begin{matrix} Pd_0d_0(w) + Pd_3d_3(w) + \\ Pd_1d_3(w) \end{matrix} \arrow[d, "c+1"'] & \begin{matrix} Pd_3d_0(w) + Pd_3d_2(w) + \\ Pd_1d_2(w) \end{matrix} \arrow[d, "t(d_4(w))+1"] \\
\begin{matrix} Pd_3d_3(w) + Pd_0d_0(w) + \\ Pd_1d_3(w) \end{matrix} \arrow[r, "1+t(d_1(w))"'] & \begin{matrix} Pd_3d_4(w) + Pd_1d_4(w) + \\ Pd_1d_2(w) \end{matrix}
\end{tikzcd} \tag{2.18}$$

mientras que la condición de normalización se traduce en las siguientes igualdades:

$$P(s_0(x)) = P(s_1(x)) = 0, \quad x \in X_1,$$

$$t(s_0(y)) = c_{P(y),0} : P(y) + 0 \to 0 + P(y), \quad y \in X_2,$$

$$t(s_1(y)) = id_{0+P(y)} : 0 + P(y) \to 0 + P(y), \quad y \in X_2,$$

$$t(s_2(y)) = c_{0,P(y)} : 0 + P(y) \to P(y) + 0, \quad y \in X_2.$$

Dados 2-cociclos (P, t) y (P', t') de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$, representan la misma clase de cohomología en $H^2(X_\bullet, \mathbb{A})$ si existe un par de aplicaciones

$$Q : X_1 \to Obj(\mathbb{A}) \quad \text{y} \quad q : X_2 \to Mor(\mathbb{A})$$

con

$$q(y) : P(y) + Qd_1(y) \to Qd_2(y) + Qd_0(y) + P'(y),$$

para $y \in X_2$ y tal que el diagrama, para todo $z \in X_3$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & Pd_0(z){+}Qd_2d_2(z){+}Qd_0d_2(z){+}P'd_2(z) \arrow[dr, "c+1"] & & & \\
 & & Qd_2d_2(z){+}Pd_0(z){+}Qd_0d_2(z){+}P'd_2(z) \arrow[dr, "1+q(d_0(z))+1"] & & \\
Pd_0(z){+}Pd_2(z){+}Qd_1d_2(z) \arrow[uur, "1+q(d_2(z))"] \arrow[dr, "t(z)+1"'] & & & Qd_2d_2(z){+}Qd_2d_0(z){+}Qd_0d_0(z){+}P'd_0(z){+}P'd_2(z) \arrow[dr, "1+t'(z)"] & \\
 & Pd_3(z){+}Pd_1(z){+}Qd_1d_2(z) \arrow[dr, "1+q(d_1(z))"'] & & & Qd_2d_3(z){+}Qd_0d_3(z){+}Qd_0d_1(z){+}P'd_3(z){+}P'd_1(z) \\
 & & Pd_3(z){+}Qd_2d_1(z){+}Qd_0d_1(z){+}P'd_1(z) \arrow[dr, "q(d_3(z))+1"'] & & \\
 & & & Qd_2d_3(z){+}Qd_0d_3(z){+}P'd_3(z){+}Qd_0d_1(z){+}P'd_1(z) \arrow[uur, "1+c+1"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Si los 2-cociclos (P, t) y (P', t') son también normalizados, se puede suponer que el coborde (Q, q) es normalizado, lo que se expresa por las condiciones:

$$Qs_0(t) = 0, \quad t \in X_0,$$

$$q(s_0(x)) = r^{-1}_{0+Q(x)} : 0 + Q(x) \to 0 + Q(x) + 0, \quad x \in X_1,$$

$$q(s_1(x)) = r^{-1}_{Q(x)+0} \cdot c_{0,Q(x)} : 0 + Q(x) \to Q(x) + 0 + 0, \quad x \in X_1.$$

$H^2(X_\bullet, \mathbb{A})$ es el correspondiente conjunto cociente de 2-cociclos normalizados bajo la relación de equivalencia definida por los cobordes. La estructura de grupo abeliano de $H^2(X_\bullet, \mathbb{A})$ se traduce, con esta identificación, en

$$[(P, t)] + [(P', t')] = [(P + P', t'')], \tag{2.19}$$

donde $t'' : X_3 \to Mor(\mathbb{A})$ es definido, para cada $z \in X_3$, como la composición

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} Pd_0(z)+P'd_0(z)+ \\ Pd_2(z)+P'd_2(z) \end{matrix} \arrow[rr, "t''(z)"] \arrow[d, "1+c+1"'] & & \begin{matrix} Pd_3(z)+P'd_3(z)+ \\ Pd_1(z)+P'd_1(z) \end{matrix} \\
\begin{matrix} Pd_0(z)+Pd_2(z)+ \\ P'd_0(z)+P'd_2(z) \end{matrix} \arrow[rr, "t(z)+t'(z)"'] & & \begin{matrix} Pd_3(z)+Pd_1(z)+ \\ P'd_3(z)+P'd_1(z) \end{matrix} \arrow[u, "1+c+1"']
\end{tikzcd}$$

Con esta identificación nos es más fácil relacionar este grupo de cohomología con el conjunto de cohomología definido por Breen en [2], así como el definido por Carrasco-Cegarra, [9].

Dados G un grupo y $\mathbb{G}$ un grupo categórico (no necesariamente simétrico), Breen define un conjunto de cohomología uno dimensional, $\mathbf{H}^1_{Breen}(G, \mathbb{G} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{G}))$ de G con coeficientes en el *cuadrado cruzado* $\mathbb{G} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{G})$, donde $\mathcal{E}q(\mathbb{G})$ es el grupo categórico de autoequivalencias del Ejemplo 1.1.3 e i es el homomorfismo de grupos categóricos que asocia a cada objeto X de $\mathbb{G}$ el homomorfismo de conjugación por X, $i_X : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ (i.e., $i_X(Y) = X + Y - X$).

Si consideramos ahora un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, entonces el homomorfismo $\mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{A})$ es homotópico al homomorfismo constante $1_{\mathbb{A}}$, esto es, existe una transformación monoidal $\theta : i \Rightarrow 1_{\mathbb{A}}$, que asocia a cada objeto X de $\mathbb{A}$ el homomorfismo en $\mathcal{E}q(\mathbb{A})$, $\theta_X : i_X \Rightarrow 1_{\mathbb{A}}$, dado por la composición

$$i_X(Y) = X + Y - X \xrightarrow{c+1} Y + X - X \xrightarrow{1+m} Y + 0 \xrightarrow{r} Y \ ,$$

para cada $Y \in Obj(\mathbb{A})$.

Entonces, en este caso, un 1-cociclo de Breen de G con coeficientes en $\mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{A})$ consiste en dar una terna (j, P, t), donde $j = (j, \mu) : (G \rightrightarrows G) \to \mathcal{E}q(\mathbb{A})$ es un homomorfismo de grupos categóricos (i.e., una acción de G sobre $\mathbb{A}$ según la Definición 3.1.1) y $P : G^2 \to Obj(\mathbb{A})$, $t : G^3 \to Mor(\mathbb{A})$ son aplicaciones tales que

$$t_(g_1, g_2, g_3) : \ {}^{g_1}P(g_2, g_3) + P(g_1, g_2 + g_3) \to P(g_1, g_2) + P(g_1 + g_2, g_3)$$

y, para todo $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}{}^{g_1+g_2}P(g_3,g_4)+{}^{g_1}P(g_2,g_3+g_4)\\ +P(g_1,g_2+g_3+g_4)\end{array} & \xrightarrow{1+t(g_1,g_2,g_3+g_4)} & \begin{array}{c}{}^{g_1+g_2}P(g_3,g_4)+P(g_1,g_2)\\ +P(g_1+g_2,g_3+g_4)\end{array}\\
\Big\downarrow {\scriptstyle {}^{g_1}t(g_2,g_3,g_4)+1} & & \Big\downarrow {\scriptstyle c+1}\\
\begin{array}{c}{}^{g_1}P(g_2,g_3)+{}^{g_1}P(g_2+g_3,g_4)\\ +P(g_1,g_2+g_3+g_4)\end{array} & & \begin{array}{c}P(g_1,g_2)+{}^{g_1+g_2}P(g_3,g_4)\\ +P(g_1+g_2,g_3+g_4)\end{array}\\
\Big\downarrow {\scriptstyle 1+t(g_1,g_2+g_3,g_4)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 1+t(g_1+g_2,g_3,g_4)}\\
\begin{array}{c}{}^{g_1}P(g_2,g_3)+P(g_1,g_2+g_3)\\ +P(g_1+g_2+g_3,g_4)\end{array} & \xrightarrow[t(g_1,g_2,g_3)+1]{} & \begin{array}{c}P(g_1,g_2)+P(g_1+g_2,g_3)\\ +P(g_1+g_2+g_3,g_4)\end{array}
\end{array} \tag{2.20}$$

donde hemos denotado la operación del grupo G también aditivamente y la imagen de un objeto X de $\mathbb{A}$ por $j(g)$ es denotada por ${}^{g}X$.

Sea $X_\bullet = K(G,1)$, como es bien conocido, los operadores cara $d_i : K(G,1)_{n+1} = G^{n+1} \to K(G,1)_n = G^n$, $n \geq 1$, vienen dados por

$$d_i(g_1,...,g_{n+1}) = \begin{cases} (g_2,...,g_{n+1}), & \text{si } i=0\\ (g_1,...,g_i+g_{i+1},...,g_{n+1}), & \text{si } 1\leq i\leq n\\ (g_1,...,g_n), & \text{si } i=n+1 \end{cases}$$

con lo que el diagrama (2.18), para $w = (g_1,g_2,g_3,g_4) \in G^4$, coincide con (2.20), cuando $j : (G \rightrightarrows G) \to \mathcal{E}q(\mathbb{A})$ es el homomorfismo nulo, es decir, $j(g) = 1_{\mathbb{A}}$, para todo $g \in G$. En otras palabras, tenemos definida una aplicación

$$\Delta : Z^2(K(G,1),\mathbb{A}) \to \mathbf{Z}^1_{Breen}(G, \mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{A}))$$

$$(P,t) \mapsto \Delta(P,t) = (1,P,t),$$

que aplica 2-cociclos normalizados en 1-cociclos de Breen reducidos. Además, la relación de cohomología entre 2-cociclos es equivalente a la relación de cohomología de Breen entre sus correspondientes imágenes. En definitiva, Δ induce una aplicación inyectiva

$$\Delta : H^2(K(G,1),\mathbb{A}) \to \mathbf{H}^1_{Breen}(G, \mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{A}))$$

que establece la relación que buscábamos.

El conjunto $\mathbf{H}^1_{Breen}(G, \mathbb{A} \xrightarrow{i} \mathcal{E}q(\mathbb{A}))$ está en biyección [2, Proposición 2.2.6] con el conjunto $Ext(G, \mathbb{A})$ de clases de equivalencia de extensiones de G por $\mathbb{A}$, esto es, sucesiones exactas de grupos categóricos, según la Definición 1.3.2, de la forma $\varepsilon : \mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{q} \underline{G}$, (donde $\mathbb{H}$ no es necesariamente simétrico). Por otro lado, por (2.14), $H^2(K(G,1), \mathbb{A}) = H^3_{Ulb}(G, \mathbb{A})$ y éste último [56, Teorema 1.8] es biyectivo al conjunto $Ext_C(G, \mathbb{A})$ de clases de equivalencia de *extensiones centrales de G por* $\mathbb{A}$, esto es, extensiones como anteriormente, junto con isomorfismos naturales $\{\varphi_{P,X} : X + j(P) \to j(P) + X\}_{(P,X) \in Obj(\mathbb{A}) \times Obj(\mathbb{H})}$ verificando ciertas condiciones de coherencia. En ambos casos, el método utilizado para construir una extensión a partir de un cociclo es una extensión del análisis de Schreier para extensiones de grupos y así, se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^2(K(G,1), \mathbb{A}) \arrow[d, hook, "\Delta"'] & \cong & Ext_C(G, \mathbb{A}) \arrow[d, hook] \\
\mathbf{H}^1_{Breen}(G, i : \mathbb{A} \to \mathcal{E}q(\mathbb{A})) & \cong & Ext(G, \mathbb{A})
\end{tikzcd}$$

La noción de extensión central de Ulbrich es un caso particular de la noción más general de *extensión central de un grupo categórico* $\mathbb{G}$ *por un grupo categórico trenzado* $\mathbb{K}$ establecida por Carrasco-Cegarra [10], y que son definidas como pares (ε, c), donde $\varepsilon : \mathbb{K} \xrightarrow{j} \mathbb{F} \xrightarrow{p} \mathbb{G}$ es una sucesión exacta de grupos categóricos y $c = (c_{X,\sigma} : j(X) \otimes \sigma \to \sigma \otimes j(X))_{(X,\sigma) \in Obj(\mathbb{K}) \times Obj(\mathbb{F})}$ es una familia de isomorfismos naturales en $\mathbb{F}$ sujeta a ciertas condiciones de coherencia.

La clasificación cohomológica de estas extensiones, [10, Teorema 3.5], se establece en términos de un conjunto de 1-cohomología de $\mathbb{G}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$: $\mathbb{H}^1_{C-C}(\mathbb{G}, \mathbb{K})$. Si tomamos como coeficientes un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ y consideramos el conjunto simplicial $X_\bullet = Ner_2(\mathbb{G})$ asociado al grupo categórico $\mathbb{G}$, [9], (véase el Ejemplo 2.3.6), entonces $H^2(Ner_2(\mathbb{G}), \mathbb{A})$ coincide, después de la identificación anterior, exactamente con $\mathbb{H}^1_{C-C}(\mathbb{G}, \mathbb{A})$ y, por tanto, se tiene una biyección

$$H^2(Ner_2(\mathbb{G}), \mathbb{A}) \cong Ext_{Cen}[\mathbb{G}, \mathbb{A}], \tag{2.21}$$

que, en particular, define de forma natural una estructura de grupo abeliano en $Ext_{Cen}[\mathbb{G}, \mathbb{A}]$.

Finalizamos, como en los dos apartados anteriores, con el caso particular de que $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\delta)$, siendo $\delta : N \to O$ un módulo cruzado estable. Así para G un grupo cualquiera, es fácil ver, haciendo uso de la identificación anterior, que $H^2(K(G,1), \mathbb{A}(\delta))$ no es otro que $\mathbb{H}^3(G, \delta)$, el conjunto de 3-cohomología no abeliana de G con coeficientes en δ estudiada en [7], aunque en dicho trabajo se consideran módulos cruzados reducidos. En particular, este conjunto $\mathbb{H}^3(G, \delta)$ tiene de forma natural una estructura de grupo abeliano cuando δ es estable.

2.3 Representatividad homotópica. Los complejos $K(\mathbb{A}, n)$.

Sea $\mathbb{A}$ un grupo categórico. A continuación definiremos y caracterizaremos ciertos conjuntos simpliciales $K(\mathbb{A}, n)$ que juegan, para la cohomología definida en 2.1, un papel análogo al jugado por los complejos de Eilenberg-MacLane, $K(A, n)$, en cohomología simplicial con coeficientes en un grupo abeliano A. De hecho, estos complejos resultan ser una generalización natural de los complejos de Eilenberg-MacLane.

Veremos además que la familia $\{K(\mathbb{A}, n)\}_{n \geq 0}$ constituye un Ω-spectrum cuya correspondiente teoría de cohomología es precisamente la definida por nosotros.

Haremos uso reiterado de los conjuntos simpliciales representables $\Delta[n]$, $n \geq 0$, como funtores en $\mathbf{Set}^{\Delta^{op}}$. La categoría Δ tiene como objetos los conjuntos ordenados $[0] = 0$, $[1] = \{0, 1\}, \ldots$ y funciones preservando el orden entre ellos como flechas.

Entonces $\Delta[n] = Hom_{\Delta}(-, [n])$ y, así, un m-símplex de $\Delta[n]$ es una $(m+1)$-upla $(a_0, \ldots, a_m)$ de enteros con $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_m \leq n$. Mientras que los operadores cara y de degeneración

$$\begin{tikzcd} \Delta[n]_m \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_m"'] & \Delta[n]_{m-1} \arrow[l, bend right=30, "s_0"'] \arrow[l, bend right=60, "s_{m-1}"'] \end{tikzcd}$$

están definidos por $d_i(a_0,..,a_m) = (a_0,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_m)$, $0 \leq i \leq m$, y $s_j(a_0,..,a_{m-1}) = (a_0,...,a_j,a_j,...,a_{m-1})$, $0 \leq j \leq m-1$.

Denotaremos por $\imath_n = (0,..,n) \in \Delta[n]_n$ al único n-símplex no degenerado de $\Delta[n]$. Cualquier otro símplex no degenerado de $\Delta[n]$ se escribe de forma única como:

$$d_{i_1}...d_{i_k}(\imath_n), \quad \text{con } 0 \leq i_1 < ... < i_k \leq n \text{ y } 1 \leq k \leq n.$$

Recordemos que dar un n-símplex en un conjunto simplicial $X_\bullet$ es equivalente a dar una aplicación simplicial desde $\Delta[n]$ en $X_\bullet$, que aplica $\imath_n$ en el n-símplex elegido. Así, se tienen aplicaciones simpliciales

$$\delta_i : \Delta[n] \to \Delta[n+1] \qquad \text{y} \qquad \sigma_j : \Delta[n+1] \to \Delta[n],$$

$0 \leq i \leq n+1$, $0 \leq j \leq n$, únicas tales que

$$\delta_i(\imath_n) = d_i(\imath_{n+1}) \qquad \text{y} \qquad \sigma_j(\imath_{n+1}) = s_j(\imath_n)$$

Estas aplicaciones simpliciales δ_i, σ_j son, de hecho, las inducidas por los morfismos en Δ, $\varepsilon^i : [n] \to [n+1]$ y $\eta^j : [n+1] \to [n]$, respectivamente, y están definidas por

$$\varepsilon^i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{si } k \geq i \end{cases} \qquad \eta^j(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq j \\ k-1 & \text{si } k > j \end{cases}$$

Consecuentemente, el diagrama

$$\Delta[-] \quad = \quad \begin{tikzcd} \Delta[0] \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & \Delta[1] \arrow[l, bend right, "\sigma_0"'] \arrow[r, shift left=2, "\delta_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\delta_2"'] & \Delta[2] \arrow[l, bend right, "\sigma_0"'] \arrow[l, bend right=50, "\sigma_1"'] \arrow[r, shift left=3, "\delta_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "\delta_3"'] & \Delta[3] \arrow[l, bend right, "\sigma_0"'] \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend right=60, "\sigma_2"'] \cdots \end{tikzcd} \tag{2.22}$$

constituye un complejo cosimplicial de conjuntos simpliciales. Aplicando el funtor $Z^n_N(-,\mathbb{A})$, (véase 2.1.4), para cada $n \geq 0$, obtenemos un complejo simplicial de grupoides y entonces

Definición 2.3.1. *Sea $\mathbb{A}$ grupo categórico simétrico y $n \geq 0$, definimos el complejo n-nervio de $\mathbb{A}$, $K(\mathbb{A},n)$, como el conjunto simplicial de objetos del complejo simplicial de grupoides $Z^n_N(\Delta[-],\mathbb{A})$. Es decir,*

$$K(\mathbb{A},n) \quad = \quad \begin{tikzcd} \cdots K(\mathbb{A},n)_3 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] & K(\mathbb{A},n)_2 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend right=60, "s_2"'] \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & K(\mathbb{A},n)_1 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[l, bend right=50, "s_1"'] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & K(\mathbb{A},n)_0 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \end{tikzcd},$$

donde $K(\mathbb{A},n)_q = Obj(Z^n_N(\Delta[q],\mathbb{A}))$ *y así sus elementos son pares* (P,g), *donde* $P : \Delta[q]_n \to Obj(\mathbb{A})$ *y* $g : \Delta[q]_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$ *son aplicaciones de forma que cada* $(a_0,...,a_{n+1}) \in \Delta[q]_{n+1}$, $g(a_0,...,a_{n+1})$ *es el morfismo en* $\mathbb{A}$

$$g(a_0,...,a_{n+1}) : \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i Pd_i(a_0,...,a_{n+1}) \to 0 \tag{2.23}$$

y tal que $\partial g = \mu_0^{-1}\cdot\chi_P$, *o equivalentemente si* $(a_0,..,a_{n+2}) \in \Delta[q]_{n+2}$, *entonces*

$$\sum_{j=0}^{n+2}(-1)^j gd_j(a_0,...,a_{n+2}) = can : \sum_{j=0}^{n+2}(-1)^j\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i Pd_id_j(a_0,...,a_{n+2}) \to 0$$

Puesto que además se trata de cociclos normalizados, entonces se ha de verificar también que

$$Ps_j(a_0,...,a_{n-1}) = 0, \tag{2.24}$$

para todo $(a_0,...,a_{n-1}) \in \Delta[q]_{n-1}$, $j = 0,...,n-1$ *y*

$$gs_j(a_0,...,a_n) = can : \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i Pd_is_j(a_0,...,a_n) \to 0, \tag{2.25}$$

para todo $(a_0,...,a_n) \in \Delta[q]_n$, $0 \le j \le n$.

Como observamos en 2.1.4, la función $Z^n_N(X_\bullet,-)$ define un funtor cuando nos restringimos a la categoría de grupos categóricos simétricos con homomorfismos estrictos en el objeto cero. En consecuencia, tenemos definido un funtor, para cada $n \ge 0$,

$$K(-,n) : \mathbf{GCS}_* \to \mathbf{Set}^{\Delta^{op}} \tag{2.26}$$

que en morfismos, asocia a cada homomorfismo $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ en $\mathbf{GCS}_*$, la aplicación simplicial $K(F,n) : K(\mathbb{A},n) \to K(\mathbb{B},n)$ definida en q-símplices $K(F,n)_q : K(\mathbb{A},n)_q \to K(\mathbb{B},n)_q$, $q \ge 0$, como la función sobre objetos del funtor $Z^n_N(\Delta[q],F) : Z^n_N(\Delta[q],\mathbb{A}) \to Z^n_N(\Delta[q],\mathbb{B})$, (véase 2.9).

La proposición siguiente describe las características homotópicas de los complejos $K(\mathbb{A},n)$:

Proposición 2.3.2. *Sea* $\mathbb{A}$ *un grupo categórico simétrico y* $n \ge 0$. *Entonces:*

i) Si $m < n$, $K(\mathbb{A}, n)_m = \mathbf{1}$, *el conjunto unitario.*

ii) $K(\mathbb{A}, n) = Cosk^{n+2}(K(\mathbb{A}, n))$, *el* $(n+2)$*-coesqueleto de la* $(n+2)$*-truncación de* $K(\mathbb{A}, n)$.

iii) Para todo $m \geq n+2$ *y todo* $0 \leq k \leq m$, *la aplicación canónica*

$$d\!\!\!/^{k} = (d_0, ..., \widehat{d_k}, ..., d_m) : K(\mathbb{A}, n)_m \to \Lambda^k_m(K(\mathbb{A}, n))$$

es una biyección. Así, $K(\mathbb{A}, n)$ *es un* $(n+1)$*-hipergrupoide en el sentido de Duskin-Glenn [18], [28].*

iv) $K(\mathbb{A}, n)$ *es un conjunto simplicial de Kan.*

v) Los grupos de homotopía de $K(\mathbb{A}, n)$ *son:*

$$\pi_j(K(\mathbb{A}, n)) = \begin{cases} 0, & si\ j \neq n, n+1 \\ \pi_0(\mathbb{A}), & si\ j = n \\ \pi_1(\mathbb{A}), & si\ j = n+1 \end{cases}$$

donde $\pi_0(\mathbb{A})$ *es el grupo de componentes conexas de* $\mathbb{A}$ *y* $\pi_1(\mathbb{A}) = \mathcal{A}ut_{\mathbb{A}}(0)$ *el grupo de automorfismos en* $\mathbb{A}$ *del objeto cero.*

Demostración.

Puesto que para $m < n$ todos los n-símplices y $(n+1)$-símplices en $\Delta[m]$ son degenerados, entonces $K(\mathbb{A}, n)_m = \mathbf{1}$ y se tiene *i)*. Por [28, lema 1.1.1], *ii)* es consecuencia directa de *iii)*. Veamos *iii)*:

Supongamos $r \geq 2$ y $(P, g), (P', g') \in K(\mathbb{A}, n)_{n+r}$ dos n-cociclos tales que $d_i(P, g) = (P\delta_i, g\delta_i) = (P'\delta_i, g'\delta_i) = d_i(P', g')$, para todo $0 \leq i \leq n+r$ con $i \neq k$ y $0 \leq k \leq n+r$. Puesto que cualquier n-símplex no degenerado $z \in \Delta[n+r]_n$ es de la forma

$$z = d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_r}(\imath_{n+r}) \quad \text{con } 0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n+r,$$

entonces podemos escribir $z = \delta_{i_1} d_{i_2 - 1} ... d_{i_r - 1}(\imath_{n+r-1})$, o también $z = \delta_{i_r} d_{i_1} ... d_{i_{r-1}}(\imath_{n+r-1})$. Por lo que $P(z) = P'(z)$ y $P = P'$. Análogamente, cualquier $(n+1)$-símplex de $\Delta[n+r]$ es de la forma $z = d_{i_1} d_{i_2} ... d_{i_{r-1}}(\imath_{n+r}) = \delta_{i_1} d_{i_2 - 1} ... d_{i_{r-1} - 1}(\imath_{n+r-1}) = \delta_{i_{r-1}} d_{i_1} ... d_{i_{r-2}}(\imath_{n+r-1})$, con $0 \leq i_1 < ...i_{r-1} \leq n+r$. Así, si $r \geq 3$, como anteriormente tenemos de forma automática que $g = g'$.

Sea $r = 2$ y $z = d_i(\imath_{n+2}) \in \Delta[n+2]_{n+1}$. Si $i \neq k$, entonces $g(z) = gd_i(\imath_{n+2}) = g\delta_i(\imath_{n+1}) = g'\delta_i(\imath_{n+1}) = g'd_i(\imath_{n+2}) = g'(z)$. Para el caso $z = d_k(\imath_{n+2})$, procedemos como sigue: Puesto que $P = P'$, entonces $\chi_P = \chi_{P'}$ y por la condición de cociclo sobre g y g', será $\partial g = \partial g'$, es decir,

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i gd_i(\imath_{n+2}) + (-1)^k gd_k(\imath_{n+2}) + \sum_{i=k+1}^{n+2}(-1)^i gd_i(\imath_{n+2}) =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i gd_i(\imath_{n+2}) + (-1)^k g'd_k(\imath_{n+2}) + \sum_{i=k+1}^{n+2}(-1)^i gd_i(\imath_{n+2}),$$

y en consecuencia, se tendrá también que $gd_k(\imath_{n+2}) = g'd_k(\imath_{n+2})$ y $g = g'$.

Tenemos pues que el morfismo canónico

$$\mathbb{d}^k : K(\mathbb{A}, n)_{n+r} \to \Lambda^k_{n+r}(K(\mathbb{A}, n))$$

es inyectivo. Respecto a la sobreyectividad, sea $r = 2$ y

$$\Big((P_0, g_0), ..., \widehat{(P_k, g_k)}, ..., (P_{n+2}, g_{n+2})\Big) \in \Lambda^k_{n+2}(K(\mathbb{A}, n)),$$

$0 \leq k \leq n+2$. Definimos $P : \Delta[n+2]_n \to Obj(\mathbb{A})$ por

$$P(d_i d_j(\imath_{n+2})) = \begin{cases} P_i(d_{j-1}(\imath_{n+1})) & \text{si } i \neq k \\ P_j(d_k(\imath_{n+1})) & \text{si } i = k \end{cases},$$

$0 \leq i < j \leq n+2$, y $g : \Delta[n+2]_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$ por $g(d_j(\imath_{n+2})) = g_j(\imath_{n+1})$, si $j \neq k$, que fácilmente se observa que tiene dominio $(\partial P)(d_j(\imath_{n+2}))$ y rango cero. Para $j = k$, definimos $g(d_k(\imath_{n+2})) : (\partial P)(d_k(\imath_{n+2})) \to 0$, como el único morfismo tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "\chi_P"] \arrow[d, "h"'] & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \arrow[r, "can"'] & \mathbf{4} \arrow[u, "(-1)^k gd_k(\imath_{n+2})"'] \end{tikzcd}$$

donde

$$\mathbf{1} = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\partial P)(d_i(\imath_{n+2})) + (-1)^k(\partial P)(d_k(\imath_{n+2})) + \\ + \sum_{i=k+1}^{n+2}(-1)^i(\partial P)(d_i(\imath_{n+2})),$$

$\mathbf{2} = 0,$
$\mathbf{3} = 0 + (-1)^k(\partial P)(d_k(\imath_{n+2})) + 0,$
$\mathbf{4} = (-1)^k(\partial P)(d_k(\imath_{n+2}))$
y
$h = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)g(d_i(\imath_{n+2})) + (-1)^k id + \sum_{i=k+1}^{n+2}(-1)g(d_i(\imath_{n+2})).$

Tenemos pues un elemento (P, g) en $K(\mathbb{A}, n)_{n+2}$ y claramente se verifica que $d\!\!l^k(P, g) = \Big((P_0, g_0), ..., \widehat{(P_k, g_k)}, ..., (P_{n+2}, g_{n+2})\Big)$.

Supongamos $r \geq 3$ y $\Big((P_0, g_0), ..., \widehat{(P_k, g_k)}, ..., (P_{n+r}, g_{n+r})\Big) \in \Delta^k_{n+r}(K(\mathbb{A}, n))$. Definimos $P : \Delta[n+r]_n \to Obj(\mathbb{A})$ y $g : \Delta[n+r]_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$ por

$$P(d_{i_1}...d_{i_r}(\imath_{n+r})) = \begin{cases} P_{i_1}(d_{i_2-1}...d_{i_r-1}(\imath_{n+r-1})) & \text{si } i_1 \neq k \\ P_{i_r}(d_{i_1}...d_{i_{r-1}}(\imath_{n+r-1})) & \text{si } i_1 = k \end{cases}$$

y

$$g(d_{i_1}...d_{i_{r-1}}(\imath_{n+r})) = \begin{cases} g_{i_1}(d_{i_2-1}...d_{i_{r-1}-1}(\imath_{n+r-1})) & \text{si } i_1 \neq k \\ g_{i_{r-1}}(d_{i_1}...d_{i_{r-2}}(\imath_{n+r-1})) & \text{si } i_1 = k \end{cases}.$$

Se tiene entonces un elemento $(P, g) \in K(\mathbb{A}, n)_{n+r}$ cuya imagen por $d\!\!l^k$ es $\Big((P_0, g_0), ..., \widehat{(P_k, g_k)}, ..., (P_{n+r}, g_{n+r})\Big)$.

Después de *i)* y *ii)*, la propiedad *iv)* se reduce a demostrarla en dimensión $n+1$. En primer lugar, observamos que, ya que todo $(n+1)$-símplex en $\Delta[n]$ es degenerado e $\imath_n \in \Delta[n]_n$ es el único n-símplex no degenerado, todo elemento $(P, g) \in K(\mathbb{A}, n)_n$ está totalmente determinado por la imagen $P(\imath_n) \in Obj(\mathbb{A})$. Entonces, usando de nuevo *i)*, un elemento de $\Lambda^k_{n+1}(K(\mathbb{A}, n))$ es simplemente una lista de objetos de $\mathbb{A}$, $(P_0, ..., \widehat{P_k}, ..., P_{n+1}) \in (Obj(\mathbb{A}))^{n+1}$. Definimos $P : \Delta[n+1]_n \to Obj(\mathbb{A})$ por

$$P(d_i(\imath_{n+1})) = \begin{cases} P_i & \text{si } i \neq k \\ (-1)^{k+1} \sum\limits_{i \neq k} (-1)^i P_i & \text{si } i = k \end{cases}$$

y $g : \Delta[n+1]_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$, por $g(\imath_{n+1}) : \sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i P d_i(\imath_{n+1}) \to 0$ el canónico determinado por los isomorfismos de asociatividad, conmutatividad, etc. y se tiene *iv)*.

De *iii)* y *iv)* se deduce que $\pi_j(K(\mathbb{A}, n)) = 0$, si $j \neq n, n+1$. Como hemos observado anteriormente $K(\mathbb{A}, n)_n$ se identifica con $Obj(\mathbb{A})$. Dados objetos A, A' de $\mathbb{A}$, la existencia de una homotopía de A en A' significará la existencia de un n-cociclo (P, g) de $\Delta[n+1]$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ tal que

$$P d_i(\imath_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < n \\ A & \text{si } i = n \\ A' & \text{si } i = n+1 \end{cases}$$

y donde $g(\imath_{n+1}) : (\partial P)(\imath_{n+1}) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (-1)^i 0 + (-1)^n A + (-1)^{n+1} A' \to 0$ es un morfismo en $\mathbb{A}$. Claramente la existencia de tal morfismo equivale a la existencia de un morfismo de A en A'. Así, $\pi_n(K(\mathbb{A}, n)) \cong \pi_0(\mathbb{A})$.

Finalmente, puesto que un $(n+1)$-símplex en $K(\mathbb{A}, n)$ con caras nulas es justamente un automorfismo en 0 y, por *iii)*, la relación de homotopía entre $(n+1)$-símplices es trivial, resulta que $\pi_{n+1}(K(\mathbb{A}, n)) \cong \pi_1(\mathbb{A})$. ■

2.3.3 (Descripción de $K(\mathbb{A}, n)$). A partir de la proposición anterior, y siguiendo los pasos de la demostración, podemos dar una descripción más explícita del conjunto simplicial $K(\mathbb{A}, n)$. Por *ii)*, $K(\mathbb{A}, n)$ está completamente determinado por su $(n+2)$-truncación. Ahora, por *i)*, $K(\mathbb{A}, n)_m = 0$, para $m < n$, mientras que según hemos observado $K(\mathbb{A}, n)_n \cong Obj(\mathbb{A})$. En dimensión $n+1$, un n-cociclo normalizado (P, g) de $\Delta[n+1]$ con coeficientes en $\mathbb{A}$ está totalmente determinado por las imágenes de los elementos no degenerados, así, por la $(n+2)$-upla de objetos de $\mathbb{A}$, $(P d_0(\imath_{n+1}), ..., P d_{n+1}(\imath_{n+1}))$ y el morfismo en $\mathbb{A}$, $g(\imath_{n+1}) : \sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i P d_i(\imath_{n+1}) \to 0$. Esto es, $K(\mathbb{A}, n)_{n+1}$ se identifica con el conjunto

$$\left\{(g, P_0, ..., P_{n+1}) \in Mor(\mathbb{A}) \times Obj(\mathbb{A})^{n+2} / \quad s(g) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i P_i, \quad t(g) = 0\right\}.$$

Análogamente, un elemento $(P, g) \in K(\mathbb{A}, n)_{n+2}$ está totalmente determinado por el conjunto de objetos de $\mathbb{A}$ $\{P d_i d_j(\imath_{n+2}) / \quad 0 \leq i < j \leq n+2\}$ y el conjunto de morfismos en $\mathbb{A}$ $\{g d_i(\imath_{n+2}) / \quad 0 \leq i \leq n+2\}$. Así, podemos escribir un elemento de $K(\mathbb{A}, n)_{n+2}$ como una matriz

$$A(g_i, P_{i,j}) = \begin{pmatrix} g_0 & P_{0,0} & \cdots & P_{0,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n+2} & P_{n+2,0} & \cdots & P_{n+2,n+1} \end{pmatrix},$$

con $g_i \in Mor(\mathbb{A})$, $0 \leq i \leq n+2$, y $P_{i,j} \in Obj(\mathbb{A})$, $0 \leq i \leq n+2$, $0 \leq j \leq n+1$, tal que *a)* $s(g_i) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j P_{i,j}$ y $t(g_i) = 0$; *b)* $P_{i,j} = P_{j-1,i}$ si $i > j$ y *c)* $\sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i g_i = can : \sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j P_{i,j} \to 0$, (que corresponde a la condición de cociclo $\partial g = \mu_0^{-1} \chi_P$).

Con estas identificaciones, $K(\mathbb{A}, n)$ es el conjunto simplicial $(n+2)$-coesqueleto del conjunto simplicial truncado siguiente:

$$K(\mathbb{A},n)_{n+2} \begin{array}{c} \xleftarrow{s_{n+1}} \\ \vdots \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow[d_{n+2}]{} \end{array} K(\mathbb{A},n)_{n+1} \begin{array}{c} \xleftarrow{s_{n}} \\ \vdots \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow[d_{n+1}]{} \end{array} Obj(\mathbb{A}) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow[d_n]{} \end{array} \mathbf{1} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \vdots \\ \xrightarrow[d_{n-1}]{} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \rightarrow \\ \xrightarrow[d_2]{} \end{array} \mathbf{1} \begin{array}{c} \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow[d_1]{} \end{array} \mathbf{1}$$

donde $d_i(g, P_0, ..., P_{n+1}) = P_i$, $\quad 0 \leq i \leq n+1 \quad$ y $\quad d_i(A(g_i, P_{i,j}))= (g_i, P_{i,0}, .., P_{i,n+1})$, $0 \leq i \leq n+2$. Los morfismos de degeneración están dados por: $s_j(P) = (can_P^j, 0, ..., 0, P, P, 0, ...0)$, $0 \leq j \leq n$, $P \in Obj(\mathbb{A})$, donde can_P^j denota el morfismo canónico

$$can_P^j : 0 + ... + 0 + (-1)^j P + (-1)^{j+1} P + 0 + ... + 0 \to 0$$

y para $(g,P_0,...,P_{n+1})\in K(\mathbb{A},n)_{n+1}$ y $0\leq j\leq n+1$,

$$s_j(g,P_0,...,P_{n+1})=\begin{pmatrix} can^{j-1}_{P_0} & 0 & \cdots & P_0 & P_0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ can^{j-1}_{P_{j-1}} & 0 & \cdots & P_{j-1} & P_{j-1} & 0 & \cdots & 0\\ g & P_0 & \cdots & P_{j-1} & P_j & P_{j+1} & \cdots & P_{n+1}\\ g & P_0 & \cdots & P_{j-1} & P_j & P_{j+1} & \cdots & P_{n+1}\\ can^{j}_{P_{j+1}} & 0 & \cdots & 0 & P_{j+1} & P_{j+1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ can^{j}_{P_{n+1}} & 0 & \cdots & 0 & P_{n+1} & P_{n+1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que por *iv)* en Proposición 2.3.2, para cada $n\geq 1$, el funtor $K(-,n)$ toma rango la categoría de complejos de Kan $(n-1)$-reducidos:

$$K(-,n):\mathbf{GCS}_*\to \text{Complejos de Kan } (n-1)\text{-reducidos} \tag{2.27}$$

de forma que para $(F,\mu):\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ un homomorfismo de grupos categóricos simétricos con $F(0)=0$, $K(F,n):K(\mathbb{A},n)\to K(\mathbb{B},n)$ es el extendido del morfismo simplicial $(n+2)$-truncado

$$\begin{array}{ccccccccc} K(\mathbb{A},n)_{n+2} & \overset{d_0}{\underset{d_{n+2}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} & K(\mathbb{A},n)_{n+1} & \overset{d_0}{\underset{d_{n+1}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} & Obj(\mathbb{A}) & \overset{d_0}{\underset{d_{n}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} & \mathbf{1} & \overset{d_0}{\underset{d_{n-1}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}}\cdots \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} & \mathbf{1}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle F_{n+2}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_n} & & \Big\| & & \Big\|\\ K(\mathbb{B},n)_{n+2} & \overset{d_0}{\underset{d_{n+2}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} & K(\mathbb{B},n)_{n+1} & \overset{d_0}{\underset{d_{n+1}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} & Obj(\mathbb{B}) & \overset{d_0}{\underset{d_{n}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} & \mathbf{1} & \overset{d_0}{\underset{d_{n-1}}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}}\cdots \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} & \mathbf{1} \end{array} \tag{2.28}$$

donde $F_n=F$ sobre objetos; F_{n+1} aplica un $(n+1)$-símplex $(g;P_0,...,P_{n+1})\in K(\mathbb{A},n)_{n+1}$ en $(F_{n+1}(g);F(P_0),...,F(P_{n+1}))$, siendo $F_{n+1}(g):\sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^iF(P_i)\to 0$ dado por la composición

$$\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^iF(P_i)\xrightarrow{\mu_{\{P_i\}}}F(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^iP_i)\xrightarrow{F(g)}0\,, \tag{2.29}$$

con $\mu_{\{P_i\}}$ el único morfismo canónico construido a partir de μ y los canónicos en $\mathbb{A}$. Finalmente, las identidades simpliciales conducen a la definición de

F_{n+2} por

$$F_{n+2}(A(g_i, P_{i,j})) = \begin{pmatrix} F_{n+1}(g_0) & F(P_{0,0}) & \cdots & F(P_{0,n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n+1}(g_{n+2}) & F(P_{n+2,0}) & \cdots & F(P_{n+2,n+1}) \end{pmatrix},$$

que, en efecto, pertenece a $K(\mathbb{B}, n)_{n+2}$ como consecuencia de las condiciones de coherencia sobre el homomorfismo (F, μ).

Veamos a continuación algunas construcciones conocidas estrechamente relacionadas con nuestros $K(\mathbb{A}, n)$.

Ejemplo 2.3.4. Como decíamos al comienzo de este apartado, los complejos $K(\mathbb{A}, n)$ resultan ser una generalización de los complejos de Eilenberg-MacLane. Así, si A es un grupo abeliano y consideramos el grupo categórico discreto $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows A)$, entonces $K(A \rightrightarrows A, n)$ se identifica con el complejo de Eilenberg-MacLane $K(A, n)$, i.e., $K(A \rightrightarrows A, n) \cong K(A, n)$. Si por otro lado, consideramos el grupo categórico simétrico con un sólo objeto, $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows \mathbf{1})$, resulta que $K(A \rightrightarrows \mathbf{1}, n) \cong K(A, n + 1)$.

Ejemplo 2.3.5. Para $n = 0$ y $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico, $K(\mathbb{A}, 0)$ es isomorfo a $Ner(\mathbb{A})$, el nervio de la categoría $\mathbb{A}$, (véase, por ejemplo, [17] ó [18]). En efecto, se tiene un isomorfismo de conjuntos simpliciales truncados:

$$\begin{tikzcd}
Ner(\mathbb{A})_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"'] & Ner(\mathbb{A})_1 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[l, bend right=50, "s_1"'] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[d, equal] \\
K(\mathbb{A},0)_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & K(\mathbb{A},0)_1 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[l, bend right=50, "s_1"'] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[l, bend right, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

donde $f_1(g : P \to Q) = (g', Q, P)$, siendo g' dado por la composición, $g' :\ Q - P \xrightarrow{1-g} Q - Q \xrightarrow{m_Q} 0$, y

$$f_2 \left(P_0 \xrightarrow{g_1} P_1 \xrightarrow{g_2} P_2 \right) = \begin{pmatrix} g_2' & P_2 & P_1 \\ (g_2 g_1)' & P_2 & P_0 \\ g_1' & P_1 & P_0 \end{pmatrix},$$

que, puesto que tanto $K(\mathbb{A},0)$ como $Ner(\mathbb{A})$ son 1-hipergrupoides, se extiende a un isomorfismo $Ner(\mathbb{A}) \cong K(\mathbb{A},0)$.

Ejemplo 2.3.6. Supongamos ahora $n=1$. Entonces el complejo $K(\mathbb{A},1)$ es isomorfo al complejo $Ner_2(\mathbb{A})$ definido por Carrasco-Cegarra en [9].

$Ner_2(\mathbb{A})$ se define como el 3-coesqueleto del conjunto simplicial truncado dado por: $(Ner_2(\mathbb{A}))_0 = \{0\}$, $(Ner_2(\mathbb{A}))_1 = Obj(\mathbb{A})$, $(Ner_2(\mathbb{A}))_2 = \{(x, A_0, A_1, A_2) \in Mor(\mathbb{A}) \times Obj(\mathbb{A})^3 / x : A_0 + A_2 \to A_1\}$ y $(Ner_2(\mathbb{A}))_3$ es el conjunto de diagramas conmutativos en $\mathbb{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} A+B+C \arrow[r, "1+x_3"] \arrow[d, "x_0+1"'] & A+E \arrow[d, "x_1"] \\ D+C \arrow[r, "x_2"'] & F \end{tikzcd} \tag{2.30}$$

Los operadores cara y de degeneración son dados por $d_i(x, A_0, A_1, A_2) = A_i$, $0 \leq i \leq 2$, y $d_j(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_j$, $0 \leq j \leq 3$; $s_0(A) = (r_A, A, A, 0)$, $s_1(A) = (l_A, 0, A, A)$ y para $x : A_0 + A_2 \to A_1$ en $\mathbb{A}$, $s_0(x) = (x, x, r_{A_1}, r_{A_2})$, $s_1(x) = (r_{A_0}, x, x, l_{A_2})$ y $s_2(x) = (l_{A_0}, l_{A_1}, x, x)$.

$Ner_2(\mathbb{A})$ es como $K(\mathbb{A},1)$ un 2-hipergrupoide [9, Proposición 2.3] y, entonces, el isomorfismo entre ellos es el extendido del isomorfismo de conjuntos simpliciales truncados

$$\begin{tikzcd} Ner_2(\mathbb{A})_3 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"'] & Ner_2(\mathbb{A})_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"'] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, equal] & \mathbf{1} \arrow[d, equal] \\ K(\mathbb{A},1)_3 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] & K(\mathbb{A},1)_2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

donde $f_2(x : A_0 + A_2 \to A_1)$ viene dado por $(f_2(x), A_0, A_1, A_2)$, siendo $f_2(x) : A_0 - A_1 + A_2 \to 0$ el único morfismo en $\mathbb{A}$ haciendo conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_0 + A_2 - A_1 \arrow[r, "1+c"] \arrow[d, "x+1"'] & A_0 - A_1 + A_2 \arrow[d, "f_2(x)"] \\ A_1 - A_1 \arrow[r, "m"'] & 0 \end{tikzcd}$$

y

$$f_3(x_0,x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} f_2(x_0) & A & D & B \\ f_2(x_1) & A & F & E \\ f_2(x_2) & D & F & C \\ f_2(x_3) & B & E & C \end{pmatrix},$$

que pertenece a $K(\mathbb{A},1)_3$, pues la conmutatividad de (2.30) es equivalente a la condición $f_2(x_0) - f_2(x_1) + f_2(x_2) - f_2(x_3) = can$.

Ejemplo 2.3.7. Análogamente, para $n = 2$, se tiene un isomorfismo de conjuntos simpliciales $K(\mathbb{A},2) \cong Ner_3(\mathbb{A},c)$, donde $Ner_3(\mathbb{A},c)$ es definido, también en [9], como el 4-coesqueleto del conjunto simplicial truncado que tiene: El conjunto unitario $\mathbf{1} = \{0\}$ en dimensiones cero y uno; el conjunto de objetos de $\mathbb{A}$ en dimensión dos; en dimensión tres, $(Ner_3(\mathbb{A}))_3 = \{(x, A_0, A_1, A_2, A_3) \in Mor(\mathbb{A}) \times Obj(\mathbb{A})^4 / x : A_0 + A_2 \to A_3 + A_1\}$ y, en dimensión cuatro, $(Ner_3(\mathbb{A}))_4$ es el conjunto de diagramas conmutativos $\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ en $\mathbb{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & A+B+C \arrow[r, "x_0+1"] \arrow[dl, "1+x_3"'] & D+E+C \arrow[dr, "1+x_2"] & \\
A+H+J \arrow[dr, "c+1"'] & & & D+F+G \arrow[dl, "x_4+1"] \\
 & H+A+J \arrow[r, "1+x_1"'] & H+K+G &
\end{tikzcd} \tag{2.31}$$

Los operadores cara y de degeneración son dados por $d_i(x, A_0, A_1, A_2, A_3) = A_i$, $0 \leq i \leq 3$, $d_j(\alpha) = x_j$, $0 \leq j \leq 4$; $s_0(A) = c_{A,0}$, $s_1(A) = 1_{0+A}$, $s_2(A) = c_{0,A}$ y para $x : A_0 + A_2 \to A_3 + A_1$ en $\mathbb{A}$, $s_0(x) = (x, x, c, c, c)$, $s_1(x) = (c, x, x, 1, 1)$, $s_2(x) = (1, 1, x, x, c)$ y $s_3(x) = (c, c, c, x, x)$.

El isomorfismo entre $Ner_3(\mathbb{A},c)$ y $K(\mathbb{A},2)$ es, como en los ejemplos anteriores, el extendido del truncado a nivel cuatro

$$\begin{tikzcd}
Ner_3(\mathbb{A})_4 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_4"'] \arrow[d, "f_4"'] & Ner_3(\mathbb{A})_3 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] \arrow[d, "f_3"'] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] \arrow[d, equal] & \mathbf{1} \arrow[r, shift left=1, "d_0"] \arrow[r, shift right=1, "d_1"'] \arrow[d, equal] & \mathbf{1} \arrow[d, equal] \\
K(\mathbb{A},2)_4 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_4"'] & K(\mathbb{A},2)_3 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & \mathbf{1} \arrow[r, shift left=1, "d_0"] \arrow[r, shift right=1, "d_1"'] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

con $f_3(x : A_0 + A_2 \to A_3 + A_1) = (f_3(x), A_0, A_1, A_2, A_3)$, donde $f_3(x)$ es definido por la conmutatividad del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A_0 + A_2 - A_1 - A_3 \arrow[rr, "1+c+1"] \arrow[d, "x+1"'] & & A_0 - A_1 + A_2 - A_3 \arrow[dd, "f_3(x)"] \\
A_3 + A_1 - A_1 - A_2 \arrow[d, "1+m+1"'] & & \\
A_3 + 0 - A_3 \arrow[r, "r+1"'] & A_3 - A_3 \arrow[r, "m"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

y para $\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in Ner_3(\mathbb{A})_4$

$$
f_4(\alpha) = \begin{pmatrix} f_3(x_0) & A & E & B & D \\ f_3(x_1) & A & G & J & K \\ f_3(x_2) & E & G & C & F \\ f_3(x_3) & B & J & C & H \\ f_3(x_4) & D & K & F & H \end{pmatrix},
$$

donde, de nuevo, la conmutatividad de (2.31) es equivalente a la identidad $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i f_3(x_i) = can.$

Ejemplo 2.3.8. Sea $\delta : N \to O$ un módulo cruzado estable y consideramos el grupo categórico estricto y simétrico $\mathbb{A}(\delta)$ (véase Ejemplo 1.1.4) asociado a δ. Consideremos los complejos $K(\mathbb{A}(\delta), n)$, $n \geq 0$, asociados a $\mathbb{A}(\delta)$.

Según hemos observado en el Ejemplo 2.3.5, se tiene un isomorfismo

$$K(\mathbb{A}(\delta), 0) \cong Ner(\mathbb{A}(\delta)).$$

Ahora bien, $\mathbb{A}(\delta)$ es en este caso un grupoide interno en la categoría de grupos y, así, su nervio es un grupo simplicial. Podemos aplicar entonces el funtor complejo clasificador, [45] $\overline{W}$ a $Ner(\mathbb{A}(\delta))$ y, de esta forma, obtenemos un complejo de Kan, usualmente llamado el complejo clasificador de δ, que es isomorfo a $K(\mathbb{A}(\delta), 1)$, i.e.,

$$K(\mathbb{A}(\delta), 1) \cong \overline{W} Ner(\mathbb{A}(\delta)).$$

Si miramos ahora $\delta : N \to O$ como módulo cruzado reducido, éste tiene asociado un grupo simplicial $G_\bullet(\delta)$ con complejo de Moore nulo en dimensiones distintas de 1 y 2, [15]. El complejo $K(\mathbb{A}(\delta), 2)$ es entonces isomorfo al complejo clasificador de $G_\bullet(\delta)$, i.e.

$$K(\mathbb{A}(\delta),2) \cong \overline{W}G_\bullet(\delta).$$

Supongamos $n \geq 3$. En [15] se prueba que la categoría de módulos cruzados estables es equivalente a la categoría de grupos simpliciales con complejos de Moore nulo en dimensiones distintas de $n-1$ y n. Sea $G_\bullet^{(n}(\delta)$ el grupo simplicial correspondiente a δ. Resulta entonces que el complejo $K(\mathbb{A}(\delta),n)$ es isomorfo al complejo clasificador de $G_\bullet^{(n}(\delta)$, i.e.

$$K(\mathbb{A}(\delta),n) \cong \overline{W}G_\bullet^{(n}(\delta), \qquad n \geq 3.$$

Notemos que $G_\bullet^{(n}(\delta)$ y $G_\bullet^{(n+1}(\delta)$ están relacionados mediante el funtor complejo de lazos: En efecto, $G_\bullet^{(n}(\delta)$ se identifica con el subgrupo simplicial de $Dec(G_\bullet^{(n+1}(\delta))$, (obtenido a partir de $G_\bullet^{(n+1}(\delta)$ olvidando el operador cara d_0 en cada dimensión) que es el núcleo de d_0 en cada dimensión. Así, puesto que $Dec(G_\bullet^{(n}(\delta))$ no es otro que el complejo de arcos de $G_\bullet^{(n+1}(\delta)$, ya que este último es reducido, resulta entonces que $G_\bullet^{(n}(\delta)$ es isomorfo a $\Omega G_\bullet^{(n+1}(\delta)$, [16].

En la proposición siguiente observamos esta misma propiedad para los complejos $K(\mathbb{A},n)$. En otras palabras, la sucesión $\{K(\mathbb{A},n)\}_{n\geq 0}$ constituye un Ω-spectrum:

Proposición 2.3.9. *Para cada $n \geq 0$ y cualquier grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, se tienen isomorfismos*

$$K(\mathbb{A},n) \cong \Omega(K(\mathbb{A},n+1)).$$

Demostración.

Puesto que $K(\mathbb{A},n+1)$ es un conjunto simplicial reducido su complejo de arcos $\mathcal{P}(K(\mathbb{A},n))$ es $Dec(K(\mathbb{A},n+1))$:

$$\cdots K(\mathbb{A},n+1)_4 \underset{d_4}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} K(\mathbb{A},n+1)_3 \underset{d_3}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} K(\mathbb{A},n+1)_2 \underset{d_2}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} K(\mathbb{A},n+1)_1$$

y entonces el operador cara $d_0 : K(\mathbb{A},n+1)_{n+1} \to K(\mathbb{A},n+1)_n$ determina una fibración $d\!\!l : \mathcal{P}(K(\mathbb{A},n+1)) \to K(\mathbb{A},n+1)$, cuya fibra es isomorfa a $K(\mathbb{A},n)$

mediante el isomorfismo $\alpha : K(\mathbb{A}, n) \to d\!\!\!/^{-1}(0)$ tal que, para cada $k \geq 0$, $\alpha_k : K(\mathbb{A}, n)_{n+k} \to K(\mathbb{A}, n+1)_{n+k+1}$ aplica un cociclo $(P, g) \in K(\mathbb{A}, n)_{n+k}$ en $\alpha_k(P, g) = (P', g')$ con

$$P' : \Delta[n+k+1]_{n+1} \to Obj(\mathbb{A}) \quad \text{y} \quad g' : \Delta[n+k+1]_{n+2} \to Mor(\mathbb{A})$$

dadas por

$$P'(d_{i_1} ... d_{i_k}(\imath_{n+k+1})) = \begin{cases} P(d_{i_1-1} ... d_{i_k-1}(\imath_{n+k})) \\ \qquad \text{si } 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n+k+1 \\ 0 \qquad \text{si } i_1 = 0 \end{cases}$$

y

$$g'(d_{i_1} ... d_{i_{k-1}}(\imath_{n+k+1})) = \begin{cases} g(d_{i_1-1} ... d_{i_{k-1}-1}(\imath_{n+k})) \\ \qquad \text{si } 1 \leq i_1 < ... < i_{k-1} \leq n+k+1 \\ 0 \qquad \text{si } i_1 = 0 \end{cases}$$

y se tiene el resultado. ■

Consecuentemente, la sucesión $\{K(\mathbb{A}, n)\}_{n \geq 0}$ determina una teoría de cohomología por

$$H^*(X_\bullet, \mathbb{A}) = [X_\bullet, K(\mathbb{A}, *)],$$

para cada $X_\bullet$ conjunto simplicial y donde $[X_\bullet, K(\mathbb{A}, n)]$ denota al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $X_\bullet$ en $K(\mathbb{A}, n)$. El teorema siguiente prueba que esta teoría de cohomología se identifica con la teoría de cohomología definida, en el presente capítulo, de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$.

Teorema 2.3.10 (Teorema de Representación). *Sea $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico, $X_\bullet$ un conjunto simplicial y $n \geq 0$.*

i) Existe una biyección natural

$$Simpl(X_\bullet, K(\mathbb{A}, n)) \cong Obj(Z^n_N(X_\bullet, \mathbb{A})),$$

entre el conjunto de aplicaciones simpliciales de $X_\bullet$ en $K(\mathbb{A}, n)$ y el conjunto de n-cociclos normalizados de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$.

ii) La biyección anterior induce un isomorfismo natural

$$[X_\bullet, K(\mathbb{A}, n)] \cong H^n(X_\bullet, \mathbb{A}),$$

entre el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $X_\bullet$ en $K(\mathbb{A}, n)$ y el n-ésimo grupo de cohomología de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$.

Demostración.

i) Como $K(\mathbb{A}, n)$ es un $(n+2)$-coesqueleto, $(n-1)$-reducido, cuyos $(n+2)$-símplices están unívocamente determinados por cualesquiera $n+2$ de sus caras, dar un morfismo simplicial de $X_\bullet$ a $K(\mathbb{A}, n)$ es equivalente a dar un par de aplicaciones $P = f_n : X_n \to K(\mathbb{A}, n)_n = Obj(\mathbb{A})$ y $f_{n+1} : X_{n+1} \to K(\mathbb{A}, n)_{n+1}$ verificando:

a. $d_i f_{n+1} = f_n d_i$, $0 \leq i \leq n+1$, esto es, para cualquier $x \in X_{n+1}$, $f_{n+1}(x) = (g(x), Pd_0(x), ..., Pd_{n+1}(x))$ y resulta así que la aplicación $g : X_{n+1} \to Mor(\mathbb{A})$ es dada por

$$g(x) : \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i Pd_i(x) \to 0.$$

b. $f_n s_j = 0$, $0 \leq j \leq n$ y $f_{n+1} s_k = s_k f_n$, $0 \leq k \leq n+1$. Esto es, para cada $x \in X_{n+1}$, $Ps_j(x) = 0$, y, para cualquier $x \in X_n$,

$$gs_k(x) = can^k_{P(x)} : 0 + ... + 0 + (-1)^k P(x) + (-1)^{k+1} P(x) + 0 + ... + 0 \to 0.$$

y, finalmente,

c. El par de aplicaciones f_n, f_{n+1} puede extenderse a un morfismo simplicial de $X_\bullet$ a $K(\mathbb{A}, n)$, lo que se traduce en que, para cada $x \in X_{n+2}$,

$$\sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i g d_i(x) = can;$$

o sea, $\partial g = \mu_0^{-1} \cdot \chi_P$.

Consecuentemente, dar un morfismo simplicial de $X_\bullet$ en $K(\mathbb{A},n)$ es equivalente a dar un n-cociclo normalizado de $X_\bullet$ con coeficientes en $\mathbb{A}$.

ii) Supongamos que partimos ahora de $f, f' : X_\bullet \to K(\mathbb{A},n)$ dos morfismos simpliciales correspondientes a n-cociclos normalizados $(P,g), (P',g')$ en $Z^n_N(X_\bullet,\mathbb{A})$, respectivamente, como se ha descrito en el punto anterior.

Sea $h = (h^i_k : X_k \to K(\mathbb{A},n)_{k+1}, \leq i \leq k)$ una homotopía de f en f'. Como anteriormente, esta homotopía está determinada por las aplicaciones h^i_k para $0 \leq i \leq k$, $k = n, n+1$. Teniendo en cuenta la expresión de los elementos de $K(\mathbb{A},n)_{n+1}$, cada h^i_n se expresará por $h^i_n = (\varphi^i, d_0 h^i_n, ..., d_{n+1}h^i_n)$, para ciertas aplicaciones $\varphi^i : X_n \to Mor(\mathbb{A})$ con $\varphi^i(x) : \sum\limits_{j=0}^{n+1}(-1)^j d_j h^i_n(x) \to 0$. Las identidades homotópicas con las aplicaciones, h^i_{n-1}, $0 \leq i \leq n-1$, nos permiten observar como el morfismo $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi^i(x)$, junto con los morfismos canónicos, determina, para cada $x \in X_n$, un único morfismo:

$$\tilde{\varphi} : P(x) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j h^j_{n-1}d_i(x) \to P'(x).$$

Las identidades homotópicas en la dimensión siguiente, es decir, aplicadas a h^k_{n+1}, se traducen en que, para cada $x \in X_{n+1}$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k\left[Pd_k(x) + \sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\Gamma d_i d_k(x)\right] & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & \sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k P'd_k(x) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle can} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g'} \\
\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k Pd_k(x) + \sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\Gamma d_i d_k(x) & \xrightarrow[g+can]{} & 0
\end{array}$$

donde $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^k\tilde{\varphi}(d_k(x))$ y $\Gamma : X_{n-1} \to Obj(\mathbb{A})$ es la aplicación dada, para cada $y \in X_{n-1}$, por $\Gamma(y) = \sum\limits_{j=0}^{n-1}(-1)^j h^j_{n-1}(y)$. Esta conmutatividad nos dice justamente que $\tilde{\varphi} : (P,g) + (\partial\Gamma, \chi_\Gamma) \to (P',g')$ es un morfismo de n-cociclos y, por tanto, (P,g) y (P',g') representan el mismo elemento en $H^n(X_\bullet, \mathbb{A})$.

Recíprocamente, supongamos $\varphi : (P,g)+(\partial\Gamma,\chi_\Gamma) \to (P',g')$ un morfismo de n-cociclos, para $\Gamma : X_{n-1} \to Obj(\mathbb{A})$ una aplicación. Definimos una homotopía $h = \left(h_k^i : X_k \to K(\mathbb{A},n)_{k+1}, 0 \leq i \leq k\right)$, entre los correspondientes morfismos simpliciales como sigue:

$$\begin{aligned}
h_k^i &= 0,\ 0 \leq i \leq k < n-1,\\
h_{n-1}^i &= 0,\ 0 \leq i < n-1,\\
h_{n-1}^{n-1} &= \Gamma,\\
h_n^i &= s_iP,\ 0 \leq i \leq n-2,\\
h_n^{n-1} &= (can, 0, ..., 0, P + \Gamma d_n, \Gamma d_n) \qquad \text{y}\\
h_n^n &= (\tilde{\varphi}, \Gamma d_0, ..., \Gamma d_{n-1}, P + \Gamma d_n, P'),
\end{aligned}$$

donde, para cada $x \in X_n$,

$$\tilde{\varphi}(x) : \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\Gamma d_i(x) + (-1)^n(P(x) + \Gamma d_n(x)) + (-1)^{n+1}P'(x) \to 0$$

es el único morfismo en $\mathbb{A}$ determinado por $\varphi(x) : P(x) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Gamma d_i(x) \to P'(x)$, (i.e., salvo canónicos $\varphi - id_{P'}$). La conmutatividad del diagrama en $\mathbb{A}^{X_{n+1}}$

$$\begin{tikzcd}
\partial(P+\partial\Gamma) \arrow[r, "\partial\varphi"] \arrow[d, "can"'] & \partial P' \arrow[d, "g'"] \\
\partial P + \partial^2\Gamma \arrow[r, "g+\chi_\Gamma"'] & 0
\end{tikzcd}$$

que no es otra que la condición de morfismo entre n-cociclos, se traduce en que la homotopía truncada $\{h_k^i\}$, $0 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq k$, así definida, extiende a una homotopía de f a f'. ∎

Cuando el grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ es discreto, es esto, $\mathbb{A} = (A \rightrightarrows A)$ para A un grupo abeliano, entonces, como hemos observado en el Ejemplo

2.3.4, $K(\mathbb{A}, n) = K(A, n)$ y el Teorema de representación anterior es el teorema de representación para la cohomología simplicial usual con coeficientes en grupos abelianos, (véase, por ejemplo, [45, Teorema 2.4.43]). Por otro lado, si $X_\bullet$ es un $K(G, 1)$-complejo (G grupo), el Teorema 2.3.10 proporciona un teorema de representación para la cohomología de Ulbrich (véase 2.2.1) con coeficientes en grupos categóricos simétricos con estructura de G-módulo trivial, que tiene, como caso particular, el teorema de representación de Eilenberg-MacLane para la cohomología de grupos.

Si $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\delta)$ es el grupo categórico simétrico asociado a un módulo cruzado estable, entonces, nuestro Teorema 2.3.10, particulariza en el obtenido en [6] para la cohomología simplicial con coeficientes en grupos categóricos estrictos y simétricos o módulos cruzados estables.

2.4 La adjunción $\wp_n \dashv K(-, n)$. Teorema de clasificación.

Es bien conocido que el funtor nervio, $Ner(-)$, define un funtor fiel y pleno [49] desde la categoría de grupoides a la categoría de conjuntos simpliciales de Kan. De hecho, se tiene una situación de adjunción

$$\text{Grupoides} \underset{Ner}{\overset{\wp}{\rightleftarrows}} \text{Complejos de Kan}\,, \tag{2.32}$$

donde $\wp$ es el funtor grupoide fundamental, (véase 1.5), la counidad de la adjunción es la identidad, es decir, $\wp Ner = 1$, y para $X_\bullet$ un conjunto simplicial de Kan, la unidad $u : X_\bullet \to Ner(\wp(X_\bullet))$ es una 1-equivalencia débil; esto es, $\pi_0(u) : \pi_0(X_\bullet) \to \pi_0(Ner(\wp(X_\bullet)))$ es una biyección y $\pi_1(u) : \pi_1(X_\bullet, *) \to \pi_1(Ner(\wp(X_\bullet)), *)$ es un isomorfismo para cualquier 0-símplex $* \in X_0$. En particular, la adjunción (2.32) induce una equivalencia entre la categoría de homotopía de la categoría de grupoides y la categoría de homotopía de aquellos complejos de Kan con grupos de homotopía nulos en dimensiones mayores o igual que 2.

En [9] se demuestran análogos resultados, para el caso en que se consideren las categorías de grupos categóricos o la de grupos categóricos trenzados.

Concretamente se tienen adjunciones

$$\mathbf{GC}_* \underset{Ner_2}{\overset{\wp_1}{\leftrightarrows}} \text{Complejos de Kan reducidos }, \tag{2.33}$$

$$\mathbf{GCT}_* \underset{Ner_3}{\overset{\wp_2}{\leftrightarrows}} \text{Complejos de Kan 1-reducidos }, \tag{2.34}$$

donde $\wp_1$ y $\wp_2$ son los dados en la Definición 1.2.1 y Ner_2 y Ner_3 en los Ejemplos 2.3.6 y 2.3.7, respectivamente. Se verifica entonces que la counidad de ambas adjunciones son isomorfismos y para $X_\bullet$ un conjunto simplicial de Kan reducido (respectivamente, 1-reducido) la unidad $u : X_\bullet \to Ner_2(\wp_1(X_\bullet))$, (respectivamente, $u : X_\bullet \to Ner_3(\wp_2(X_\bullet))$) es una aplicación simplicial sobreyectiva que induce isomorfismos en los grupos de homotopía para dimensiones menores o igual que 2 (respectivamente, menores o iguales que 3). En particular, como en el caso de grupoides, se deduce que la categoría de grupos categóricos proporciona modelos algebraicos para 2-tipos de homotopía de espacios conexos y la de grupos categóricos trenzados modelos para 3-tipos de homotopía de espacios 1-conexos. Ambos fueron probados inicialmente en el caso estricto, y entonces los módulos cruzados son los modelos algebraicos para 2-tipos de homotopía (véase [3] y [44]) y los módulos cruzados reducidos los modelos algebraicos para 3-tipos de homotopía [7], [15].

El resultado fundamental de este apartado es la obtención, para $n \geq 3$, de una situación de adjunción

$$\mathbf{GCS}_* \underset{K(-,n)}{\overset{\wp_n}{\leftrightarrows}} \text{ Complejos de Kan (n-1)-reducidos }, \tag{2.35}$$

con propiedades análogas a las anteriores (Teorema 2.4.3). Este último, junto con el Teorema 2.3.10 de representación homotópica, nos permitirán concluir en el Teorema 2.4.5 de clasificación del conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales entre dos complejos de Kan, $X_\bullet$ e $Y_\bullet$, con $\pi_j(Y_\bullet) = 0$, si $i \neq n, n+1$.

En primer lugar tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.4.1. *Sea $\mathbb{A}$ un grupo categórico simétrico. Para cada $n \geq 0$, se tienen isomorfismos naturales*

$$\wp_n(K(\mathbb{A}, n)) \cong \mathbb{A},$$

que es de grupoides para $n = 0$, de grupos categóricos para $n = 1$ y de grupos categóricos simétricos para $n \geq 2$.

Demostración.

Según hemos visto en los Ejemplos 2.3.5, 2.3.6 y 2.3.7 se tienen isomorfismos $K(\mathbb{A}, 0) \cong Ner(\mathbb{A})$, $K(\mathbb{A}, 1) \cong Ner_2(\mathbb{A})$ y $K(\mathbb{A}, 2) \cong Ner_3(\mathbb{A})$, y entonces el resultado se tiene para $n = 0, 1, 2$, como hemos observado anteriormente.

Supongamos $n = 3$, entonces usando la Proposición 2.3.9, tenemos

$$\wp_3(K(\mathbb{A}, 3)) = \wp_2(\Omega K(\mathbb{A}, 3)) \cong \wp_2(K(\mathbb{A}, 2)) \cong \mathbb{A},$$

como grupos categóricos trenzados y, puesto que ambos son simétricos, también será un isomorfismo de grupos categóricos simétricos. Por una fácil inducción, se tiene el resultado para $n \geq 3$. ■

Presentamos ahora un lema técnico que utilizaremos en la demostración del teorema siguiente.

Lema 2.4.2. *Sea $X_\bullet$ un conjunto simplicial de Kan $(n-1)$-reducido, $(n \geq 3)$ y sea $d\!\!l = (d_0, ..., d_{n+1}) : X_{n+1} \to \Delta_{n+1}(X_\bullet)$ el morfismo canónico al núcleo simplicial. Elegimos un n-símplex, (que para mayor claridad escribiremos con letra mayúscula), $A \in X_n$, entonces:*

i) Para cada $n \geq 3$, existen $(n+1)$-símplices $u_A, t_A \in X_{n+1}$ tal que

$$d\!\!l(u_A) = (*, ..., *, A, *, *, A) \quad y \quad d\!\!l(t_A) = (*, ..., *, A, *, *, A, *)$$

ii) Para cada $n \geq 4$, existe $r_A \in X_{n+1}$ tal que

$$d\!\!l(r_A) = (*, ..., *, A, *, *, A, *, *)$$

iii) Para $n \geq 5$ e impar, existe $\overline{u}_A \in X_{n+1}$ tal que

$$d\!\!l(\overline{u}_A) = (*, A, *, ..., *, A)$$

y para $n \geq 6$ y par, existe $\overline{t}_A \in X_{n+1}$ tal que

$$d\!\!l(\overline{t}_A) = (*, A, *, ..., *, A, *)$$

Demostración.

Puesto que $X_\bullet$ es conjunto simplicial de Kan, los morfismos canónicos $\mathbb{d}^k = (d_0, ..., \widehat{d_k}, ..., d_{n+2}) : X_{n+2} \to \Lambda^k_{n+2}(X_\bullet)$, $0 \leq k \leq n+2$, son sobreyectivos. Haremos uso reiterado de ellos.

Sean $U_A, T_A \in X_{n+2}$ tal que

$$\mathbb{d}^n(U_A) = (*, ..., *, s_{n-1}(A), s_n(A), -, s_{n-2}(A), s_{n-1}(A)),$$

$$\mathbb{d}^{n-1}(T_A) = (*, ..., *, d_n(U_A), s_n(A), -, *, s_{n-2}(A), s_{n-3}(A)),$$

entonces los $(n+1)$-símplices requeridos en *i)* son $u_A = d_n(U_A)$ y $t_A = d_{n-1}(T_A)$.

Supongamos $n \geq 4$ y consideremos ahora $R_A \in X_{n+2}$ con

$$\mathbb{d}^{n-1}(R_A) = (*, ..., *, u_A, s_n(A), *, -, s_{n-1}(A), t_A, s_0(A)),$$

esto es, $d_i(R_A) = *$, $0 \leq i \leq n-5$, $d_{n-4}(R_A) = u_A$, $d_{n-3}(R_A) = s_n(A)$, $d_{n-2}(R_A) = *$, $d_n(R_A) = s_{n-1}(A)$, $d_{n+1}(R_A) = t_A$ y $d_{n+2}(R_A) = s_0(A)$. Entonces el $(n+1)$-símplex buscado es $r_A = d_{n-1}(R_A)$, cuyas caras son:

$$\begin{aligned}
d_i r_A &= d_i d_{n-1}(R_A) = d_{n-2} d_i(R_A) = d_{n-2}(*) = *, \text{ si } 0 \leq i \leq n-5,\\
d_{n-4} r_A &= d_{n-4} d_{n-1}(R_A) = d_{n-2} d_{n-4}(R_A) = d_{n-2}(u_A) = A,\\
d_{n-3} r_A &= d_{n-3} d_{n-1}(R_A) = d_{n-2} d_{n-3}(R_A) = d_{n-2} s_n A = *,\\
d_{n-2} r_A &= d_{n-2} d_{n-1}(R_A) = d_{n-2} d_{n-2}(R_A) = d_{n-2} * = *,\\
d_{n-1} r_A &= d_{n-1} d_{n-1}(R_A) = d_{n-1} d_n(R_A) = d_{n-1} s_{n-1} A = A,\\
d_n r_A &= d_n d_{n-1}(R_A) = d_{n-1} d_{n+1}(R_A) = d_{n-1} t_A = * \qquad \text{y}\\
d_{n+1} r_A &= d_{n+1} d_{n-1}(R_A) = d_{n-1} d_{n+2}(R_A) = d_{n-1} s_0 A = *;
\end{aligned}$$

esto es, $\mathbb{d}(r_A) = (*, ..., *, A, *, *, A, *, *)$ y se tiene *ii)*.

Para demostrar *iii)* hacemos inducción en n. Si $n = 5$, sea $\overline{U}_A \in X_7$ tal que:

$$\mathbb{d}^7(\overline{U}_A) = (*, u_A, *, *, r_A, s_4(A), s_5(A), -),$$

entonces $d_7 \overline{U}_A \in X_6$ y verifica $d_0 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_0 \overline{U}_A = *$, $d_1 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_1 \overline{U}_A = d_6 u_A = A$, $d_2 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_2 \overline{U}_A = *$, $d_3 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_3 \overline{U}_A = *$, $d_4 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_4 \overline{U}_A = d_6 r_A = *$, $d_5 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_5 \overline{U}_A = d_6 s_4(A) = *$, $d_6 d_7 \overline{U}_A = d_6 d_6 \overline{U}_A = d_6 s_5(A) = A$. Esto es, $\overline{u}_A = d_7 \overline{U}_A$ es el elemento buscado.

Sea $n = 6$ y $A \in X_6$. Puesto que $X_\bullet$ es 5-reducido, $A \in \Omega_5(X_\bullet, *)$ y, por el caso anterior, existirá $\overline{u}^5_A \in \Omega_6(X_\bullet, *)$ con $\mathbb{d}_\Omega(\overline{u}^5_A) = (*, A, *, *, *, *, A)$, donde $d_\Omega : \Omega_6(X_\bullet, *) \to \Delta_6(\Omega(X_\bullet, *))$ denota el correspondiente morfismo al núcleo cosimplicial del complejo $\Omega(X_\bullet, *)$. Como $\Omega_6(X_\bullet.*) \subset X_7$ consiste de aquellos 7-símplices cuyo d_0 es $*$, entonces $\overline{u}^5_A \in X_7$ y $d(\overline{u}^5_A) = (*, *, A, *, *, *, *, A)$. Consideramos entonces $\overline{T}_A \in X_8$ tal que $d^8(\overline{T}_A) = (*, u_A, s_4(A), *, *, s_1(A), \overline{u}^5_A, *, -)$, se tiene que $\overline{t}_A = d_8(\overline{T}_A) \in X_7$ es el símplex buscado, es decir, $d(\overline{t}_A) = (*, A, *, *, *, *, A, *)$.

Sea $n > 7$ y supongamos el resultado probado para $k < n$. Si n es par y $A \in X_n$, considerando A en $\Omega_{n-1}(X_\bullet, *)$, y por hipótesis de inducción, encontramos $\overline{u}^{n-1}_A \in \Omega_n(X_\bullet, *)$, con $d_\Omega(\overline{u}^{n-1}_A) = (*, A, *, ..., *, A)$. Equivalentemente $\overline{u}^{n-1}_A \in X_{n+1}$ con $d(\overline{u}^{n-1}_A) = (*, *, A, *, ..., *, A)$.

Como antes, consideramos $\overline{T}_A \in X_{n+2}$ tal que

$$d^{n+2}(\overline{T}_A) = (*, u_A, s_{n-2}(A), *, ..., *, s_1(A), \overline{u}^{n-1}_A, *, -),$$

entonces $\overline{t}_A = d_{n+2}(\overline{T}_A)$ es el $(n+1)$-símplex buscado, ya que:

$d_0\overline{t}_A = d_0 d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_0\overline{T}_A = *,$
$d_1\overline{t}_A = d_1 d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_1\overline{T}_A = d_{n+1}u_A = A,$
$d_2\overline{t}_A = d_2 d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_2\overline{T}_A = d_{n+1}s_{n-2}(A) = *,$
$d_i\overline{t}_A = d_i d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_i\overline{T}_A = *, \quad 3 \le i \le n-2,$
$d_{n-1}\overline{t}_A = d_{n-1} d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_{n-1}\overline{T}_A = d_{n+1}s_1(A) = *,$
$d_n\overline{t}_A = d_n d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_n\overline{T}_A = d_{n+1}\overline{u}^{n-1}_A = A,$
$d_{n+1}\overline{t}_A = d_{n+1} d_{n+2}\overline{T}_A = d_{n+1}d_{n+1}\overline{T}_A = *.$

Si $n > 7$ e impar, entonces considerando $A \in \Omega_{n-1}(X_\bullet, *)$, y, de nuevo, por inducción, encontramos $\overline{t}^{n-1}_A \in \Omega_n(X_\bullet) \subset X_{n+1}$ tal que $d_\Omega(\overline{t}^{n-1}_A) = (*, A, *, ..., *, A, *)$, es decir, $d(\overline{t}^{n-1}_A) = (*, *, A, *, ..., *, A, *)$. El $(n+2)$-símplex a considerar es $\overline{U}_A \in X_{n+2}$ tal que $d^n(\overline{U}_A) = (*, s_{n-2}(A), u_A, *, ..., *, s_1(A), -, *, \overline{t}^{n-1}_A)$, y el $(n+1)$-símplex buscado es $\overline{u}_A = d_n(\overline{U}_A)$.

■

Podemos ahora demostrar el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.4.3. *Sea $n \ge 3$, el funtor*

$$\mathbf{GCS}_* \xrightarrow{K(-,n)} \textit{Complejos de Kan (n-1)-reducidos} \tag{2.36}$$

es pleno, fiel y tiene a $\wp_n$ como adjunto izquierda. La counidad de la adjunción es un isomorfismo y la unidad $u : X_\bullet \to K(\wp_n(X_\bullet), n)$, para $X_\bullet$ un complejo de Kan $(n-1)$-reducido, es un morfismo sobreyectivo que induce isomorfismos en los grupos de homotopía en dimensiones menores o iguales que $n+1$, es decir, es una $(n+1)$-equivalencia débil.

Demostración.

La demostración, aunque más laboriosa, es esencialmente la misma que la que aparece en [9] para los casos $n = 1, 2$.

La counidad de la adjunción $v : \wp_n(K(\mathbb{A}, n)) \to \mathbb{A}$ es el isomorfismo dado en la Proposición 2.4.1 y, consecuentemente, $K(-, n)$ es fiel y pleno.

Para definir la unidad de la adjunción, primero demostraremos que, para cada conjunto simplicial $(n-1)$-reducido, $X_\bullet$, y para cada $(n+1)$-símplex, $x \in X_{n+1}$, existe un morfismo h_x en $\wp_n(X_\bullet)$, cuyo dominio y rango, según la paridad de n, es: Si $n = 2k$, $h_x : \sum\limits_{j=0}^{k} d_{2j}(x) \to \sum\limits_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x)$ y si $n = 2k+1$, $h_x : \sum\limits_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) \to \sum\limits_{j=0}^{k+1} d_{2j}(x)$.

Notemos, que puesto que $X_\bullet$ es $(n-1)$-reducido, $[\Omega_0^n(X_\bullet)]_0 = X_n$ y $[\Omega_1^n(X_\bullet)]_1 = \{x \in X_{n+1} / \quad d_i(x) = *, 0 \leq i \leq n-1\}$. Como en el Lema anterior, demostraremos la existencia de h_x por inducción. Sea $n = 3$ y $x \in X_4$, entonces usando la condición de extensión, elegimos 5-símplices $\alpha_x^i \in X_5$, $1 \leq i \leq 4$, sujetos a las siguientes condiciones sobre sus caras:

$d\!\!\!/^3(\alpha_x^1) = (s_2d_0(x), s_2d_1(x), s_3d_2(x), -, x, Z_{d_2(x),d_4(x)})$,

$d\!\!\!/^4(\alpha_x^2) = (s_3d_3(x), Z_{d_1(x),d_3(x)}, s_2d_1(x), s_1d_1(x), -, s_0d_3(x))$,

$d\!\!\!/^1(\alpha_x^3) = (d_3\alpha_x^1, -, t_{d_1(x)}, *, d_4\alpha_x^2, s_0(d_2(x) + d_4(x)))$,

$d\!\!\!/^3(\alpha_x^4) = (u_{d_0(x)}, *, t_{d_0(x)}, -, Z_{d_0(x),d_2(x)+d_4(x)}, d_1\alpha_x^3)$,

donde los 4-símplices $\{Z_{-,-}\}$ son los empleados para definir la estructura monoidal de $\wp_3(X_\bullet, *)$, (véase 1.2.2), y u_- y t_- son los dados en el Lema anterior 2.4.2.

Entonces el 4-símplex $d_3\alpha_x^4$ verifica que $d_0d_3\alpha_x^4 = d_2d_0\alpha_x^4 = d_2u_{d_0(x)} = *$, $d_1d_3\alpha_x^4 = d_2d_1\alpha_x^4 = *$ y $d_2d_3\alpha_x^4 = d_2d_2\alpha_x^4 = d_2t_{d_0(x)} = *$. Así, $d_3\alpha_x^4 \in \Omega_1^3(X_\bullet)$ y su clase de homotopía define un morfismo en $\wp_3(X_\bullet, *)$, cuyo dominio es $d_4d_3\alpha_x^4 = d_3d_5\alpha_x^4 = d_3d_1\alpha_x^3 = d_1d_4\alpha_x^3 = d_1d_4\alpha_x^2 = d_3d_1\alpha_x^2 = d_3Z_{d_1(x),d_3(x)} = d_1(x) + d_3(x)$ y cuyo rango es $d_3d_3\alpha_x^4 = d_3d_4\alpha_x^4 =$

$d_3Z_{d_0(x),d_2(x)+d_4(x)} = d_0(x) + (d_2(x) + d_4(x))$. Definimos, entonces

$$h_x = [d_3\alpha_x^4] : d_1(x) + d_3(x) \to d_0(x) + (d_2(x) + d_4(x)),$$

cuya clase no depende de las elecciones realizadas para su construcción.

Sea ahora $n = 4$, y $x \in X_5$, aplicando de nuevo la condición de extensión, y puesto que $X_\bullet$ es 3-reducido, encontramos $y \in X_5$ tal que $d_0(y) = *$, $d_i(y) = d_i(x)$, $1 \leq i \leq 4$, (i.e., $d\!\!l^5(y) = (*, d_1(x), d_2(x), d_3(x), d_4(x), -)$). Entonces $y \in \Omega_4(X_\bullet, *)$ y, por el paso anterior, podemos elegir un elemento $f_y \in \Omega_4(X_\bullet, *)$ tal que $d\!\!l_\Omega(f_y) = (*, *, *, d_1(y)+(d_3(y)+d_5(y)), d_2(y)+d_4(y))$, o bien, $f_y \in X_5$ con $d\!\!l(f_y) = (*, *, *, *, d_1(x)+(d_3(x)+d_5(x)), d_2(x)+d_4(x))$.

Elegimos 6-símplices $\alpha_x^i \in X_6$, $1 \leq i \leq 5$, tales que:

$d\!\!l^6(\alpha_x^1) = (u_{d_0(x)}, s_2d_1(x), s_2d_2(x), x, y, s_3d_4(x), -)$,

$d\!\!l^5(\alpha_x^2) = (s_4d_0(x), *, *, Z_{d_3(x),d_5(x)}, Z_{d_3(x),d_5(y)}, -, d_6\alpha_x^1)$,

$d\!\!l^5(\alpha_x^3) = (s_4d_0(x), *, *, Z_{d_1(x),d_3(x)+d_5(x)}, Z_{d_1(x),d_3(x)+d_5(y)}, -, d_5\alpha_x^2)$,

$d\!\!l^3(\alpha_x^4) = (t_{d_0(x)}, s_1d_0(x), s_0d_0(x), -, f_y, d_5\alpha_x^3, s_3(d_2(x) + d_4(x)))$,

$d\!\!l^4(\alpha_x^5) = (*, t_{d_0(x)}, s_1d_0(x), u_{d_0(x)}, -, d_3\alpha_x^4, Z_{d_0(x),d_2(x)+d_4(x)})$.

Entonces $d_id_4\alpha_x^5 = *$, $0 \leq i \leq 3$ y $d_4\alpha_x^5 \in \Omega_1^4(X_\bullet, *)$. Su clase de homotopía, que no depende de las elecciones tomadas, es h_x, es decir,

$$h_x = [d_4\alpha_x^5] : d_0(x) + (d_2(x) + d_4(x)) \to d_1(x) + (d_3(x) + d_5(x)),$$

pues $d_4d_4\alpha_x^5 = d_4d_5\alpha_x^5 = d_4d_3\alpha_x^4 = d_3d_5\alpha_x^4 = d_3d_5\alpha_x^3 = d_4d_3\alpha_x^3 = d_4Z_{d_1(x),d_3(x)+d_5(x)} = d_1(x) + (d_3(x) + d_5(x))$ y $d_5d_4\alpha_x^5 = d_4d_6\alpha_x^5 = d_4Z_{d_0(x),d_2(x)+d_4(x)} = d_0(x) + (d_2(x) + d_4(x))$.

Sea $n \geq 5$ y supongamos $n = 2k + 1$. Para $x \in X_{n+1}$, procedemos como anteriormente, y así, elegimos $y \in X_{n+1}$ con $d_0(y) = *$ y $d_i(y) = d_i(x)$, para $1 \leq i \leq n$. Entonces $y \in \Omega_n(X_\bullet, *)$ y, por hipótesis de inducción, encontramos $f_y \in X_{n+1}$ tal que

$$\begin{aligned} d\!\!l(f_y) = (*, ..., *, d_0(x) + (d_2(y) + ... + (d_{n-1}(x) + d_{n+1}(x))),& \\ d_1(x) + (d_3(y) + ... + (d_{n-2}(x) + d_n(y))).& \end{aligned}$$

Elegimos $(n+2)-$símplices $\alpha_x, \beta_x^{2r+1}, 0 \leq r \leq k-1, \gamma_x, \lambda_x \in X_{n+2}$ tales que:

$$\begin{aligned} d\!\!l^{n+2}(\alpha_x) = (u_{d_0(x)}, s_{n-2}d_1(x), s_{n-2}d_2(x), ..., s_{n-2}d_{n-2}(x),& \\ x, y, s_{n-1}d_n(x), -),& \end{aligned}$$

$$d\!\!\!/^{n+1}(\beta_x^1) = (s_n d_0(x), *, ..., *, Z_{d_{n-1}(x), d_{n+1}(x)}, Z_{d_{n-1}(x), d_{n+1}(y)}, -, d_{n+2}\alpha_x),$$

para $1 \leq r \leq k-1$,

$$d\!\!\!/^{n+1}(\beta_x^{2r+1}) = (s_n d_0(x), *, ..., *, Z_{d_{n-(2r+1)}(x), d_{n-(2r-1)}(x)+...+d_{n-1}(x)+d_{n+1}(x)},$$
$$Z_{d_{n-(2r+1)}(x), d_{n-(2r-1)}(x)+d_{n-1}(x)+d_{n+1}(y)}, -, d_{n+1}\beta_x^{2r-1}),$$

$$d\!\!\!/^{n-1}(\gamma_x) = (t_{d_0(x)}, s_{n-3}d_0(x), *, ..., *, s_0 d_0(x), -, f_y, d_{n+1}\beta_x^{2k-1},$$
$$s_{n-1}(d_1(x) + d_3(x) + ... + d_{n-2}(x) + d_n(x))),$$

$$d\!\!\!/^{n+1}(\lambda_x) = (*, \overline{u}_{d_0(x)}, s_1 d_0(x), s_2 d_0(x), ..., s_{n-2} d_0(x),$$
$$Z_{d_0(x), d_2(x)+...+d_{n-1}(x)+d_{n+1}(x)}, -, d_{n-1}\gamma_x),$$

siendo $\overline{u}_-$ el dado en el Lema 2.4.2.

Entonces $d_{n+1}\lambda_x \in \Omega_1^n(X_\bullet, *)$ y su clase de homotopía, es el morfismo buscado, es decir, $d_0 d_{n+1}\lambda_x = d_n d_0 \lambda_x = *$, $d_1 d_{n+1}\lambda_x = d_n d_1 \lambda_x = d_n \overline{u}_{d_0(x)} = *$, $d_i d_{n+1}\lambda_x = d_n d_i \lambda_x = d_n s_{i-1} d_0(x) = *$, $2 \leq i \leq n-1$, $d_n d_{n+1}\lambda_x = d_n d_n \lambda_x = d_n Z_{d_0(x), d_2(x)+...+d_{n-1}(x)+d_{n+1}(x)} = d_0(x) + (d_2(x) + ... + (d_{n-1}(x) + d_{n+1}(x))...)$ y, también, por último, $d_{n+1}d_{n+1}\lambda_x = d_{n+1}d_{n+2}\lambda_x = d_{n+1}d_{n-1}\gamma_x = d_{n-1}d_{n+2}\gamma_x = d_{n-1}s_{n-1}(d_1(x) + (d_3(x) + ... + (d_{n-2}(x) + d_n(x))...)$. Definimos entonces

$$h_x = [d_{n+1}\lambda_x] : d_1(x) + (d_3(x) + ... + (d_{n-2}(x) + d_n(x))...) \to$$
$$d_0(x) + (d_2(x) + ... + (d_{n-1}(x) + d_{n+1}(x))...)$$

Sea $n = 2k$, para $x \in X_{n+1}$, sean $y, f_y \in X_{n+1}$ con $d_0(y) = *$ y $d_i(y) = d_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ y

$$d\!\!\!/(f_y) = (*, ..., *, d_1(x) + (d_3(y) + ... + (d_{n-1}(x) + d_{n+1}(y)))$$
$$d_2(x) + (d_4(y) + ... + (d_{n-2}(x) + d_n(x))).$$

Elegimos $(n+2)-$símplices $\alpha_x, \beta_x^{2r+1}, 0 \leq r \leq k-1, \gamma_x, \lambda_x \in X_{n+2}$ tales que:

$$d\!\!d^{n+2}(\alpha_x) = (u_{d_0(x)}, s_{n-2}d_1(x), ..., s_{n-2}d_{n-2}(x), x, y, s_{n-1}d_n(x), -),$$
$$d\!\!d^{n+1}(\beta_x^1) = (s_n d_0(x), *, ..., *, Z_{d_{n-1}(x), d_{n+1}(x)}, Z_{d_{n-1}(x), d_{n+1}(y)}, -, d_{n+2}\alpha_x),$$

para $1 \leq r \leq k-1$,

$$\begin{aligned} d\!\!d^{n+1}(\beta_x^{2r+1}) = (s_n d_0(x), *, ..., *, &Z_{d_{n-(2r+1)}(x), d_{n-(2r-1)}(x)+...+d_{n-1}(x)+d_{n+1}(x)}, \\ &Z_{d_{n-(2r+1)}(x), d_{n-(2r-1)}(x)+...+d_{n-1}(x)+d_{n+1}(y)}, -, d_{n+1}\beta_x^{2r-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\!\!d^{n-1}(\gamma_x) = (t_{d_0(x)}, s_{n-3}d_0(x), *, ..., *, s_0 d_0(x), -, f_y, d_{n+1}\beta_x^{2k-1}, \\ s_{n-1}(d_0(x) + d_2(x) + ... + d_{n-2}(x) + d_n(x))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\!\!d^{n+1}(\lambda_x) = (*, \bar{t}_{d_0(x)}, s_1 d_0(x), s_2 d_0(x), ..., s_{n-3}d_0(x), u_{d_0(x)}, \\ -, d_{n-1}\gamma_x, Z_{d_0(x), d_2(x)+...+d_{n-2}(x)+d_n(x)}), \end{aligned}$$

donde $\bar{t}_-$ es el dado en el Lema 2.4.2. Entonces $d_{n+1}\lambda_x \in \Omega_1^n(X_\bullet, *)$ y su clase de homotopía, es el morfismo buscado. Entonces h_x es dado por

$$\begin{aligned} h_x = [d_n\lambda_x] : d_0(x) + (d_2(x) + ... + (d_{n-2}(x) + d_n(x))) \to \\ d_1(x) + (d_3(x) + ... + (d_{n-1}(x) + d_{n+1}(x))) \end{aligned}$$

Entonces, si $X_\bullet$ un conjunto simplicial de Kan $(n-1)$-reducido, $n \geq 3$, la unidad $u : X_\bullet \to K(\wp(X_\bullet, *), n)$ es dada como sigue: Para i-símplices, $0 \leq i \leq n$, u_i es la identidad. Para $x \in X_{n+1}$, sea $g_x : \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_i(x) \to 0$, el único morfismo tal que,si $n = 2k$, el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} \sum_{j=0}^{k} d_{2j}(x) - \sum_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) \arrow[d, "h_x+1"'] & \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_i(x) \arrow[l, "can"'] \arrow[d, dotted, "g_x"] \\ \sum_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) - \sum_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) \arrow[r, "can"'] & 0 \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y si $n = 2k+1$, lo es el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{j=0}^{k+1} d_{2j}(x) - \sum\limits_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) & & \sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_i(x) \arrow[ll, "can"'] \arrow[d, dotted, "g_x"] \\
\sum\limits_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) - \sum\limits_{j=0}^{k} d_{2j+1}(x) \arrow[u, "h_x+1"] \arrow[rr, "can"'] & & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces definimos $u(x) \in K(\wp(X_\bullet,*),n)_{n+1}$, como el siguiente elemento: $u(x) = (g_x, d_0(x), ..., d_{n+2}(x))$. Es inmediato observar que se verifican las identidades simpliciales y, así, u es un morfismo simplicial $(n+1)$-truncado. Puesto que un $(n+2)$-símplex en $K(\wp_n(X_\bullet,*),n)$ está unívocamente determinado por sus caras, las identidades simpliciales fuerzan la definición de u en dimensión $n+2$ por

$$u(\beta) = \begin{pmatrix}
g_{d_0(\beta)} & d_0d_0\beta & d_1d_0\beta & \cdots & d_{n+1}d_0\beta \\
g_{d_1(\beta)} & d_0d_1\beta & d_1d_1\beta & \cdots & d_{n+1}d_1\beta \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_{d_{n+1}(\beta)} & d_0d_{n+1}\beta & d_1d_{n+1}\beta & \cdots & d_{n+1}d_{n+1}\beta \\
g_{d_{n+2}(\beta)} & d_0d_{n+2}\beta & d_1d_{n+2}\beta & \cdots & d_{n+1}d_{n+2}\beta
\end{pmatrix}$$

La demostración de que $u(\beta)$ es efectivamente un elemento perteneciente a $K(\wp_n(X_\bullet),n)_{n+2}$ consiste, como en la definición, en aplicar la condición de extensión en $X_\bullet$ y proceder de manera inductiva, teniendo en cuenta que, por ejemplo, para $n=3$, ésta es equivalente a la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{1} \arrow[r, "1+h_{d_1(\beta)}+1"] \arrow[dl, "1+h_{d_4(\beta)}"'] & \mathbf{2} \arrow[dr, "(1+h_{d_4(\beta)})(1+c+1)"] & \\
\mathbf{3} \arrow[d, "(1+h_{d_2(\beta)}+1)(1+c+1)"'] & & & \mathbf{4} \arrow[d, "(1+h_{d_5(\beta)}+1)(1+c+1)"] \\
\mathbf{5} \arrow[dr, "h_{d_0(\beta)}+1"'] & & & \mathbf{6} \arrow[dl, "1+c+1"] \\
& \mathbf{7} & \mathbf{8} \arrow[l, "1+c+1"] &
\end{tikzcd}$$

donde

$\mathbf{1} = d_1d_0(\beta) + d_1d_2(\beta) + d_1d_4(\beta) + d_3d_4(\beta)$,
$\mathbf{2} = d_1d_0(\beta) + d_0d_1(\beta) + d_2d_1(\beta) + d_4d_1(\beta) + d_3d_4(\beta)$,
$\mathbf{3} = d_1d_0(\beta) + d_1d_2(\beta) + d_0d_4(\beta) + d_2d_4(\beta) + d_4d_4(\beta)$,
$\mathbf{4} = d_1d_0(\beta) + d_0d_1(\beta) + d_4d_1(\beta) + d_0d_3(\beta) + d_2d_3(\beta) + d_4d_3(\beta)$,
$\mathbf{5} = d_1d_0(\beta) + d_0d_4(\beta) + d_0d_2(\beta) + d_2d_2(\beta) + d_4d_2(\beta) + d_4d_4(\beta)$,
$\mathbf{6} = d_1d_0(\beta) + d_0d_1(\beta) + d_0d_3(\beta) + d_2d_3(\beta) + d_0d_5(\beta) + d_2d_5(\beta) + d_4d_5(\beta)$,
$\mathbf{7} = d_0d_0(\beta) + d_2d_0(\beta) + d_4d_0(\beta) + d_0d_2(\beta) + d_2d_2(\beta) + d_4d_2(\beta) + d_4d_4(\beta)$,
$\mathbf{8} = d_0d_1(\beta) + d_0d_3(\beta) + d_1d_0(\beta) + d_2d_3(\beta) + d_0d_5(\beta) + d_2d_5(\beta) + d_4d_5(\beta)$.

Tenemos, así, un morfismo simplicial $(n+2)$-truncado que, debido a que $K(\wp_n(X_\bullet), n)$ es un $(n+2)$-coesqueleto, extiende a un morfismo simplicial $u : X_\bullet \to K(\wp_n(X_\bullet), n)$. Es fácil comprobar que las composiciones

$$\wp_n(X_\bullet) \xrightarrow{\wp_n(u)} \wp_n K(\wp_n(X_\bullet), n) \xrightarrow{v} \wp_n(X_\bullet)\ ,$$

$$K(\mathbb{A}, n) \xrightarrow{u} K(\wp_n(K(\mathbb{A}, n)), n) \xrightarrow{K(v,n)} K(\mathbb{A}, n)$$

son ambas identidades. Consecuentemente, $\wp_n$ es adjunto a izquierda a $K(-, n)$ con u y v como la unidad y la counidad de la adjunción, respectivamente.

Finalmente, para cualquier conjunto simplicial de Kan $(n-1)$-reducido, como $\pi_{n+1}(X_\bullet)$ se identifica con $Aut_{\wp_n(X_\bullet)}(*)$ y $\pi_n(X_\bullet)$ lo hace con el grupo de componentes conexas de $\wp_n(X_\bullet)$, podemos concluir que $\pi_i(u)$ es un isomorfismo para $i = n, n+1$, ya que $\wp_n(u) : \wp(X_\bullet) \to \wp_n(K(\wp_n(X_\bullet), n))$ es un isomorfismo. Al ser $X_\bullet$ $(n-1)$-reducido, resulta que $u : X_\bullet \to K(\wp_n(X_\bullet), n)$ es una $(n+1)$-equivalencia débil. ■

El tipo de homotopía de CW-complejos X con $\pi_i(X) = 0$, para $i \neq n, n+1$, $n \geq 3$, y $\pi_n(X) = A$, $\pi_{n+1}(X) = B$ está clasificado, vía su único invariante de Postnikov no nulo, por el grupo de cohomología de Eilenberg-MacLane $H^{n+2}(K(A,n), B)$. Como observábamos en el Ejemplo 1.2.7, el teorema de suspensión de Eilenberg-MacLane [21] establece un isomorfismo $H^{n+2}(K(A,n), B) \cong H^5(K(A,3), B)$ y un monomorfismo inducido por la suspensión

$$H^5(K(A,3),B) \hookrightarrow H^4(K(A,2),B) \cong H^3_{ab}(A,B).$$

Por este monomorfismo, $H^5(K(A,3),B)$ se identifica con el subgrupo de $H^3_{ab}(A,B)$ de aquellos 3-cociclos abelianos (h,d) tales que $d(x,y)+d(y,x)=0$, [23, Teorema 17.2], [41].

La *traza* de un 3-cociclo abeliano (h,d) es la función $q : A \to B$ dada por $q(x)=d(x,x)$. Esta aplicación $q : A \to B$ es una forma cuadrática, (es decir, $q(x+y)-q(x)-q(y)$ es bilineal en x e y), y la función traza establece un isomorfismo entre el grupo $H^3_{ab}(A,B)$ y el grupo de las formas cuadráticas de A en B (c.f., [41]).

Si consideramos 3-cociclos abelianos (h,d) con $d(x,y)+d(y,x)=0$, su traza define un homomorfismo $q : A \to {}_2B$, donde ${}_2B$ denota el subgrupo de B de los elementos de orden 2. Concluimos entonces que el tipo de homotopía de CW-complejos en las condiciones anteriores está clasificado por el grupo $Hom_{\mathbb{Z}}(A, {}_2B)$.

Por otro lado, Sinh prueba en [50] que $Hom_{\mathbb{Z}}(A, {}_2B)$ clasifica, salvo equivalencia, aquellos grupos categóricos simétricos $\mathbb{A}$ tales que su grupo de componentes conexas es isomorfo a A, $\pi_0(\mathbb{A}) \cong A$, y el grupo de automorfismos en el objeto cero es isomorfo a B, $\pi_1(\mathbb{A}) \cong B$.

Consecuentemente, combinando ambos resultados, resulta que clases de homotopía de tales CW-complejos se corresponden biyectivamente con clases de equivalencia de grupos categóricos simétricos. Este resultado ha sido también probado en [15] y [6], aunque en ambos casos se trabaja en el contexto de módulos cruzados estables. Nosotros podemos concluir el mismo hecho mediante el uso de los funtores $\wp_n$ y $K(-,n)$. Esto es:

Teorema 2.4.4. *Sea $n \geq 3$. Todo complejo de Kan conexo con grupos de homotopía triviales en cualquier dimensión salvo, posiblemente, en dimensiones n y $n+1$ es homotópicamente equivalente al n-nervio de un grupo categórico simétrico. Explícitamente, si $X_\bullet$ es tal complejo y $* \in X_0$, entonces $X_\bullet$ es homotópicamente equivalente a $K(\wp_n(X_\bullet,*),n)$. Además, si $X_\bullet$ es homotópico a $K(\mathbb{A},n)$, para algún grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, entonces $\wp_n(X_\bullet,*)$ y $\mathbb{A}$ son grupos categóricos simétricos equivalentes.*

Demostración.

Sea $E^n(X_\bullet, *)$ el subcomplejo $(n-1)$-reducido en $*$ de $X_\bullet$, es decir, $(E^n(X_\bullet, *))_m = \{x \in X_m / \quad d_i(x) = *, 0 \leq i \leq n-1\}$. Entonces $E^n(X_\bullet, *) \hookrightarrow X_\bullet$ es una equivalencia homotópica y $\wp_n(E^n(X_\bullet, *)) = \wp_n(X_\bullet, *)$; la unidad de la adjunción $u : E^n(X_\bullet, *) \to K(\wp_n(X_\bullet, *), n)$ es, en este caso, una equivalencia homotópica, y se tiene el resultado.

Además, si $X_\bullet \sim K(\mathbb{A}, n)$, entonces $\wp_n(X_\bullet) \sim \wp_n(K(\mathbb{A}, n)) \cong \mathbb{A}$. ■

Tenemos pues descrito de forma explícita un método para realizar algebraicamente tipos de homotopía de espacios $(X, *)$, con $\pi_i(X, *) = 0$, para todo $i \neq n, n+1$ y $n \geq 3$, haciendo uso de los funtores $\wp_n$ y $K(-, n)$.

Los resultados anteriores, junto con el teorema de representación de la cohomología definida en 2.1, nos permiten clasificar clases de homotopía de aplicaciones simpliciales con rango espacios del tipo de homotopía de un grupo categórico simétrico.

Así, como consecuencia inmediata de los Teoremas 2.3.10, 2.4.3 y 2.4.4, se tiene:

Teorema 2.4.5 (Teorema de Clasificación). *Sea $(X_\bullet, *)$ un complejo de Kan punteado (no necesariamente conexo) e $(Y_\bullet, *)$ un complejo de Kan punteado con $\pi_i(Y_\bullet, *) = 0$, para todo $i \neq n, n+1$, $n \geq 3$. Entonces existe una biyección natural*

$$[(X_\bullet, *), (Y_\bullet, *)] \cong H^n(X_\bullet, \wp_n(Y_\bullet, *))$$

El caso $n = 1$, es decir, cuando $Y_\bullet$ tiene el tipo de homotopía de un grupo categórico, ha sido ya estudiado en [12] y en [7], aunque en el segundo trabajo se obtiene para el caso particular en que $X_\bullet$ sea asférico.

Para el caso $n = 2$, i.e., cuando $Y_\bullet$ es del tipo de homotopía de un grupo categórico trenzado, se obtienen análogos teoremas de clasificación en [7], en el caso particular en que $X_\bullet$ es asférico, y en [9], cuando $X_\bullet$ es del tipo de homotopía de un grupo categórico.

Ejemplo 2.4.6. Sean X e Y CW-complejos y supongamos que Y es un espacio de Eilenberg-MacLane de tipo (π, n), con $n \geq 3$, esto es, con $\pi_i(Y) = 0$, para todo $i \neq n$ y $\pi_n(Y) \cong \pi$.

Si consideramos los complejos singulares asociados a X e Y, $S(X)$, $S(Y)$, es bien conocido [16, Teorema 1.35] que se tiene una biyección $[X,Y] \cong [S(X),S(Y)]$ entre el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas de X a Y y el conjunto de clases de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $S(X)$ en $S(Y)$. Como además $\pi_i(S(Y)) \cong \pi_i(Y) = 0$, para todo $i \neq n$, entonces el Teorema 2.4.5 nos da isomorfismos:

$$[X,Y] \cong [S(X),S(Y)] \cong H^n(S(X), \wp_n(S(Y),*)).$$

Por otro lado, puesto que $\pi_1(\wp_n(S(Y),*)) \cong \pi_{n+1}(S(Y)) = \pi_{n+1}(Y) = 0$ y $\pi_0(\wp_n(S(Y),*)) \cong \pi_n(S(Y)) \cong \pi_n(Y) \cong \pi$, entonces $\wp_n(S(Y),*)$ es equivalente al grupo categórico $\pi \rightrightarrows \mathbf{1}$ y, así, por el Corolario 2.1.9, se tiene un isomorfismo

$$H^n(S(X), \wp_n(S(Y),*)) \cong H^n(X,\pi),$$

donde $H^n(X,\pi)$ denota el n-ésimo grupo de cohomología singular de X con coeficientes en π. Combinando ambos isomorfismos obtenemos que

$$[X,Y] \cong H^n(X,\pi),$$

que no es otro que el clásico teorema de clasificación de Eilenberg-MacLane.

La proposición siguiente nos permite clasificar $[X_\bullet, Y_\bullet]$ para cuando ambos $X_\bullet$ e $Y_\bullet$ son del tipo de homotopía de un grupo categórico simétrico.

Proposición 2.4.7. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ grupos categóricos simétricos y $(F,\mu),(G,\mu) : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ homomorfismos de grupos categóricos simétricos con $F(0) = G(0) = 0$. Para cada $n \geq 1$, consideramos los morfismos simpliciales que definen $K(F,n), K(G,n) : K(\mathbb{A},n) \to K(\mathbb{B},n)$.*

Entonces existe una transformación monoidal entre (F,μ) y (G,μ) si, y solamente si, $K(F,n)$ y $K(G,n)$ son homotópicamente equivalentes.

Demostración.

En primer lugar, establecemos cierta terminología. Sea $f : P \to Q$ un morfismo en $\mathbb{A}$, entonces, para cada $i \in \{0,1,...,n\}$, f determina de forma única un morfismo en $\mathbb{A}$, $f^i : 0 + ... + 0 + (-1)^i P + (-1)^{i+1} Q + 0 + ... + 0 \to 0$, dado por la composición

$$\begin{tikzcd}
0 + ... + 0 + (-1)^i P + (-1)^{i+1} Q + 0 + ... + 0 \arrow[d, "can"] \\
(-1)^i P + (-1)^{i+1} Q \arrow[d, "(-1)^i f + (-1)^{i+1} 1"] \\
(-1)^i Q + (-1)^{i+1} Q \arrow[d, "can"] \\
0
\end{tikzcd}$$

y entonces un elemento $\Gamma^i_{\mathbb{A}}(f) \in K(\mathbb{A}, n)_{n+1}$, dado por $\Gamma^i_{\mathbb{A}}(f) = (f^i, 0, ..., 0, P, Q, 0, ..., 0)$, $0 \leq i \leq n$. Es claro que la correspondencia $f \mapsto \Gamma^i_{\mathbb{A}}(f)$ establece una biyección entre el conjunto de morfismos de $\mathbb{A}$ y el conjunto de aquellos elementos de $K(\mathbb{A}, n)_{n+1}$ de la forma $(g, 0, ..., 0, P_i, P_{i+1}, 0, ..0)$. Por esta biyección, el elemento $s_i(P) = (can, 0, ..., 0, P, P, 0, ..., 0)$, $P \in Obj(\mathbb{A})$, se corresponde con la identidad $id_P : P \to P$.

Una vez introducida la terminología anterior, pasemos a la demostración: En primer lugar, recordemos (véase 2.3.3) que si denotamos mediante $K(F, n) = \{F_i\}_{i \geq 0}$, (respectivamente $K(G, n) = \{G_i\}_{i \geq 0}$), entonces $F_m = 1_{\{0\}}$, para $m < n$, $F_n = F$ y $F_{n+1} : K(\mathbb{A}, n)_{n+1} \to K(\mathbb{B}, n)_{n+1}$ aplica un $(n+1)$-símplex $(g, P_0, ..., P_{n+1}) \in K(\mathbb{A}, n)_{n+1}$ en $(F_{n+1}(g), F(P_0), ..., F(P_{n+1})) \in K(\mathbb{B}, n)_{n+1}$, donde $F_{n+1}(g) : \sum\limits_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(P_i) \to 0$ viene dado como en (2.29).

Sea $\theta : F \Rightarrow G$ una transformación monoidal, entonces puesto que $F(0) = G(0) = 0$, $\theta_0 = id_0$. Definimos aplicaciones h^j_i, $0 \leq i \leq j \leq n+1$, como se indica en el diagrama truncado

$$
\begin{tikzcd}
 & K(\mathbb{A},n)_{n+1} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_{n+1}"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[dl, shift right, "h_0^{n+1}"'] \arrow[dl, shift left, "h_{n+1}^{n+1}"] \arrow[dl, phantom, "\vdots"] \arrow[d, shift right, "F_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "G_{n+1}"] & Obj(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_n"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[dl, shift right, "h_0^{n}"'] \arrow[dl, shift left, "h_{n}^{n}"] \arrow[dl, phantom, "\vdots"] \arrow[d, shift right, "F"'] \arrow[d, shift left, "G"] & \mathbf{1} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_{n-1}"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[dl, shift right, "h_0^{n-1}"'] \arrow[dl, shift left, "h_{n-1}^{n-1}"] \arrow[dl, phantom, "\vdots"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & \mathbf{1} \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, equal] & \mathbf{1} \arrow[dl, "h_0^0"'] \arrow[d, equal] \\
K(\mathbb{B},n)_{n+2} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_{n+2}"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & K(\mathbb{B},n)_{n+1} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_{n+1}"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & Obj(\mathbb{B}) \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_n"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \mathbf{1} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_{n-1}"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \cdots \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & \mathbf{1} \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \mathbf{1}
\end{tikzcd}
$$

como sigue:

- $h_i^j(0) = 0$ para $0 \leq i \leq j \leq n-1$.
- $h_0^n(P) = \Gamma_{\mathbb{B}}^0(\theta_P : F(P) \to G(P)) = ((\theta_P)^0, F(P), G(P), 0, ..., 0)$.
- $h_i^n(P) = s_i(G(P)) = (can, 0, ..., 0, G(P), G(P), 0, ..., 0),\ 1 \leq i \leq n$.
- $h_0^{n+1}(g, P_0, ..., P_{n+1})$ viene dado por la matriz

$$
\begin{pmatrix}
F_{n+1}(g) & F(P_0) & F(P_1) & F(P_2) & \cdots & F(P_{n+1}) \\
G_{n+1}(g) \cdot (\theta_{P_0} + id) & F(P_0) & G(P_1) & G(P_2) & \cdots & G(P_{n+1}) \\
(\theta_{P_1})^0 & F(P_1) & G(P_1) & 0 & \cdots & 0 \\
(\theta_{P_2})^0 & F(P_2) & G(P_2) & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(\theta_{P_{n+1}})^0 & F(P_{n+1}) & G(P_{n+1}) & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

- $h_1^{n+1}(g, P_0, ..., P_{n+1})$ es la matriz

$$
\begin{pmatrix}
(\theta_{P_0})^0 & F(P_0) & G(P_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
G_{n+1}(g) \cdot (\theta_{P_0} + id) & F(P_0) & G(P_1) & G(P_2) & G(P_3) & \cdots & G(P_{n+1}) \\
G_{n+1}(g) & G(P_0) & G(P_1) & G(P_2) & G(P_3) & \cdots & G(P_{n+1}) \\
can & 0 & G(P_2) & G(P_2) & 0 & \cdots & 0 \\
can & 0 & G(P_3) & G(P_3) & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
can & 0 & G(P_{n+1}) & G(P_{n+1}) & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

- $h_i^{n+1}(g, P_0, ..., P_{n+1}) = s_i(G_{n+1}(g, P_0, ..., P_{n+1})),\ 2 \leq i \leq n+1$.

Es fácil comprobar las identidades simpliciales homotópicas para estas aplicaciones h_i^j, las cuales extienden, puesto que $K(\mathbb{B},n)$ es un $(n+1)$-coesqueleto, a una homotopía $h : K(F,n) \to K(G,n)$.

Recíprocamente, sea $h = \left(h_i^j\right)_{0\leq i\leq j} : K(F,n) \to K(G,n)$ una homotopía simplicial. Puesto que $K(\mathbb{B},n)$ es $(n-1)$-reducido (y $n \geq 1$), podemos suponer, sin restricción alguna, que $h_i^j(0) = 0$, para $0 \leq i \leq j \leq n-1$. Entonces, por las identidades simpliciales para homotopías, resulta que $d_i h_j^n(P) = 0$, para $i < j$ ó $i \geq j+1$, y entonces

- $h_0^n(P) = (h_0^n, F(P), d_1h_0^n(P), 0, ..., 0)$,
- $h_i^n(P) = (h_i^n, 0, ..., 0, d_ih_i^n(P), d_{i+1}h_i^n(P), 0, ..., 0), \quad 1 \leq i \leq n-1$,
- $h_n^n(P) = (h_n^n, 0, ..., 0, d_nh_n^n(P), G_n(P))$,

con $d_ih_{i-1}^n(P) = d_ih_i^n(P)$, para $1 \leq i \leq n$.

Definimos $\theta_P : F(P) \to G(P)$ por la composición

$$
\begin{array}{c}
F(P) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \Gamma^0_{\mathbb{B}}(h_0^n(P))^{-1}} \\
d_1h_0^n(P) = d_1h_1^n(P) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \Gamma^1_{\mathbb{B}}(h_1^n(P))^{-1}} \\
d_2h_1^n(P) = d_2h_2^n(P) \\
\Big\downarrow \\
\ddots \\
\Big\downarrow \\
d_{n-1}h_{n-2}^n(P) = d_{n-1}h_{n-1}^n(P) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \Gamma^{n-1}_{\mathbb{B}}(h_{n-1}^n(P))^{-1}} \\
d_nh_{n-1}^n(P) = d_nh_n^n(P) \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \Gamma^{n}_{\mathbb{B}}(h_{n}^n(P))^{-1}} \\
G(P)
\end{array}
$$

La naturalidad de θ es consecuencia de las identidades homotópicas simpliciales sobre $h_i^{n+1}(\Gamma^0_{\mathbb{A}}(f))$, $0 \leq i \leq n$, para $f : P \to Q$ un morfismo en $\mathbb{A}$. La compatibilidad de θ con los isomorfismos canónicos μ de F y G se deduce también de las identidades homotópicas sobre $h_i^{n+1}(can_{P,Q}, P, P+Q, Q, 0, ..., 0)$, para P y Q objetos de $\mathbb{A}$.

■

Notemos que para $n = 0$, también se tiene asegurada la existencia de una transformación natural $\theta : F \Rightarrow G$, a partir de la homotopía $h : K(F,n) \to K(G,n)$, realizando los mismos pasos que en la demostración anterior. Sin embargo, en este caso, θ no es necesariamente coherente.

La Proposición anterior, junto con los Teoremas 2.4.3 y 2.4.4, nos permiten concluir:

Teorema 2.4.8.

a. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ grupos categóricos simétricos, para cada $n \geq 3$, el funtor $K(-,n)$ induce una biyección

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \cong [K(\mathbb{A}, n), K(\mathbb{B}, n)],$$

entre el conjunto de clases de isomorfía de homomorfismos de grupos categóricos simétricos de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ y el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales entre sus n-nervios.

b. Si $(X_\bullet, *)$ e $(Y_\bullet, *)$ son complejos de Kan punteados con $\pi_j(X_\bullet, *) = 0 = \pi_j(Y_\bullet, *)$, para $j \neq n, n+1, n \geq 3$, entonces existe una biyección

$$[(X_\bullet, *), (Y_\bullet, *)] \cong [\wp_n(X_\bullet, *), \wp_n(Y_\bullet, *)].$$

Como corolario del Teorema anterior y del Teorema 2.3.10 de representación, tenemos

Teorema 2.4.9. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ grupos categóricos simétricos, entonces, para cada $n \geq 3$, existe una biyección*

$$H^n(K(\mathbb{A}, n), \mathbb{B}) \cong [\mathbb{A}, \mathbb{B}].$$

Para los casos $n = 0, 1, 2$ se verifica:

Proposición 2.4.10. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ grupos categóricos simétricos, entonces existen biyecciones:*

$$H^0(K(\mathbb{A},0),\mathbb{B}) \cong [\mathbb{A},\mathbb{B}]_0,$$

$$H^1(K(\mathbb{A},1),\mathbb{B}) \cong [\mathbb{A},\mathbb{B}]_1,$$

$$H^2(K(\mathbb{A},2),\mathbb{B}) \cong [\mathbb{A},\mathbb{B}],$$

donde $[\mathbb{A},\mathbb{B}]_0$ (respectivamente $[\mathbb{A},\mathbb{B}]_1$, $[\mathbb{A},\mathbb{B}]$) denota el conjunto de clases de isomorfía de funtores (respectivamente, homomorfismos de grupos categóricos, de grupos categóricos simétricos) de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$.

Demostración.

Por el Teorema 2.3.10, $H^n(K(\mathbb{A},n),\mathbb{B}) \cong [K(\mathbb{A},n),K(\mathbb{B},n)]$. Como $K(\mathbb{A},0) \cong Ner(\mathbb{A})$, $K(\mathbb{A},1) \cong Ner_2(\mathbb{A})$ y $K(\mathbb{A},2) \cong Ner_3(\mathbb{A})$, según vimos en los Ejemplos 2.3.5, 2.3.6 y 2.3.7, respectivamente, entonces el primer isomorfismo es consecuencia del hecho bien conocido de que $[Ner(\mathbb{A}),Ner(\mathbb{B})] \cong [\mathbb{A},\mathbb{B}]_0$. El segundo es consecuencia del Teorema 3.2 en [9] y, finalmente, el tercero del Teorema 3.4, en el mismo trabajo.

∎

Capítulo 3

G-módulos cruzados categóricos y 2-extensiones especiales.

En este capítulo definimos las nociones de *G-módulo cruzado categórico*, para G un grupo, y de *2-extensión especial* de G por un grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ sobre el que hay definida una G-acción. Observamos que estos conceptos cubren, respectivamente, las nociones usuales de módulo cruzado de grupos y de 2-extensión especial de un grupo G por un G-módulo A; así como las de 2-módulo cruzado y 3-extensión no abeliana debidas a Conduché, [15]. Demostramos que la clasificación cohomológica de estas 2-extensiones viene dada por $H^4_{Ulb}(G, \mathbb{A})$, el cuarto grupo de cohomología de Ulbrich (Frölich-Wall) de G con coeficientes en $\mathbb{A}$; para lo cual, previamente, damos una descripción alternativa de $H^4_{Ulb}(G, \mathbb{A})$. De esta forma, extendemos, en una dimensión más, la interpretación de Ulbrich de $H^3_{Ulb}(G, \mathbb{A})$, en términos de extensiones centrales de G por $\mathbb{A}$. Finalmente, cuando la G-acción sobre $\mathbb{A}$ es trivial, probamos que la clasificación homotópica de estas 2-extensiones viene dada por el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales desde el complejo clasificador de G, $K(G, 1)$, en el complejo clasificador de $\mathbb{A}$, $K(\mathbb{A}, 3)$, definido en el capítulo anterior.

3.1 G-módulos cruzados categóricos.

Comenzaremos recordando la definición y algunos ejemplos de G-grupos categóricos, (véase por ejemplo [2], [14]).

Para mayor claridad en la exposición, seguiremos haciendo uso de la notación aditiva par la operación de G, (no necesariamente abeliano), y para el producto tensor de un grupo categórico $\mathbb{H}$, (no necesariamente simétrico).

Es bien conocido que una acción de un grupo G sobre un grupo H consiste de un homomorfismo de grupos, $G \to Aut(H)$, desde G en el grupo de automorfismos de H. Cuando se consideran grupos categóricos, el papel jugado por el grupo de automorfismos es ahora desempeñado por el grupo categórico de autoequivalencias, $\mathcal{E}q(\mathbb{H})$, de un grupo categórico $\mathbb{H}$, (véase Ejemplo 1.1.3).

Entonces dados grupos categóricos $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$, una $\mathbb{G}$-*acción* sobre $\mathbb{H}$ es un homomorfismo de grupos categóricos, [2],

$$(F, \mu) : \mathbb{G} \to \mathcal{E}q(\mathbb{H}). \tag{3.1}$$

Cuando tal acción es dada se dice que $\mathbb{H}$ es un $\mathbb{G}$-*grupo categórico*. Si $\mathbb{H}$ es un grupo categórico trenzado o simétrico y el homomorfismo (3.1) factoriza por el subgrupo categórico de $\mathcal{E}q(\mathbb{H})$ de autoequivalencias que son homomorfismos de grupos categóricos trenzados o simétricos, diremos que $\mathbb{H}$ es un $\mathbb{G}$-*grupo categórico trenzado o simétrico*.

Estamos principalmente interesados en el caso en que $\mathbb{G}$ sea el grupo categórico discreto, con sólo identidades, definido por un grupo G, $\mathbb{G} = \underline{G} = (G \rightrightarrows G)$. En este caso, tenemos la siguiente definición equivalente:

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo y $\mathbb{H}$ un grupo categórico. Una $\underline{G}$-acción, o simplemente una G-acción, sobre $\mathbb{H}$ consiste en dar equivalencias*

$$^{g}(-) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad X \mapsto {}^{g}X, \tag{3.2}$$

para cada $g \in G$, junto con isomorfismos naturales

$$\psi = \psi_{g,X,Y} : {}^{g}(X + Y) \to {}^{g}X + {}^{g}Y \tag{3.3}$$

$$\phi = \phi_{g,h,X} : {}^{(g+h)}X \to {}^{g}\left({}^{h}X\right) \tag{3.4}$$

tales que para cualesquiera objetos $g, h, k \in G$ y cualesquiera objetos X, Y y Z de $\mathbb{H}$, los diagramas siguientes son conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
& {}^{g}[(X+Y)+Z] \arrow[r, "\psi_g"] \arrow[dl, "{}^{g}a"'] & {}^{g}(X+Y)+{}^{g}Z \arrow[dr, "\psi_g+1"] & \\
{}^{g}[X+(Y+Z)] \arrow[dr, "\psi_g"'] & & & ({}^{g}X+{}^{g}Y)+{}^{g}Z \arrow[dl, "a"] \\
& {}^{g}X+{}^{g}(Y+Z) \arrow[r, "1+\psi_g"'] & {}^{g}X+({}^{g}Y+{}^{g}Z) &
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(g+h+k)}X \arrow[r, "\phi_{g,h+k}"] \arrow[d, "\phi_{g+h,k}"'] & {}^{g}\left({}^{(h+k)}X\right) \arrow[d, "{}^{g}\phi_{h,k}"] \\
{}^{(g+h)}\left({}^{k}X\right) \arrow[r, "\phi_{g,h}"'] & {}^{g}\left({}^{h}\left({}^{k}X\right)\right)
\end{tikzcd}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(g+h)}(X+Y) \arrow[rr, "\psi_{g+h}"] \arrow[d, "\phi_{g,h}"'] & & {}^{(g+h)}X+{}^{(g+h)}Y \arrow[d, "\phi_{g,h}+\phi_{g,h}"] \\
{}^{g}\left({}^{h}(X+Y)\right) \arrow[dr, "{}^{g}\psi_h"'] & & {}^{g}\left({}^{h}X\right)+{}^{g}\left({}^{h}Y\right) \\
& {}^{g}\left({}^{h}X+{}^{h}Y\right) \arrow[ur, "\psi_g"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

Además, si $\mathbb{H}$ es un grupo categórico trenzado (o simétrico), entonces el diagrama siguiente (que expresa la compatibilidad de la acción con los isomorfismos canónicos de conmutatividad) ha de ser conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
{}^{g}(X+Y) \arrow[r, "\psi_{g,X,Y}"] \arrow[d, "{}^{g}c"'] & {}^{g}X+{}^{g}Y \arrow[d, "c_{{}^{g}X,{}^{g}Y}"] \\
{}^{g}(Y+X) \arrow[r, "\psi_{g,Y,X}"'] & {}^{g}Y+{}^{g}X
\end{tikzcd}
\tag{3.8}
$$

Proposición 3.1.2. *Sea $\mathbb{H}$ un G-grupo categórico. Entonces para cada $g \in G$ y $X \in Obj(\mathbb{H})$ existen isomorfismos (únicos)*

$$\phi_0 = \phi_{0,X} : {}^{0}X \to X, \qquad \xi = \xi_g : {}^{g}0 \to 0 \tag{3.9}$$

tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
{}^{g}(0+X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "{}^{g}l"'] & {}^{g}0+{}^{g}X \arrow[d, "\xi_g+1"] \\
{}^{g}X & 0+{}^{g}X \arrow[l, "l"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}^{g}(X+0) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "{}^{g}r"'] & {}^{g}X+{}^{g}0 \arrow[d, "1+\xi_g"] \\
{}^{g}X & {}^{g}X+0 \arrow[l, "r"]
\end{tikzcd}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(g+0)}X \arrow[rr, "\phi_{0,g,X}"] \arrow[dr, equal] & & {}^{g}({}^{0}X) \arrow[dl, "{}^{g}\phi_0"] \\
& {}^{g}X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}^{(0+g)}X \arrow[rr, "\phi_{g,0,X}"] \arrow[dr, equal] & & {}^{0}({}^{g}X) \arrow[dl, "\phi_0"] \\
& {}^{g}X &
\end{tikzcd}
\tag{3.11}
$$

Lo que nos garantiza también la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(g+h)}0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\xi"'] & {}^{g}({}^{h}0) \arrow[d, "{}^{g}\xi"] \\
0 & {}^{g}0 \arrow[l, "\xi"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}^{0}(X+Y) \arrow[rr, "\phi_0"] \arrow[dr, "\psi"'] & & X+Y \\
& {}^{0}X+{}^{0}Y \arrow[ur, "\phi_0+\phi_0"'] &
\end{tikzcd}
\tag{3.12}
$$

Demostración.

Puesto que los funtores ${}^{0}(-):\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ son equivalencias, definimos, para cada $X\in Obj(\mathbb{H})$, $\phi_{0,X}:\ {}^{0}X\to X$ como el único morfismo en $\mathbb{H}$ tal que ${}^{0}(\phi_{0,X})=\phi_{0,0,X}^{-1}:\ {}^{0}({}^{0}X)\to\ {}^{0}X$. Consideramos ahora el diagrama (3.6) para $g=h=0$, que nos da la conmutatividad de la parte exterior del diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
{}^{(0+0+k)}X \arrow[rr, "\phi_{0,0+k,X}"] \arrow[dd, "\phi_{0,k,X}"'] & & {}^{0}({}^{k}X) \arrow[dd, "{}^{0}(\phi_{0,k,X})"] \arrow[dl, equal] \\
& {}^{0}({}^{k}X) \arrow[r, phantom, "2"] \arrow[dl, equal] \arrow[d, phantom, "1"] & {} \\
{}^{0}({}^{k}X) \arrow[rr, "\phi_{0,0,{}^{k}X}"'] & {} & {}^{0}({}^{0}({}^{k}X)) \arrow[ul, "{}^{0}\phi_{0,{}^{k}X}"']
\end{tikzcd}
$$

Puesto que 1 es conmutativo por definición de ϕ_0, el diagrama 2 ha de ser conmutativo y entonces, usando de nuevo que ${}^{0}(-)$ es una equivalencia, se obtiene la identidad $(\phi_{0,k,X})^{-1}=\phi_{0,{}^{k}X}$, para todo $k\in G$, que expresa la conmutatividad del diagrama de la derecha en (3.11). La conmutatividad del diagrama de la izquierda se obtiene de forma similar.

Respecto a los morfismos ξ_g se procede de forma análoga. Elegimos un objeto X de $\mathbb{H}$ (por ejemplo, $X = 0$) y definimos, haciendo uso de que las traslaciones son equivalencias, $\xi_g : {}^g0 \to 0$ como el único morfismo tal que el diagrama de la derecha de (3.10) es conmutativo. Consideramos ahora el diagrama (3.5) para $Y = 0$, que implica la conmutatividad de la parte exterior del diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
 & {}^g[(X+0)+Z] \arrow[r, "\psi_g"] \arrow[d, "{}^g(r+1)"] \arrow[ddl, "{}^g a"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{2}"] & {}^g(X+0)+{}^gZ \arrow[ddl, "{}^g r+1"] \arrow[ddr, "\psi_g+1"] \arrow[d, phantom, "\textcircled{3}"] & \\
 & {}^g(X+Z) \arrow[d, "\psi"'] \arrow[l, phantom, "\textcircled{1}"] & & \\
{}^g[X+(0+Z)] \arrow[ur, "{}^g(1+l)"'] \arrow[ddr, "\psi_g"'] \arrow[r, phantom, "\textcircled{4}"] & {}^gX+{}^gZ \arrow[dr, phantom, "\textcircled{5}"] & ({}^gX+0)+{}^gZ \arrow[l, "r+1"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{7}"] & ({}^gX+{}^g0)+{}^gZ \arrow[l, "(1+\xi_g)+1"] \arrow[ddl, "a"] \\
 & & {}^gX+(0+{}^gZ) \arrow[ul, "1+l"] & \\
 & {}^gX+{}^g(0+Z) \arrow[r, "1+\psi_g"'] \arrow[uu, "1+{}^gl"] \arrow[ur, phantom, "\textcircled{6}"] & {}^gX+({}^g0+{}^gZ) \arrow[u, "1+(\xi_g+1)"] &
\end{tikzcd}$$

donde además ① y ⑤ son conmutativos por coherencia; ②, ④ y ⑦ por naturalidad de ψ y a. El diagrama ③ (respectivamente, ⑥) es el diagrama de la derecha de (3.10) (respectivamente, izquierda) tensorizado con $1_{{}^gZ}$, (respectivamente, $1_{{}^gX}$). Concluimos entonces que los diagramas en (3.10) son conmutativos para cualesquiera objetos X y Z de $\mathbb{H}$.

Finalmente, con demostraciones similares, se deduce que los diagramas en (3.12) son conmutativos. ■

3.1.3. Una G-acción sobre un grupo categórico $\mathbb{H}$ se dice *estricta* (respectivamente *normalizada*) cuando todos los isomorfismos $\phi_{g,h,X}$, $\psi_{g,X,Y}$, $\phi_{0,X}$ y ξ_g, (respectivamente $\phi_{0,X}$ y ξ_g) son identidades, o, equivalentemente, cuando el homomorfismo $(F,\mu) : \underline{G} \to \mathcal{E}q(\mathbb{H})$, que define la acción, factoriza a través del subgrupo categórico $\mathcal{A}ut(\mathbb{H})$, (véase Ejemplo 1.1.3),

$$\begin{tikzcd}
\underline{G} \arrow[rr, "{(F,\mu)}"] \arrow[dr, "{(F,1)}"'] & & \mathcal{E}q(\mathbb{H}) \\
& \mathcal{A}ut(\mathbb{H}) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

vía un homomorfismo estricto.

Un G-grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ verificando que $c_{X,X} = 1_{X+X}$, para todo $X \in Obj(\mathbb{A})$, (es decir, $\mathbb{A}$ es un grupo categórico simétrico estrictamente coherente [48]), es lo que Ulbrich llama *una categoría de Picard conmutativa con estructura de G-módulo a izquierda coherente*, [54].

Sean $\mathbb{H}$ y $\mathbb{E}$ dos G-grupos categóricos. Un homomorfismo de grupos categóricos $F = (F,\mu) : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ diremos que es *G-equivariante* si existe una familia de isomorfismos naturales

$$\lambda = \{\lambda_{g,X} : {}^{g}F(X) \to F({}^{g}X)\}_{(g,X)\in G\times Obj(\mathbb{H})}\,,$$

tal que, para cualesquiera elementos $g,h \in G$ y cualesquiera objetos X, Y de $\mathbb{H}$, los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
& {}^{g}F(X+Y) \arrow[r, "\lambda"] & F({}^{g}(X+Y)) \arrow[dr, "F(\psi)"] & \\
{}^{g}(F(X)+F(Y)) \arrow[ur, "{}^{g}\mu"] \arrow[dr, "\psi"'] & & & F({}^{g}X+{}^{g}Y) \\
& {}^{g}F(X)+{}^{g}F(Y) \arrow[r, "\lambda+\lambda"'] & F({}^{g}X)+F({}^{g}Y) \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.13}$$

$$\begin{tikzcd}
{}^{(g+h)}F(X) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[d, "\phi"'] & & F({}^{g+h}X) \arrow[d, "F(\phi)"] \\
{}^{g}({}^{h}F(X)) \arrow[dr, "{}^{g}\lambda"'] & & F({}^{g}({}^{h}X)) \\
& {}^{g}F({}^{h}X) \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

En tal caso, los diagramas

$$\begin{tikzcd} {}^0F(X) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\phi_0"'] & & F({}^0X) \arrow[dl, "F(\phi_0)"] \\ & F(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}^gF(0) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\xi\cdot\, {}^g\mu_0"'] & F({}^g0) \arrow[d, "F(\xi)"] \\ 0 & F(0) \arrow[l, "\mu_0"] \end{tikzcd}$$

también son conmutativos, siendo ϕ_0 y ξ los morfismos dados en la Proposición 3.1.2.

Si $(F', \lambda') : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ es otro homomorfismo G-equivariante, una transformación monoidal $\theta : F \Rightarrow F'$ se dice G-*equivariante* si, para cada $g \in G$ y $X \in Obj(\mathbb{H})$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} {}^gF(X) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "{}^g\theta_X"'] & F({}^gX) \arrow[d, "\theta_{{}^gX}"] \\ {}^gF'(X) \arrow[r, "\lambda'"'] & F'({}^gX) \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si $(F, \lambda) : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ y $(F', \lambda') : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ son homomorfismos G-equivariantes, su composición es el homomorfismo G-equivariante $(F'', \lambda'') : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$, donde $F'' = F' \cdot F : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ y $\lambda''_{g,X} : \ {}^g(F'F(X)) \to F'F(\ {}^gX)$ viene dado por la composición

$$ {}^g(F'F(X)) \xrightarrow{\lambda'_{g,F(X)}} F'({}^gF(X)) \xrightarrow{F'(\lambda_{g,X})} F'F({}^gX)\ .$$

Veamos, a continuación, algunos ejemplos de G-grupos categóricos:

Ejemplo 3.1.4. Los conceptos usuales de G-grupo y G-módulo son casos particulares de la Definición 3.1.1, (véase [11]). En efecto, es fácil ver que si $\mathbb{H}$ es el grupo categórico discreto definido por un grupo H, entonces dar una G-acción sobre $\underline{H} = (H \rightrightarrows H)$ es lo mismo que dar un homomorfismo de grupos $G \to Aut(H)$. Por otro lado, si A es un grupo abeliano y consideramos el grupo categórico simétrico con un sólo objeto $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$, entonces una G-acción sobre $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$ es lo mismo que una G-acción sobre A, junto con una 1-cocadena de G con coeficientes en el G-módulo A en el sentido de Eilenberg-MacLane.

Ejemplo 3.1.5. Sea $\delta : N \to O$ un módulo cruzado y consideremos el grupo categórico estricto que define, $\mathbb{G}(\delta)$, (véase el Ejemplo 1.1.4). Entonces dar una G-acción sobre $\mathbb{G}(\delta)$ se traduce en dar una lista de aplicaciones y condiciones sobre ellas que a continuación describimos.

La existencia del funtor (3.2) y de los isomorfismos naturales (3.3) y (3.4) se traduce en la existencia de aplicaciones

$$G \times O \to O, \qquad (g, x) \mapsto {}^{g}x,$$

$$t : G \times N \times O \to N, \quad \Psi : G \times O^2 \to N \quad , \Phi : G^2 \times O \to N$$

tales que:

i) $\delta(t(g, n, x)) + {}^{g}x = {}^{g}(\delta n + x)$

ii) $\delta(\Psi(g, x, y)) + {}^{g}(x + y) = {}^{g}x + {}^{g}y$

iii) $\delta(\Phi(g_1, g_2, x) + {}^{g_1+g_2}x = {}^{g_1}({}^{g_2}x)$

para cualesquiera $g, g_1, g_2 \in G, x, y \in O, n \in N$.

Las condiciones de funtorialidad de (3.2) y las de naturalidad de (3.3) y (3.4) se traducen en:

iv) $t(g, 0, x) = 0$

v) $t(g, n' + n, x) = t(g, n', \delta n + x) + t(g, n, x)$

vi) $t(g, n, x) + \Psi(g, x, y) = \Psi(g, \delta n + x, y) + t(g, n, x + y)$

vii) $\Psi(g, x, \delta n + y) + t(g, {}^{x}n, x + y) = {}^{gx}t(g, n, y) + \Psi(g, x, y)$

viii) $t(g_1, t(g_2, n, x), {}^{g_2}x) + \Phi(g_1, g_2, x) = \Phi(g_1, g_2, \delta n + x) + t(g_1 + g_2, n, x)$

para cada $g, g_1, g_2 \in G$, $x, y \in O$ y $n, n' \in N$ y donde la acción de O sobre N la denotamos igualmente por $(x, n) \mapsto {}^{x}n$.

Finalmente, la condición de conmutatividad de los diagramas (3.5),(3.6) y (3.7) se traduce en

ix) $\Psi(g, x, y) + \Psi(g, x + y, z) = {}^{gx}\Psi(g, y, z) + \Psi(g, x, y + z)$

x) $\Phi(g_1, g_2, {}^{g_3}x) + \Phi(g_1+g_2, g_3, x) = t(g_1, \Phi(g_2, g_3, x), {}^{g_2+g_3}x) + \Phi(g_1, g_2+g_3, x)$

xi) $\Psi(g_1, {}^{g_2}x, {}^{g_2}y) + t(g, \Psi(g_2, x, y), {}^{g_2}(x+y)) + \Phi(g_1, g_2, x+y) =$

$$\Phi(g_1, g_2, x) + {}^{g_1+g_2 x}\Phi(g_1, g_2, y) + \Psi(g_1+g_2, x, y)$$

Si además $\delta : N \to O$ es un módulo cruzado reducido (o estable) con operador corchete $\{-,-\} : O \times O \to N$, entonces la conmutatividad del diagrama (3.8) se traduce en la siguiente condición:

xii) $\{{}^{g}y, {}^{g}x\} + \Psi(g, x, y) = \Psi(g, y, x) + t(g, \{y, x\}, x+y)$

para cualesquiera $x, y \in O, g \in G, n \in N$.

En particular, si la G-acción sobre $\mathbb{G}(\delta)$ es estricta, entonces las aplicaciones Ψ y Φ han de ser constantes e iguales a 0 y la condición *vi)* nos dice, entonces, que la aplicación t no depende de los elementos de O y por *v)* y *viii)*, define una acción de G sobre N, que denotaremos también por $t(g, n) = {}^{g}n$. Por otro lado, *ii)* y *iii)* expresan que la aplicación $G \times O \to O$ es una acción y la relación entre estas dos G-acciones sobre N y O, con $\delta : N \to O$, y la acción de O sobre N viene dada por *i)* y *vii)*, es decir,

$$\delta({}^{g}n) = {}^{g}\delta(n), \qquad {}^{g}({}^{x}n) = {}^{{}^{g}x}({}^{g}n). \tag{3.15}$$

Concluimos entonces que dar una G-acción estricta sobre $\mathbb{G}(\delta)$ es equivalente a dar G-acciones sobre N y O verificando las identidades (3.15), (pues *iv)*, *x)* y *xi)* son triviales en este caso). Si además $\delta : N \to O$ es un módulo cruzado reducido (o estable) se ha de verificar también la identidad

$$\{{}^{g}x, \ {}^{g}y\} = {}^{g}\{x, y\}, \qquad \forall g \in G, \forall x, y \in O.$$

Ejemplo 3.1.6. En este ejemplo describimos la estrecha relación que existe entre la noción de G-grupo categórico y la categoría *monoidal G-graduada* definida por Frölich y Wall en [25].

Consideramos ahora G como una categoría con un único objeto. Una *categoría establemente G-graduada* es un par $(\mathbb{C}, p)$, donde $\mathbb{C}$ es una categoría y $p : \mathbb{C} \to (G \rightrightarrows \mathbf{1})$ es un funtor tal que para todo $X \in Obj(\mathbb{C})$ y $g \in G$, existe un isomorfismo f en $\mathbb{C}$ con dominio X y $p(f) = g$ (es decir, p es una cofibración en el sentido de Grothendieck [30]). Para f un morfismo en $\mathbb{C}$,

$p(f)$ es llamado el *grado* de f y la subcategoría de $\mathbb{C}$ consistente de todos los morfismos de grado 0 se denotará por $Ker(\mathbb{C})$.

Un *G-funtor* entre categorías establemente G-graduadas es un funtor sobre la identidad, o equivalentemente, un funtor preservando el grado de los morfismos.

Entonces, un categoría monoidal G-graduada consiste de: una categoría establemente G-graduada $(\mathbb{C}, p)$, un G-funtor $+ : \mathbb{C} \times_G \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, (i.e., $h + k$ está definida únicamente cuando h y k tienen el mismo grado y $p(h + k) = p(h) = p(k)$), un G-funtor $0 : (G \rightrightarrows \mathbf{1}) \to \mathbb{C}$ y equivalencias naturales (de grado 0), $a : (X + Y) + Z \to X + (Y + Z)$, $l : 0 + X \to X$, $r : X + 0 \to X$ verificando las condiciones usuales de coherencia.

Si $(\mathbb{C}, p)$ es una categoría monoidal G-graduada, entonces $Ker(\mathbb{C})$ es una categoría monoidal en el sentido usual. Además, cuando $Ker(\mathbb{C})$ es un grupo categórico es fácil ver que $\mathbb{C}$ es también un grupoide.

Ulbrich demuestra en [57] que existe una correspondencia uno a uno entre categorías monoidales G-graduadas simétricas y estrictamente coherentes y categorías de Picard conmutativas con estructura de G-módulo coherente (véase 3.1.3). Este resultado es también cierto en el caso no simétrico y puede expresarse en los siguientes términos:

Dar una G-acción sobre un grupo categórico $\mathbb{H}$ es equivalente a dar una categoría monoidal G-graduada $(\mathbb{C}, p)$ tal que $Ker(\mathbb{C})$ es un grupo categórico isomorfo a $\mathbb{H}$.

La demostración está basada en la equivalencia de Grothendieck entre pseudofuntores y cofibraciones [30], (véase también [10]). Así, supuesto dada una G-acción sobre $\mathbb{H}$, definimos un pseudofuntor

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, i, C) : (G \rightrightarrows \mathbf{1}) \to \mathbf{Cat}, \tag{3.16}$$

donde $\mathbf{Cat}$ denota la categoría de categorías pequeñas, por $\mathcal{F}(\mathbf{1}) = \mathbb{H}$, $g_* = {}^g(-) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ para todo $g \in G$ y las equivalencias naturales $i : (1_{\mathbf{1}})_* \to 1_{\mathbb{H}}$, $C_{g,h} : (g + h)_* \to g_* \cdot h_*$ son dadas por ϕ_0 y $\phi_{g,h}$, respectivamente.

Las condiciones (3.6) y (3.11) expresan exactamente los correspondientes axiomas del pseudofuntor. La cofibración asociada a este pseudofuntor es, entonces, una categoría establemente G-graduada

$$p : \mathbb{C} \to (G \rightrightarrows \mathbf{1})$$

donde $\mathbb{C}$ es la categoría con los mismos objetos que $\mathbb{H}$ y cuyos morfismos son pares $(g, x) : X \to Y$, con $g \in G$ y $x : {}^{g}X \to Y$ un morfismo en $\mathbb{H}$. La composición es dada por el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(g_1,x)"] \arrow[dr, "(g_2+g_1,\, y\cdot {}^{g_2}x\cdot\phi_{g_2,g_1})"'] & Y \arrow[d, "(g_2,y)"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

y el funtor p es la proyección, esto es, $p(g, x) = g$.

$(\mathbb{C}, p)$ resulta ser, en este caso, una categoría monoidal G-graduada, donde el G-funtor $+ : \mathbb{C} \times_G \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es definido en objetos como en $\mathbb{H}$, y dados morfismos del mismo grado $(g, x) : X \to Y$ y $(g, y) : Z \to W$, entonces

$$(g, x) + (g, y) = (g, (x + y) \cdot \psi_g) : X + Z \to Y + W.$$

El funtor $0 : (G \rightrightarrows \mathbf{1}) \to \mathbb{C}$ aplica el único objeto de $(G \rightrightarrows \mathbf{1})$ en el objeto cero de $\mathbb{H}$, y para todo $g \in G$, $0(g) = (g, \xi_g)$, (donde $\xi_g : {}^{g}0 \to 0$ es el morfismo de la Proposición 3.1.2). Finalmente, las equivalencias naturales (de grado 0) de asociatividad, unidad a izquierda y derecha son dadas por $(0, a \cdot \phi_0) : (X + Y) + Z \to X + (Y + Z)$, $(0, l \cdot \phi_0) : 0 + X \to X$ y $(0, r \cdot \phi_0) : X + 0 \to X$.

Se tienen homomorfismos estrictos de grupos categóricos, $T : \mathbb{H} \to Ker(\mathbb{C})$ y $S : Ker(\mathbb{C}) \to \mathbb{H}$, dados por $T(X) = X$, $T(x : X \to Y) = x \cdot \phi_{0,X}$ y $S(X) = X$, $S((0, x) : {}^{0}X \to Y) = x \cdot (\phi_{0,X})^{-1}$, ($\phi_0$ es el isomorfismo canónico dado en la Proposición 3.1.2), que claramente verifican las identidades $T \cdot S = 1_{Ker(\mathbb{C})}$ y $S \cdot T = 1_{\mathbb{H}}$. Así, $\mathbb{H}$ y $Ker(\mathbb{C})$ son grupos categóricos isomorfos.

Recíprocamente, sea $(\mathbb{C}, p)$ una categoría monoidal G-graduada con $Ker(\mathbb{C})$ un grupo categórico. Puesto que p es cofibración, elegimos un conjunto de isomorfismos en $\mathbb{C}$, $\{\alpha_g(X) : X \to {}^{g}X\}_{(g,X)\in G\times Obj(\mathbb{C})}$ con $p(\alpha_g(X)) = g$, (un *cocleavage* en la terminología de [25]). Obtenemos un funtor $(-)^g : Ker(\mathbb{C}) \to Ker(\mathbb{C})$ que aplica un morfismo de grado cero $x : X \to Y$ en el morfismo, también de grado cero,

$$^{g}x :\ {}^{g}X \xrightarrow{\alpha_g(X)^{-1}} X \xrightarrow{\quad x \quad} Y \xrightarrow{\alpha_g(Y)} {}^{g}Y\ .$$

Definimos $\psi_{g,X,Y} :\ {}^{g}(X+Y) \to {}^{g}X + {}^{g}Y$ y $\phi_{g,h,X} : {}^{g+h}X \to {}^{g}({}^{h}X)$, respectivamente, por las composiciones:

$$^{g}(X+Y) \xrightarrow{\alpha_g(X+Y)^{-1}} X+Y \xrightarrow{\alpha_g(X)+\alpha_g(Y)} {}^{g}X +\ {}^{g}Y\ ,$$

$$^{g+h}X \xrightarrow{\alpha_{g+h}(X)^{-1}} X \xrightarrow{\quad \alpha_g(X) \quad} {}^{g}X \xrightarrow{\quad \alpha_g({}^{h}X) \quad} {}^{g}({}^{h}X)\ .$$

Se tiene que la terna $({}^{g}(-), \psi, \phi)$ define una G-acción sobre $Ker(\mathbb{C})$.

Puesto que siempre podemos tomar $\alpha_0(X) = 1_X$ y $\alpha_g(0) = 0(g)$, concluimos, una primera consecuencia: *Cualquier G-grupo categórico es isomorfo por un isomorfismo G-equivariante a un G-grupo categórico normalizado.*

Ejemplo 3.1.7. Sean N y O G-grupos y $\delta : N \to O$ un módulo cruzado verificando las identidades (3.15). Consideramos el G-grupo categórico estricto $\mathbb{G}(\delta)$ asociado a δ. Entonces la categoría monoidal G-graduada $(\mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)}, p)$ obtenida desde $\mathbb{G}(\delta)$, se puede describir como sigue:

El conjunto de objetos de $\mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)}$ es el grupo O y el conjunto de morfismos de $\mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)}$ se corresponde biyectivamente con $G \times N \times O$. Un morfismo (g, n, x) tiene a x como dominio, $\delta(n) + {}^{g}x$ como rango y grado g. La composición es dada por

$$(g_1, n_1, x_1) \cdot (g_0, n_0, x_0) = (g_1 + g_0, n_1 + {}^{g_0}n_0, x_0),$$

cuando $x_1 = \delta(n_0) + {}^{g_0}x_0$. El G-funtor $+ : \mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)} \times_G \mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)} \to \mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)}$ es dado en objetos por la operación en O y en morfismos del mismo grado por:

$$(g, n_1, x_1) + (g, n_0, x_0) = (g, n_1 + {}^{x_1}n_0, x_1 + x_0).$$

El funtor $0 : (G \rightrightarrows 1) \to \mathbb{C}_{\mathbb{G}(\delta)}$ se define por $0(g) = (g, 0, 0)$ y las equivalencias naturales de asociatividad, unidades derecha e izquierda son identidades.

En particular, si N y O son G-módulos (i.e., son abelianos) y $\delta : N \to O$ es un homomorfismo de G-módulos (y, entonces, un módulo cruzado, considerando la acción trivial de O sobre N), obtenemos la categoría monoidal G-graduada construida por Frölich y Wall en [25].

Establecemos, a continuación, la noción de *G-módulo cruzado categórico.*

Definición 3.1.8. *Sea G un grupo, un G-módulo cruzado categórico consiste de una terna $(\mathbb{H}, d, \gamma)$, donde $\mathbb{H}$ es un G-grupo categórico y*

$$d : \mathbb{H} \to \underline{G} = (G \rightrightarrows G) \tag{3.17}$$

es un homomorfismo de grupos categóricos (necesariamente estricto) G-equivariante, considerando en $\underline{G}$ la acción dada por conjugación, es decir,

$$d({}^{g}X) + g = g + d(X), \qquad g \in G, X \in Obj(\mathbb{H}), \tag{3.18}$$

y

$$\gamma = \left(\gamma_{X,Y} : {}^{d(X)}Y + X \to X + Y\right)_{(X,Y)\in Obj(\mathbb{H})\times Obj(\mathbb{H})} \tag{3.19}$$

es una familia de isomorfismos naturales en $\mathbb{H}$ tal que, para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \mathbb{H}$ y cualquier elemento $g \in G$, los siguientes diagramas tienen que ser conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
{}^{d(X)}(Y+Z)+X \arrow[r, "\gamma_{X,Y+Z}"] \arrow[d, "\psi+1"'] & X+Y+Z \\
{}^{d(X)}Y+{}^{d(X)}Z+X \arrow[r, "1+\gamma_{X,Z}"'] & {}^{d(X)}Y+X+Z \arrow[u, "\gamma_{X,Y}+1"']
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

$$\begin{tikzcd}
{}^{d(X+Y)}Z+X+Y \arrow[r, "\gamma_{X+Y,Z}"] \arrow[d, "\phi+1"'] & X+Y+Z \\
{}^{d(X)}({}^{d(Y)}Z)+X+Y \arrow[r, "\gamma_{X,{}^{dY}Z}+1"'] & X+{}^{d(Y)}Z+Y \arrow[u, "1+\gamma_{Y,Z}"']
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

$$\begin{tikzcd}
& {}^g\left({}^{d(X)}Y+X\right) \arrow[r, "\psi_g"] \arrow[dl, "{}^g\gamma_{X,Y}"'] & {}^g\left({}^{d(X)}Y\right)+{}^gX \arrow[dr, "\phi_{g,dX}+1"] & \\
{}^g(X+Y) \arrow[ddr, "\psi_g"'] & & & {}^{(g+dX)}Y+{}^gX \arrow[d, equal] \\
& & & {}^{(d({}^gX)+g)}Y+{}^gX \arrow[dl, "\phi_{d({}^gX),g}+1"] \\
& {}^gX+{}^gY & {}^{d({}^gX)}\left({}^gY\right)+{}^gX \arrow[l, "\gamma_{{}^gX,{}^gY}"] &
\end{tikzcd} \tag{3.22}$$

Si $(\mathbb{H}, d : \mathbb{H} \to \underline{G}, \gamma)$ *y* $(\mathbb{H}', d' : \mathbb{H}' \to \underline{G}', \gamma')$ *son módulos cruzados categóricos, un homomorfismo entre ellos consiste de una terna* (F, τ, χ)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F"'] & \underline{G} \arrow[d, "\tau"] \\
\mathbb{H}' \arrow[r, "d'"'] & \underline{G}'
\end{tikzcd}$$

donde $F = (F, \mu) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ *es un homomorfismo de grupos categóricos,* $\tau : G \to G'$ *es un homomorfismo de grupos y*

$$\chi = \left(\chi_{g,X} : {}^{\tau(g)}F(X) \to F({}^gX)\right)_{(g,X)\in G\times Obj(\mathbb{H})} \tag{3.23}$$

es una familia de isomorfismos naturales en $\mathbb{H}$*, sujetos a las siguientes condiciones:*

- $\tau \cdot d = d' \cdot F$
- $(F, \chi) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ *es un homomorfismo* G*-equivariante (3.1.3), considerando* $\mathbb{H}'$ *un* G*-grupo categórico vía* τ*.*

y, además, para cualesquiera $X, Y \in Obj(\mathbb{H})$*, el diagrama siguiente ha de ser conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
F({}^{dX}Y+X) \arrow[rr, "F(\gamma_{X,Y})"] & & F(X+Y) \\
F({}^{dX}Y)+F(X) \arrow[u, "\mu"] & & F(X)+F(Y) \arrow[u, "\mu"'] \\
& {}^{\tau d(X)}F(Y)+F(X) \arrow[ul, "\chi_{dX,Y}+1"] \arrow[ur, "\gamma'_{FX,FY}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.24}$$

La relación de compatibilidad de los isomorfismos naturales $\phi_0 : {}^0X \to X$ y $\xi_g : {}^g0 \to 0$ (Proposición 3.1.2) con la familia γ se establece en la proposición siguiente.

Proposición 3.1.9. *Para todo objeto X de $\mathbb{H}$ los diagramas*

$$\begin{tikzcd}
{}^{d(X)}0 + X \arrow[r, "\gamma_{X,0}"] \arrow[d, "\xi+1"'] & X + 0 \arrow[d, "r"] \\
0 + X \arrow[r, "l"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{}^{d(0)}X + 0 \arrow[r, "\gamma_{0,X}"] \arrow[d, "\phi_0+1"'] & 0 + X \arrow[d, "l"] \\
X + 0 \arrow[r, "r"'] & X
\end{tikzcd}
\tag{3.25}$$

son conmutativos.

Demostración.

Veamos, por ejemplo, la conmutatividad del diagrama de la izquierda: En primer lugar, consideramos el diagrama siguiente, que es conmutativo, por serlo los tres diagramas interiores suyos, (los cuadrados por naturalidad de γ y el triángulo por coherencia).

$$\begin{tikzcd}
{}^{d(0+0)}X + 0 + 0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "1+r_0"] \arrow[dd, bend right=60, equal] & 0 + 0 + X \arrow[d, "r_0+1"] \\
{}^{d(0)}X + 0 \arrow[r, "\gamma"'] & 0 + X \\
{}^{d(0)}X + 0 + 0 \arrow[r, "\gamma+1"'] \arrow[u, "r"'] & 0 + X + 0 \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

Dicha conmutatividad nos lleva a la conmutatividad del diagrama exterior siguiente, donde, además, ② es conmutativo por definición de ϕ_0, (véase Proposición 3.1.2); ③ es conmutativo, pues es el diagrama (3.21)y ④, ⑤ y ⑥ son conmutativos por naturalidad de l, γ y l, respectivamente.

$$
\begin{tikzcd}
{}^{d(0+0)}X+0+0 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi+1"'] \arrow[dd, equal, bend right=60, "\textcircled{2}"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{3}"] & 0+0+X \arrow[r, "l"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{4}"] & 0+X \arrow[dr, "l"] & \\
{}^{d(0)}({}^{d(0)}X)+0+0 \arrow[r, "\gamma+1"'] \arrow[d, "\phi_0+1"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{5}"] & 0+{}^{d(0)}X+0 \arrow[r, "l"'] \arrow[u, "1+\gamma"'] \arrow[d, "1+\phi_0+1"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{6}"] & {}^{d(0)}X+0 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[d, "\phi_0+1"'] \arrow[r, phantom, "\textcircled{1}"] & X \\
{}^{d(0)}X+0+0 \arrow[r, "\gamma+1"'] & 0+X+0 \arrow[r, "l"'] & X+0 \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}
$$

Consecuentemente, se deduce la conmutatividad deseada de $\textcircled{1}$. ■

3.1.10. Si $(\mathbb{H}, d : \mathbb{H} \to \underline{G}, \gamma)$ es un G-módulo cruzado y consideramos $d^{-1}(0)$, la fibra del homomorfismo d en el elemento neutro de G, entonces, ya que tanto $\underline{G}$ como d son estrictos, $d^{-1}(0)$ es un subgrupo categórico de $\mathbb{H}$. Además, la identidad (3.18) implica que la G-acción sobre $\mathbb{H}$ se restringe a $d^{-1}(0)$, y así $d^{-1}(0)$ es un G-subgrupo categórico de $\mathbb{H}$.

Por otro lado, para cualesquiera $X, Y \in Obj(d^{-1}(0))$, sea $c_{X,Y} : X + Y \to Y + X$ definido como la composición

$$X + Y \xrightarrow{\gamma^{-1}_{X,Y}} {}^{0}Y + X \xrightarrow{\phi_0+1} Y + X \ . \tag{3.26}$$

Entonces tenemos:

Proposición 3.1.11. $(d^{-1}(0), c)$ *es un G-grupo categórico trenzado.*

Demostración.

En efecto, uno de los hexágonos de coherencia es la parte exterior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X+Y+Z & {}^{0}Y+X+Z \arrow[l, "\gamma_{X,Y}+1"'] \arrow[r, "\phi_{0,Y}+1"] & Y+X+Z \\
{}^{0}(Y+Z)+X \arrow[u, "\gamma_{X,Y+Z}"] \arrow[r, "\psi_0+1_X"'] \arrow[ur, phantom, "①"] \arrow[dr, "\phi_{0,Y+Z}+1"'] & {}^{0}Y+\,{}^{0}Z+X \arrow[u, "1_Y+\gamma_{X,Z}"'] \arrow[r, "\phi_{0,Y}+1_X"'] \arrow[ur, phantom, "②"] \arrow[d, phantom, "③"] & Y+\,{}^{0}Z+X \arrow[u, "1_Y+\gamma_{X,Z}"'] \arrow[dl, "1_Y+\phi_{0,Z}+1_X"] \\
 & Y+Z+X &
\end{tikzcd}$$

que resulta conmutativo puesto que el cuadrado ① es justamente la condición de coherencia (3.20), ② es conmutativo por la funtorialidad del producto tensor y la conmutatividad de ③ se deduce de la conmutatividad del diagrama (3.7), tomando $g = h = 0$ y usando (3.11). La conmutatividad del otro hexágono de coherencia, así como la compatibilidad de la G-acción con c, se demuestran de forma similar. ■

Es bien conocido que para $\delta : N \to O$ un módulo cruzado de grupos, el núcleo de δ es un subgrupo del centro de N. Este resultado también es cierto para G-módulos cruzados categóricos en los términos enunciados en la proposición siguiente:

Proposición 3.1.12. *Sea $(d : \mathbb{H} \to G, \gamma)$ un G-módulo cruzado categórico. Existe un encaje, $j : d^{-1}(0) \to \mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$, de la fibra de d en cero en el centro de $\mathbb{H}$, (véase el Ejemplo 1.1.5), que es un homomorfismo de grupos categóricos trenzados.*

Demostración.

En efecto, la conmutatividad de los diagramas (3.20) y (3.25) implica que, para cualquier objeto A de $d^{-1}(0)$, el par $j(A) = (A, (\phi_0+1)\cdot\gamma^{-1}_{A,-})$ pertenece a $\mathbb{Z}_{\mathbb{H}}$ y tenemos un funtor

$$j : d^{-1}(0) \to \mathbb{Z}_{\mathbb{H}},$$

con $j(f : A \to B) = f$. Así, j es un funtor fiel y pleno, que resulta ser, por la conmutatividad de (3.21), un homomorfismo estricto de grupos categóricos.

■

Finalizamos este apartado observando cómo los conceptos de módulo cruzado de grupos y 2-módulo cruzado de Conduché [15] se obtienen como caso particular del concepto de G-módulo cruzado categórico:

Ejemplo 3.1.13. Sea $(\mathbb{H}, d : \mathbb{H} \to \underline{G}, \gamma)$ un G-módulo cruzado categórico. Si $\mathbb{H}$ es el grupo categórico discreto definido por un G-grupo H, $\mathbb{H} = (H \rightrightarrows H)$, entonces γ es necesariamente una identidad y, por tanto, obtenemos un homomorfismo de G-grupos $d : H \to G$ tal que ${}^{dx}y+x = x+y$, para cualesquiera $x, y \in H$, o equivalentemente, un módulo cruzado de grupos.

Ejemplo 3.1.14. Sea $\delta : N \to O$ un módulo cruzado y consideramos el grupo categórico estricto $\mathbb{G}(\delta)$ asociado a δ. Como observábamos en el Ejemplo 3.1.5, dar una G-acción estricta sobre $\mathbb{G}(\delta)$ es equivalente a dar G-acciones sobre N y O tal que δ es un homomorfismo de G-grupos y para cualquier $g \in G$, $x \in O$ y $n \in N$

a) ${}^{g}({}^{x}n) = {}^{{}^{g}x}({}^{g}n)$.

Ahora, en las condiciones anteriores, sea $(\mathbb{G}(\delta), d : \mathbb{G}(\delta) \to \underline{G}, \gamma)$ un G-módulo cruzado categórico. Desde el funtor $d : \mathbb{G}(\delta) \to \underline{G}$ obtenemos una sucesión de homomorfismos de grupos:

$$N \xrightarrow{\ \delta\ } O \xrightarrow{\ d\ } G, \tag{3.27}$$

que es semiexacta, ya que para cualquier $n \in N$, el par $(n, 0)$ define un morfismo de 0 en $\delta(n)$, (y así $d\delta(n) = 0$). Además, la identidad (3.18) implica que $d({}^{g}x) = g + dx - g$, $g \in G$, $x \in O$, o, equivalentemente, d es un homomorfismo de G-grupos.

Los isomorfismos naturales $\gamma_{x,y} : {}^{dx}y + x \to x + y$, $x, y \in O$, proporcionan una aplicación

$$\{-,-\} : O \times O \to N$$

de forma que $\gamma_{x,y} = (\{x, y\}, {}^{dx}y + x)$ y entonces

b) $\delta(\{x, y\}) = x + y - x - {}^{dx}y, \qquad$ para todo $x, y \in O$.

La naturalidad de γ implica que para todo $n \in N$ y $x \in O$

c) $\{\delta n, x\} = n - {}^{x}n$

d) $\{x, \delta n\} = {}^{x}n - {}^{dx}n$,

mientras que la conmutatividad de los diagramas (3.20), (3.21) y (3.22), implica, respectivamente, que para $x, y, z \in O$ y $g \in G$,

e) $\{x, y+z\} = \{x, y\} + {}^{dx}{}^{y}\{x, z\}$

f) $\{x+y, z\} = {}^{x}\{y, z\} + \{x, {}^{dy}z\}$

g) ${}^{g}\{x, y\} = \{{}^{g}x, {}^{g}y\}$

Hemos obtenido, entonces, lo que Conduché define como un *2-módulo cruzado de grupos* [15], esto es, un par $(N \xrightarrow{\delta} O \xrightarrow{d} G, \{-,-\})$, donde $N \xrightarrow{\delta} O \xrightarrow{d} G$ es una sucesión semiexacta de homomorfismos de G-grupos y $\{-,-\} : O \times O \to N$ es una aplicación de manera que $\delta : N \to O$ es un módulo cruzado y las ecuaciones *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)*, *f)* y *g)* son satisfechas.

Recíprocamente, dado un 2-módulo cruzado como antes, obtenemos un G-módulo cruzado categórico $(\mathbb{G}(\delta), d, \gamma)$, donde $\gamma_{x,y} = (\{x, y\}, {}^{dx}y + x)$, para todo $x, y \in O$. Consecuentemente, el concepto de 2-módulo cruzado de Conduché es un caso particular del concepto de G-módulo cruzado categórico.

3.2 2-Extensiones especiales de un grupo G por un G-grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$.

3.2.1 Definición y ejemplos.

Fijemos G un grupo y $\mathbb{A}$ un G-grupo categórico simétrico. En lo que sigue, utilizaremos, como en el apartado anterior, notación aditiva para la operación del grupo G, así como para el producto tensor en los grupos categóricos que nos aparezcan.

Definición 3.2.1. *Una 2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$ es una sucesión*

$$\mathcal{E}: \ \mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{G} \tag{3.28}$$

donde $\underline{K}$ denota, como para G, el grupo categórico discreto definido por un grupo K, j y d son homomorfismos de grupos categóricos y q es un homomorfismo de grupos, junto con dos familias de isomorfismos naturales en $\mathbb{H}$

$$\gamma = \left(\gamma_{X,Y} : {}^{d(X)}Y + X \to X + Y\right)_{(X,Y)\in Obj(\mathbb{H})\times Obj(\mathbb{H})}$$
$$\lambda = \left(\lambda_{x,A} : {}^{x}j(A) \to j({}^{q(x)}A)\right)_{(x,A)\in K\times Obj(\mathbb{A})}$$

Estos datos deben verificar las condiciones siguientes:

1. *q es un epimorfismo de grupos.*
2. *$(\mathbb{H}, d, \gamma)$ es un K-módulo cruzado categórico.*
3. *$Img(d) = Ker(q)$, donde $Img(d)$ denota el subgrupo de K consistente de las imágenes de los objetos de $\mathbb{H}$.*
4. *(j, λ) es un homomorfismo K-equivariante, considerando en $\mathbb{A}$ la K-acción dada vía el homomorfismo q.*
5. *j establece una equivalencia de grupos categóricos trenzados entre $\mathbb{A}$ y $d^{-1}(0)$, la fibra de d en 0.*

3.2.2. Nótese que si X e Y son objetos en $\mathbb{H}$ con $d(X) = d(Y)$, entonces podemos encontrar un isomorfismo en $\mathbb{H}$,

$$X \xrightarrow{\sim} j(A) + Y\,.$$

En efecto, puesto que las traslaciones son autoequivalencias, existe en $\mathbb{H}$ cierto isomorfismo $X \to Z + Y$ y entonces Z es un objeto en $d^{-1}(0)$, (pues $d(X) = d(Y)$). Como $j : \mathbb{A} \to d^{-1}(0)$ es una equivalencia, entonces Z es isomorfo a $j(A)$, para algún A en $\mathbb{A}$. El isomorfismo deseado es la composición

$$X \xrightarrow{\sim} Z + Y \xrightarrow{\sim} j(A) + Y$$

Por otro lado, la condición *5)* nos dice también que el grupo categórico trenzado $d^{-1}(0)$ es simétrico o, equivalentemente, que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}^{0}Y + X \arrow[r, "\gamma_{X,Y}"] \arrow[d, "\phi_{0,Y}+1"'] & X + Y \arrow[d, "\phi_{0,X}+1"] \\
Y + X & {}^{0}X + Y \arrow[l, "\gamma_{Y,X}"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para cualesquiera X, Y objetos de $d^{-1}(0)$.

Otra consecuencia directa de la definición de 2-extensión especial es:

Proposición 3.2.3. *Sea* $(\mathcal{E} : \mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{G}, \gamma, \lambda)$ *una 2-extensión especial de* G *por* $\mathbb{A}$. *Dados objetos* X *en* $\mathbb{H}$ *y* A *en* $\mathbb{A}$, *sea*

$$\varphi_{A,X} : j(A) + X \longrightarrow X + j(A) \tag{3.29}$$

definido por la composición

$$j(A) + X \xrightarrow{\gamma^{-1}_{j(A),X}} {}^{0}X + j(A) \xrightarrow{\phi_{0,X}+1} X + j(A)\ ,$$

donde $\phi_{0,X} :\ {}^{0}X \to X$ *es el definido en la Proposición 3.1.2.*

Entonces, $\varphi = \{\varphi_{A,X}\}$ *es una familia de isomorfismos naturales de forma que los diagramas*

$$\begin{tikzcd}
j(A+B) & j(A)+j(B) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "\varphi_{A,j(B)}"] \\
j(B+A) \arrow[u, leftarrow, "j(c)"] & j(B)+j(A) \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
j(0)+X \arrow[rr, "\varphi_{0,X}"] \arrow[d, "\mu_0+1"'] & & X+j(0) \arrow[d, "1+\mu_0"] \\
0+X \arrow[r, "l"'] & X & X+0 \arrow[l, "r"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
j(A)+X+Y \arrow[rr, "\varphi_{A,X+Y}"] \arrow[dr, "\varphi_{A,X}+1"'] & & X+Y+j(A) \\
& X+j(A)+Y \arrow[ur, "1+\varphi_{A,Y}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
j(A)+j(B)+X \arrow[rr, "1+\varphi_{B,X}"] \arrow[d, "\mu+1"'] & & j(A)+X+j(B) \arrow[d, "\varphi_{A,X}+1"] \\
j(A+B)+X \arrow[dr, "\varphi_{A+B,X}"'] & & X+j(A)+j(B) \arrow[dl, "1+\mu"] \\
& X+j(A+B) &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
{}^x(j(A)+X) \arrow[r, "{}^x\varphi_{A,X}"] \arrow[d, "\psi_x"'] & {}^x(X+j(A)) \arrow[d, "\psi_x"] \\
{}^xj(A)+{}^xX \arrow[d, "\lambda_{x,A}+1"'] & {}^xX+{}^xj(A) \arrow[d, "1+\lambda_{x,A}"] \\
j({}^{q(x)}A)+{}^xX \arrow[r, "\varphi_{{}^{q(x)}A,{}^xX}"'] & {}^xX+j({}^{q(x)}A)
\end{tikzcd}
$$

son conmutativos, para todo $A, B \in Obj(\mathbb{A})$, $X, Y \in Obj(\mathbb{H})$ *y* $x \in K$.

Demostración.

La conmutatividad de tales diagramas es consecuencia de las condiciones de coherencia sobre γ y del hecho de que j sea un homomorfismo de grupos categóricos trenzados.

Así, por ejemplo, la conmutatividad del tercer diagrama no es otra que la de la parte exterior del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
j(A)+j(B)+X \arrow[dd, "\mu+1"'] \arrow[ddrrr, "\gamma_{j(A)+j(B),X}"'] & j(A)+{}^0X+j(B) \arrow[l, "1+\gamma_{j(B),X}"'] \arrow[rr, "1+\phi_0+1"] \arrow[dr, "\gamma_{j(A),{}^0X}+1"] & & j(A)+X+j(B) \\
 & & {}^0({}^0X)+j(A)+j(B) \arrow[dr, "{}^0\phi_0+1"] & \\
j(A+B)+X & & & {}^0X+j(A)+j(B) \arrow[uu, "\gamma_{j(A),X}+1"'] \arrow[d, "\phi_0+1"] \\
{}^0X+j(A+B) \arrow[u, "\gamma_{j(A+B),X}"] \arrow[r, "\phi_0+1"'] \arrow[urrr, "1+\mu"] & X+j(A+B) & & X+j(A)+j(B) \arrow[ll, "1+\mu"]
\end{tikzcd}
$$

que se obtiene a partir de la conmutatividad de los diagramas internos, que son consecuencia de la naturalidad de γ y μ y de la hipótesis de coherencia (3.21) sobre γ. ■

Antes de ver algunos ejemplos, formulemos la noción de morfismo de extensiones.

Definición 3.2.4. *Si* $(\mathcal{E}, \gamma, \lambda)$ *y* $(\mathcal{E}', \gamma', \lambda')$ *son 2-extensiones especiales de* G *por* $\mathbb{A}$, *un morfismo entre ellas consiste de una 4-upla* $(F, \tau, \chi, \theta) : (\mathcal{E}, \gamma, \lambda) \Rightarrow (\mathcal{E}', \gamma', \lambda')$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} : \mathbb{A} \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathbb{H} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta}{\Swarrow}"] & \underline{K} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tau"] & \underline{G} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{E}' : \mathbb{A} \arrow[r, "j'"'] & \mathbb{H}' \arrow[r, "d'"'] & \underline{K}' \arrow[r, "q'"'] & \underline{G}
\end{tikzcd} \tag{3.30}$$

donde $(F,\tau,\chi) : (\mathbb{H}, d, \gamma) \to (\mathbb{H}', d', \gamma')$ *es un morfismo de módulos cruzados categóricos, (véase Definición 3.1.8), tal que* $q' \cdot \tau = q$ *y* $\theta : F \cdot j \Rightarrow j'$ *es una transformación monoidal.*

Tenemos así definida la *categoría de 2-extensiones especiales de G por* $\mathbb{A}$, que denotaremos por $2 - Ext(G, \mathbb{A})$. El correspondiente conjunto de componentes conexas será denotado por $2 - Ext[G, \mathbb{A}]$. Nótese, que dos 2-extensiones especiales $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ representan el mismo elemento en $2-Ext[G, \mathbb{A}]$ si, y solamente si, existe una cadena de morfismos de 2-extensiones especiales de la forma

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longleftarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow \qquad \cdots \qquad \longleftarrow \mathcal{E}_n = \mathcal{E}' \tag{3.31}$$

3.2.5. Dado un morfismo $(F,\tau,\chi,\theta) : (\mathcal{E}, \gamma, \lambda) \Rightarrow (\mathcal{E}', \gamma', \lambda')$ de 2-extensiones especiales de G por $\mathbb{A}$, es fácil probar que para todo par de objetos A de $\mathbb{A}$ y X de $\mathbb{H}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F(j(A)+X) \arrow[r, "F(\varphi_{A,X})"] & F(X+j(A)) & \\
Fj(A)+F(X) \arrow[ur, "\mu"] \arrow[dr, "\theta_A+1"'] & & & F(X)+Fj(A) \arrow[ul, "\mu"'] \arrow[dl, "1+\theta_A"] \\
 & j'(A)+F(X) \arrow[r, "\varphi'_{A,F(X)}"'] & F(X)+j'(A) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde φ y φ' son los isomorfismos naturales definidos en la Proposición 3.2.3.

Para concluir este apartado, veamos algunos ejemplos de 2-extensiones especiales:

Ejemplo 3.2.6. Sea A un G-módulo. Consideremos el G-grupo categórico discreto $\underline{A} = (A \rightrightarrows A)$ definido por A. Si

$$(\mathcal{E} :\ \underline{A} \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{G}\ , \gamma, \lambda)$$

es una 2-extensión especial de G por $\underline{A}$, entonces, como $\underline{A}$ es discreto, también lo es $d^{-1}(0)$, y, por tanto, todas las categorías fibras no vacías son discretas. Consecuentemente, $\mathbb{H} = (H \rightrightarrows H)$, el grupo categórico discreto definido por un K-grupo H. Así, $\mathcal{E}$ se identifica con la sucesión exacta de grupos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{j} H \xrightarrow{d} K \xrightarrow{q} G \longrightarrow 1$$

donde, según vimos en el Ejemplo 3.1.13, $d : H \to K$ es un módulo cruzado de grupos. Por otro lado, ya que $\lambda_{x,a}$ tiene que ser una identidad, entonces para cada $a \in A$ y $x \in K$, se tiene que $j({}^{q(x)}a) = {}^{x}a$, es decir, la sucesión anterior es una 2-extensión de G por el G-módulo A en el sentido de Huebschmann [32],[31].

Concluimos entonces que

$$2 - Ext[G, A \rightrightarrows A] \cong 2 - Ext[G, A],$$

donde el segundo es el conjunto de clases (módulo una relación tipo Yoneda) de 2-extensiones de G por A.

Ejemplo 3.2.7. Dado un G-módulo A, consideramos ahora el G-grupo categórico simétrico con sólo un objeto $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$.

Sea

$$(\mathcal{E} : (A \rightrightarrows \mathbf{1}) \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{G}, \gamma, \lambda) \tag{3.32}$$

una 2-extensión especial de G por $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$ tal que $\mathbb{H}$ es un K-grupo categórico estricto definido por un módulo cruzado $\delta : N \to O$.

Como vimos en el Ejemplo 3.1.14, $(\mathbb{H}, d, \gamma)$ tiene asociado un 2-módulo cruzado $(N \xrightarrow{\delta} O \xrightarrow{d} K, \{-,-\} : O \times O \to N)$, con $\gamma_{x,y} = (\{x, y\}, {}^{dx}y + x)$.

El funtor $j : (A \rightrightarrows \mathbf{1}) \to \mathbb{H}$ nos permite definir un homomorfismo de grupos $i : A \to N$ de forma que $j(a) = (i(a), 0) : 0 \to 0$, y así $\delta i(a) = 0$. Además, ya que j es un funtor fiel, entonces i es un monomorfismo.

Ahora, si $n \in Ker(\delta)$, entonces $(n, 0) : 0 \to 0$ es un morfismo en $d^{-1}(0)$, y, así, existe $a \in A$ con $j(a) = (i(a), 0) = (n, 0)$, esto es, $i(a) = n$. Finalmente, si $x \in Ker(d)$, entonces x es un objeto de $d^{-1}(0)$ y, por la densidad de j, existe un morfismo, $(n, 0) : 0 \to x$, o equivalentemente, un elemento $n \in N$ con $\delta(n) = x$.

Consecuentemente, tenemos una sucesión exacta de grupos

$$\mathbf{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\delta} O \xrightarrow{d} K \xrightarrow{q} G \longrightarrow \mathbf{1} \tag{3.33}$$

con $N \xrightarrow{\delta} O \xrightarrow{d} K$ un 2-módulo cruzado, e i un morfismo de K-grupos, (pues los isomorfismos naturales λ han de ser la identidad), considerando en A la estructura de K-grupo dada vía el homomorfismo q. Esto es, $\mathbf{E}$ es una *3-extensión no abeliana de G por A en el sentido de Conduché* [15].

Es claro que cualquier 3-extensión no abeliana de G por un G-módulo A como (3.33), tiene asociado una 2-extensión especial de G por $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$ como (3.32) con λ necesariamente la identidad.

Concluimos entonces que el concepto de 3-extensiones no abelianas de Conduché son un caso particular de nuestras 2-extensiones especiales.

Ejemplo 3.2.8. Sea $\mathbb{A}$ un G-grupo categórico simétrico. Considerando el homomorfismo nulo $0 : \mathbb{A} \to \underline{G}$, tenemos una 2-extensión especial

$$(\mathcal{E} :\ \mathbb{A} \xrightarrow{1} \mathbb{A} \xrightarrow{0} \underline{G} \xrightarrow{1} \underline{G}\ , \gamma, 1)$$

donde $\gamma_{A,B} = c_{B,A} \cdot (\phi_{o,B} + 1_A) :\ {}^0B + A \to A + B$, para cualesquiera objetos A, B de $\mathbb{A}$.

Esta extensión, así como cualquier otra 2-extensión especial representando el mismo elemento en $2 - Ext[G, \mathbb{A}]$, se llamará una *2-extensión trivial* de G por $\mathbb{A}$.

3.2.2 Clasificación de 2-extensiones especiales.

Como comentamos en la introducción de este capítulo, el grupo de cohomología que clasifica el conjunto de clases de 2-extensiones especiales de un grupo G por un G-grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ es $H^4_{Ulb}(G, \mathbb{A})$, el cuarto grupo de cohomología de Ulbrich de G con coeficientes en $\mathbb{A}$, (véase 2.2.1).

El método que seguiremos, para obtener esta clasificación, es el clásico de Schreier de conjuntos factores para extensiones de grupos. En nuestro caso el "conjunto factor" o "invariante de Schreier" asociado a una 2-extensión especial será un 4-cociclo de Ulbrich de G con coeficientes en $\mathbb{A}$.

Con este fin, comenzamos reformulando la noción de 4-cociclo de Ulbrich de G con coeficientes en $\mathbb{A}$. En 2.2.1 recordábamos cómo están definidos los grupos $H^n_{Ulb}(G,\mathbb{A})$, cuando $\mathbb{A}$ es considerado con G-acción trivial. En el caso general, en lugar de considerar el complejo de cocadenas asociado a $\mathbb{A}^{K(G,1)}$, se considera el complejo

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}^{G^0} \xrightarrow{\delta'} \mathbb{A}^{G^1} \xrightarrow{\delta'} \cdots \longrightarrow \mathbb{A}^{G^n} \xrightarrow{\delta'} \mathbb{A}^{G^{n+1}} \xrightarrow{\delta'} \cdots , \qquad (3.34)$$

donde los homomorfismos $\delta' : \mathbb{A}^{G^n} \to \mathbb{A}^{G^{n+1}}$ son obtenidos como la suma alternada de los homomorfismos

$$\mathbb{A}^{G^n} \overset{d_0}{\underset{d_{n+1}}{\vdots}} \mathbb{A}^{G^{n+1}}$$

definidos, para cada objeto P en $\mathbb{A}^{G^n}$ y para todo $(g_1, g_2, ..., g_{n+1}) \in G^{n+1}$, por

$$\begin{aligned} d_0(P)(g_1,...,g_{n+1}) &= {}^{g_1}P(g_2,...,g_{n+1}), \\ d_i(P)(g_1,...,g_{n+1}) &= P(g_1,...,g_i+g_{i+1},...,g_{n+1}), \qquad 1 \le i \le n, \\ d_{n+1}(P)(g_1,...,g_{n+1}) &= P(g_1,...,g_n) \end{aligned}$$

y la misma fórmula para morfismos. La transformación monoidal $\chi : (\delta')^2 \Rightarrow 0$ es obtenida por composición de los morfismos canónicos de la acción de G sobre $\mathbb{A}$ y los de $\mathbb{A}$. Es claro que (3.34) no es otro que el asociado a $\mathbb{A}^{K(G,1)}$ si la acción de G sobre $\mathbb{A}$ es trivial.

Procedemos como en 2.2.2 y 2.2.3, y así, un 4-cociclo de Ulbrich de G con coeficientes en $\mathbb{A}$ se identifica con un par (P,t), donde

$$\begin{aligned} P &: G^3 \to Obj(\mathbb{A}) \\ t &: G^4 \to Mor(\mathbb{A}) \end{aligned} \qquad (3.35)$$

son aplicaciones tales que, para cualesquiera $g_1,g_2,g_3,g_4 \in G$, $t(g_1,g_2,g_3,g_4)$ es un morfismo en la categoría $\mathbb{A}$ con dominio ${}^{g_1}P(g_2,g_3,g_4) + P(g_1,g_2+g_3,g_4) + P(g_1,g_2,g_3)$ y con rango $P(g_1,g_2,g_3+g_4) + P(g_1+g_2,g_3,g_4)$ (correspondiéndose canónicamente a un morfismo $h : \delta' P \to 0$); y el siguiente diagrama, (donde, como viene siendo habitual, hemos omitido algunos morfismos canónicos), es conmutativo, para todo $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \in G$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[rr, "{}^{g_1}(t(g_2,g_3,g_4,g_5))+1"] \arrow[d, "(1+t(g_1,g_2,g_3,g_4)+1)"'] & & \mathbf{2} \arrow[d, "1+t(g_1,g_2+g_3,g_4,g_5)+1"] \\
\mathbf{3} \arrow[d, "1+t(g_1,g_2,g_3+g_4,g_5)+1"'] & & \mathbf{4} \arrow[d, "t(g_1,g_2,g_3,g_4+g_5)+1"] \\
\mathbf{5} \arrow[rr, "(1+t(g_1+g_2,g_3,g_4,g_5))"'] & & \mathbf{6}
\end{tikzcd}
\tag{3.36}
$$

donde, si escribimos $P_{i,j,k} = P(g_i, g_j, g_k)$, $P_{i,j,k+l} = P(g_i, g_j, g_k + g_l)$ y ${}^{l}P_{i,j,k} = {}^{g_l}P(g_i, g_j, g_k)$, por simplicidad, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1} &= {}^{1}({}^{2}P_{3,4,5} + P_{2,3+4,5} + P_{2,3,4}) + P_{1,2+3,4} + P_{1,2,3} + P_{1,2+3+4,5},\\
\mathbf{2} &= {}^{1}(P_{2,3,4+5} + P_{2+3,4,5}) + P_{1,2+3+4,5} + P_{1,2+3,4} + P_{1,2,3},\\
\mathbf{3} &= {}^{1}({}^{2}P_{3,4,5} + P_{2,3+4,5}) + P_{1,2+3+4,5} + P_{1,2,3+4} + P_{1+2,3,4},\\
\mathbf{4} &= {}^{1}P_{2,3,4+5} + P_{1,2+3,4+5} + P_{1,2,3} + P_{1+2+3,4,5},\\
\mathbf{5} &= P_{1,2,3+4+5} + {}^{1}({}^{2}P_{3,4,5}) + P_{1+2,3+4,5} + P_{1+2,3,4},\\
\mathbf{6} &= P_{1,2,3+4+5} + P_{1+2,3,4+5} + P_{1+2+3,4,5}.
\end{aligned}
$$

Esta conmutatividad es la traducción de la condición de cociclo sobre $h : \delta'(P) \to 0$.

Decimos que el 4-cociclo (P, t) es *normalizado* si las siguientes *condiciones de normalización* se verifican:

NC1 Para $g_1, g_2 \in G$

$$P(0, g_1, g_2) = P(g_1, 0, g_2) = P(g_1, g_2, 0) = 0$$

NC2 Para $g_1, g_2, g_3 \in G$

$$t(0, g_1, g_2, g_3) = can : {}^{0}P(g_1, g_2, g_3) + 0 + 0 \to 0 + P(g_1, g_2, g_3)$$

$$t(g_1, 0, g_2, g_3) = can : {}^{g_1}0 + P(g_1, g_2, g_3) + 0 \to 0 + P(g_1, g_2, g_3)$$

$$t(g_1, g_2, 0, g_3) = can : {}^{g_1}0 + P(g_1, g_2, g_3) + 0 \to P(g_1, g_2, g_3) + 0$$

$$t(g_1, g_2, g_3, 0) = can : {}^{g_1}0 + 0 + P(g_1, g_2, g_3) \to P(g_1, g_2, g_3) + 0$$

Dados 4-cociclos (P,t) y (P',t') diremos que son *cohomólogos* si existen aplicaciones

$$\begin{aligned} Q &: G^2 \to Obj(\mathbb{A}) \\ b &: G^3 \to Mor(\mathbb{A}) \end{aligned} \tag{3.37}$$

tal que ${}^{g_1}Q(g_2,g_3)+Q(g_1,g_2+g_3)+P'(g_1,g_2,g_3)$ es el dominio de $b(g_1,g_2,g_3)$ y $P(g_1,g_2,g_3)+Q(g_1,g_2)+Q(g_1+g_2,g_3)$ es su codominio, (correspondiéndose canónicamente a un morfismo en $\mathbb{A}^{G^3}$, $\alpha:\delta'Q+P'\to P$), y para cualesquiera $g_1,g_2,g_3,g_4\in G$ el siguiente diagrama tiene que ser conmutativo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbf{1} \arrow[rr, "{}^{g_1}b(g_2,g_3,g_4)+1"] \arrow[d, "1+t'(g_1,g_2,g_3,g_4)+1"'] & & \mathbf{2} \arrow[d, "1+b(g_1,g_2+g_3,g_4)+1"] \\
\mathbf{3} \arrow[d, "1+b(g_1,g_2,g_3+g_4)+1"'] & & \mathbf{4} \arrow[d, "1+b(g_1,g_2,g_3)+1"] \\
\mathbf{5} \arrow[dr, "b(g_1+g_2,g_3,g_4)+1"'] & & \mathbf{6} \arrow[dl, "t(g_1,g_2,g_3,g_4)+1"] \\
& \mathbf{7} &
\end{tikzcd} \tag{3.38}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= {}^1({}^2Q_{3,4}+Q_{2,3+4}+P'_{2,3,4})+P'_{1,2+3,4}+P'_{1,2,3}+Q_{1,2+3+4}, \\
\mathbf{2} &= {}^1(P_{2,3,4}+Q_{2,3}+Q_{2+3,4})+P'_{1,2+3,4}+P'_{1,2,3}+Q_{1,2+3+4}, \\
\mathbf{3} &= {}^1({}^2Q_{3,4}+Q_{2,3+4})+P'_{1,2,3+4}+P'_{1+2,3,4}+Q_{1,2+3+4}, \\
\mathbf{4} &= {}^1(P_{2,3,4}+Q_{2,3})+P_{1,2+3,4}+Q_{1,2+3}+Q_{1+2+3,4}+P'_{1,2,3}, \\
\mathbf{5} &= {}^1({}^2Q_{3,4})+P_{1,2,3+4}+Q_{1,2}+Q_{1+2,3+4}+P'_{1+2,3,4}, \\
\mathbf{6} &= {}^1P_{2,3,4}+P_{1,2+3,4}+P_{1,2,3}+Q_{1,2}+Q_{1+2,3}+Q_{1+2+3,4}, \\
\mathbf{7} &= P_{1,2,3+4}+P_{1+2,3,4}+Q_{1,2}+Q_{1+2,3}+Q_{1+2+3,4},
\end{aligned}$$

(denotando, como anteriormente, $Q_{i,j}=Q(g_i,g_j)$, ${}^kQ_{i,j}={}^{g_k}Q(g_i,g_j)$, etcétera). Esta conmutatividad significa que el correspondiente morfismo en $\mathbb{A}^{G^3}$, $\alpha:\delta'Q+P'\to P$ define además un morfismo de 4-cociclos $\alpha:(\delta'Q,\chi_Q)+(P',t')\to(P,t)$.

Diremos que el par (Q,b) es un *coborde* de (P,t) en (P',t') y escribiremos $(Q,b):(P,t)\to(P',t')$.

Cuando tanto (P,t) como (P',t') son 4-cociclos normalizados, entonces un coborde $(Q,b):(P,t)\to(P',t')$ se dirá *normalizado* si las dos siguientes condiciones de normalización se verifican:

NCH1 Para todo $g\in G$

$$Q(0,g)=Q(g,0)=0$$

NCH2 Para cualesquiera $g_1,g_2\in G$

$$b(0,g_1,g_2)=can:{}^{0}Q(g_1,g_2)+0+0\to 0+0+Q(g_1,g_2)$$

$$b(g_1,0,g_2)=can:{}^{0}0+Q(g_1,g_2)+0\to 0+0+Q(g_1,g_2)$$

$$b(g_1,g_2,0)=can:{}^{0}0+Q(g_1,g_2)+0\to 0+Q(g_1,g_2)+0$$

Aunque Ulbrich no trabaja con cociclos normalizados, sin embargo, es rutinario, (aunque tedioso), probar la siguiente proposición:

Proposición 3.2.9. *Todo 4-cociclo es cohomólogo a un 4-cociclo normalizado, y 4-cociclos normalizados cohomólogos están conectados por un coborde normalizado. Además, el cuarto grupo de cohomología de Ulbrich, $H^4_{Ulb}(G,\mathbb{A})$, es el conjunto cociente del conjunto de 4-cociclos normalizados por la relación de ser cohomólogos.*

3.2.10 (Sistema de Schreier asociado a una 2-extensión especial.). Consideramos una 2-extensión especial de un grupo G por un G-grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ (Definición 3.2.1)

$$(\mathcal{E}:\mathbb{A}\xrightarrow{j}\mathbb{H}\xrightarrow{d}\underline{K}\xrightarrow{q}\underline{G},\gamma,\lambda).$$

Elegimos para cada $g\in G$ un elemento $s(g)\in K$ con $q(s(g))=g$. Entonces, para cualesquiera $g_1,g_2\in G$, $q(s(g_1)+s(g_2))=q(s(g_1+g_2))$. Por tanto, ya que $Img(d)=Ker(q)$, podemos elegir un objeto X_{g_1,g_2} en $\mathbb{H}$ tal que

$$s(g_1)+s(g_2)=d(X_{g_1,g_2})+s(g_1+g_2). \tag{3.39}$$

La asociatividad en G implica que, para cualesquiera $g_1,g_2,g_3\in G$,

$$d(X_{g_1,g_2}+X_{g_1+g_2,g_3})=d({}^{s(g_1)}X_{g_2,g_3}+X_{g_1,g_2+g_3})$$

y entonces, según observábamos en 3.2.2, podemos elegir un objeto $P(g_1, g_2, g_3)$ en $\mathbb{A}$ y un morfismo en $\mathbb{H}$:

$$u_{g_1,g_2,g_3} : \ {}^{s(g_1)}X_{g_2,g_3} + X_{g_1,g_2+g_3} \to j(P(g_1, g_2, g_3)) + X_{g_1,g_2} + X_{g_1+g_2,g_3} \tag{3.40}$$

Ahora, ya que j es fiel y pleno, obtenemos un único morfismo en $\mathbb{A}$

$$\begin{array}{c} {}^{g_1}P(g_2, g_3, g_4) + P(g_1, g_2 + g_3, g_4) + P(g_1, g_2, g_3) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle t(g_1,g_2,g_3,g_4)} \\ P(g_1, g_2, g_3 + g_4) + P(g_1 + g_2, g_3, g_4) \end{array}$$

haciendo conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
{}^{sg_1}[{}^{sg_2}X_{3,4} + X_{2,3+4}] + X_{1,2+3+4} \arrow[dd, "(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4})"'] \arrow[dr, "(\lambda+1)({}^{sg_1}u_{g_2,g_3,g_4}+1)"] & \\
& \begin{array}{c} j({}^{g_1}P_{2,3,4}) + {}^{sg_1}X_{2,3}+ \\ {}^{sg_1}X_{2+3,4} + X_{1,2+3+4} \end{array} \arrow[dd, "(\varphi^{-1}+1)(1+u_{g_1,g_2+g_3,g_4})"] \\
\begin{array}{c} {}^{[d(X_{1,2})+s(g_1+g_2)]}X_{3,4} + j(P_{1,2,3+4})+ \\ X_{1,2} + X_{1+2,3+4} \end{array} \arrow[dd, "\begin{array}{c}(\varphi^{-1}+1)(1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}) \\ (1+\gamma+1)(\varphi^{-1}+1)\end{array}"'] & \\
& \begin{array}{c} j({}^{g_1}P_{2,3,4} + P_{1,2+3,4}) + {}^{sg_1}X_{2,3} \\ +X_{1,2+3} + X_{1+2+3,4} \end{array} \arrow[dd, "1+u_{g_1,g_2,g_3}+1"] \\
\begin{array}{c} j(P_{1,2,3+4} + P_{1+2,3,4}) + X_{1,2}+ \\ X_{1+2,3} + X_{1+2+3,4} \end{array} & \\
& \begin{array}{c} j({}^{g_1}P_{2,3,4} + P_{1,2+3,4} + P_{1,2,3})+ \\ X_{1,2} + X_{1+2,3} + X_{1+2+3,4} \end{array} \arrow[ul, "j(t(g_1,g_2,g_3,g_4))+1"]
\end{tikzcd} \tag{3.41}$$

donde φ es el isomorfismo natural (3.29) de la Proposición 3.2.3, $X_{i,j}$ denota abreviadamente al objeto X_{g_i,g_j}, $X_{i,j+k}$ denota al objeto X_{g_i,g_j+g_k} y la misma notación para P.

Entonces tenemos:

Proposición 3.2.11. *El par de aplicaciones que hemos construido, $(P : G^3 \to Obj(\mathbb{A}),\quad t : G^4 \to Mor(\mathbb{A}))$, define un 4-cociclo de Ulbrich de G con coeficientes en $\mathbb{A}$.*

Demostración.

Tenemos que probar que para cualesquiera $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \in G$, el diagrama (3.36) es conmutativo. Para ello, aplicamos el funtor $j : \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ a (3.36) y tensorizamos el diagrama resultante en $\mathbb{H}$ por el objeto

$$\begin{aligned}\sigma = G_{g_1,g_2,g_3,g_4} + G_{g_1,g_2,g_3+g_4,g_5} + G_{g_1+g_2,g_3,g_4,g_5} +& \\ {}^{sg_1}G_{g_2,g_3,g_4,g_5} + G_{g_1,g_2+g_3,g_4,g_5} + G_{g_1,g_2,g_3,g_4+g_5}&,\end{aligned}$$

donde $G_{g_i,g_j,g_k,g_l} = X_{g_i,g_j} + X_{g_i+g_j,g_k} + X_{g_i+g_j+g_k,g_l}$.

Obtenemos un nuevo diagrama en $\mathbb{H}$, $j(3.36)+1_\sigma$, cuya conmutatividad es equivalente a la conmutatividad de (3.36), ya que j y $-+\sigma$ son equivalencias.

Desde la definición de $t(g_1, g_2, g_3, g_4)$ tenemos que

$$\begin{gathered} j(t(g_1,g_2,g_3,g_4)) + 1_{X_{1,2}+X_{1+2,3}+X_{1+2+3,4}} = (1_{jP_{1,2,3+4}} + \varphi + 1_{X_{1+2,3}+X_{1+2+3,4}}) \\ (1_{jP_{1,2,3+4}+X_{1,2}} + u_{g_1+g_2,g_3,g_4}) \cdot (1_{jP_{1,2,3+4}+X_{1,2}} + \gamma + 1_{X_{1+2,3+4}}) \\ (\varphi + 1_{X_{1,2}+X_{1+2,3+4}}) \cdot (1_{{}^{dX_{1,2}+s(g_1+g_2)}X_{3,4}} + u_{g_1,g_2,g_3+g_4}) \cdot ({}^{sg_1}u_{g_2,g_3,g_4} + 1_{X_{1,2+3+4}})^{-1} \cdot \\ (\lambda + 1_{X_{1,2+3+4}})^{-1} \cdot (1_{j({}^{g_1}P_{2,3,4})+{}^{sg_1}X_{2,3}} + u_{g_1,g_2+g_3,g_4})^{-1} \cdot \\ (1_{j({}^{g_1}P_{2,3,4}})+\varphi+1_{X_{1,2+3}+X_{1+2+3,4}}) \cdot (1_{j({}^{g_1}P_{2,3,4}+P_{1,2+3,4})} + u_{g_1,g_2,g_3} + 1_{X_{1+2+3,4}})^{-1} \end{gathered}$$

y entonces, salvo isomorfismos canónicos, las dos caras componibles del diagrama $j(3.36) + 1_\sigma$ son:

$$\begin{aligned} &(jt(g_1,g_2,g_3,g_4+g_5) + 1_{jP_{1+2+3,4,5}+\sigma}) \cdot \\ &\qquad (1_{j({}^{g_1}P_{2,3,4+5})} + jt(g_1,g_2+g_3,g_4,g_5) + 1_{jP_{1,2,3}+\sigma}) \\ &\qquad\qquad (j({}^{g_1}t(g_2,g_3,g_4,g_5)) + 1_{P_{1,2+3,4}+P_{1,2,3}+P_{1,2+3+4,5}+\sigma}) = \end{aligned}$$

$$(1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4+g_5})(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4+g_5})(1+{}^{sg_1}u_{g_2,g_3,g_4+g_5}+1)^{-1}$$
$$(1+u_{g_1,g_2+g_3,g_4+g_5})^{-1}(1+u_{g_1,g_2,g_3}+1)^{-1}(1+u_{g_1+g_2+g_3,g_4,g_5}+1)$$
$$(1+u_{g_1,g_2+g_3,g_4+g_5}+1)(1+{}^{sg_1}u_{g_2+g_3,g_4,g_5}+1)^{-1}(1+u_{g_1,g_2+g_3+g_4,g_5}+1)^{-1}$$
$$(1+u_{g_1,g_2+g_3,g_4}+1)^{-1}(1+{}^{sg_1}u_{g_2+g_3,g_4,g_5}+1)(1+{}^{sg_1}u_{g_2,g_3,g_4+g_5}+1)$$
$$(1+{}^{sg_1}({}^{sg_2}u_{g_3,g_4,g_5})+1)^{-1}(1+{}^{sg_1}u_{g_2,g_3+g_4,g_5}+1)^{-1}(1+{}^{sg_1}u_{g_2,g_3,g_4}+1)^{-1}$$

y

$$(1_{jP_{1,2,3+4+5}}+jt(g_1+g_2,g_3,g_4,g_5)+1_\sigma)\cdot$$
$$(1_{j({}^{g_1}({}^{g_2}P_{3,4,5}))}+jt(g_1,g_2,g_3+g_4,g_5)+1_{jP_{1+2,3,4+\sigma}})\cdot$$
$$(1_{j({}^{g_1}({}^{g_2}P_{3,4,5}+P_{2,3+4,5}))}+jt(g_1,g_2,g_3,g_4)+1_{P_{1,2+3+4,5}+\sigma})=$$
$$(1+u_{g_1+g_2+g_3,g_4,g_5}+1)(1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4+g_5}+1)(1+{}^{s(g_1+g_2)}u_{g_3,g_4,g_5}+1)^{-1}$$
$$(1+u_{g_1+g_2,g_3+g_4,g_5}+1)^{-1}(1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1)^{-1}(1+u_{g_1+g_2,g_3+g_4,g_5}+1)$$
$$(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4+g_5}+1)(1+{}^{sg_1}u_{g_2,g_3+g_4,g_5}+1)^{-1}(1+u_{g_1,g_2+g_3+g_4,g_5}+1)^{-1}$$
$$(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)^{-1}(1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1)(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)$$
$$(1+{}^{sg_1}u_{g_2,g_3,g_4}+1)^{-1}(1+u_{g_1,g_2+g_3,g_4}+1)^{-1}(1+u_{g_1,g_2,g_3}+1)^{-1},$$

La igualdad de ambas expresiones se obtiene haciendo un uso reiterado de las condiciones de coherencia sobre la extensión (es decir, aquellas para γ, λ y d en la extensión, y las correspondientes para el isomorfismo natural φ definido en la Proposición 3.2.3) y de la identidad $(f+1_Y)\cdot(g+1_{X'})=f+g=(g+1_{Y'})\cdot(f+1_X)$, que se tiene para cualesquiera $f:X'\to Y'$ y $g:X\to Y$.

Por ejemplo, la igualdad

$$(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)^{-1}\cdot(1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1)\cdot(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)=1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1$$

O, equivalentemente,

$$(1_{P_{1+2,3,4}+G_{1,2,3,4}+P_{1,2+3+4,5})}+u_{g_1,g_2,g_3+g_4})^{-1}$$
$$(1_{jP_{1,2,3+4}+X_{1,2}}+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1_{X_{1,2}+X_{1+2,3+4}})\cdot$$
$$(1_{dX_{1,2}+{}^{s(g_1+g_2)}X_{3,4}}+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1_{X_{1,2}+X_{1+2,3+4}})=$$
$$1_{X_{1,2}}+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1_{{}^{sg_1}X_{2,3+4}+X_{1,2+3+4}}$$

se sigue de la conmutatividad de los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} jP_{1,2,3+4} + X_{1,2} + {}^{s(g_1+g_2)}X_{3,4} \\ X_{1+2,3+4} + X_{1,2} + X_{1+2,3+4} \end{array} \arrow[dd, "1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1"'] \arrow[dr, "(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)^{-1}(\varphi+1)"] & \\
& \begin{array}{c} X_{1,2} + {}^{s(g_1+g_2)}X_{3,4} + X_{1+2,3+4} \\ {}^{sg_1}X_{2,3+4} + X_{1,2+3+4} \end{array} \arrow[dd, "1+u_{g_1+g_2,g_3,g_4}+1"] \\
\begin{array}{c} jP_{1,2,3+4} + X_{1,2} + jP_{1+2,3,4} + X_{1+2,3}+ \\ X_{1+2+3,4} + X_{1,2} + X_{1+2,3+4} \end{array} \arrow[dr, "(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)^{-1}(\varphi+1)"'] & \\
& \begin{array}{c} X_{1,2} + jP_{1+2,3,4} + X_{1+2,3}+ \\ X_{1+2+3,4} + {}^{sg_1}X_{2,3+4} + X_{1,2+3+4} \end{array}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} X_{1+2,3+4} - X_{1+2,3+4} - X_{1,2} \\ {}^{sg_1}X_{2,3+4} + X_{1,2+3+4} + X_{1,2} \end{array} \arrow[dd, "u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1"'] \arrow[dr, "\Upsilon_0"] & \\
& {}^{sg_1}X_{2,3+4} + X_{1,2+3+4} \\
\begin{array}{c} jP_{1,2,3+4} + X_{1,2} + X_{1+2,3+4} + X_{1,2} \\ X_{1+2,3+4} - X_{1+2,3+4} - X_{1,2} \end{array} \arrow[dr, "(1+u_{g_1,g_2,g_3+g_4}+1)^{-1}(\varphi+1)"'] & \\
& \begin{array}{c} X_{1,2} + X_{1+2,3+4} + {}^{sg_1}X_{2,3+4} \\ X_{1,2+3+4} - X_{1+2,3+4} - X_{1,2} \end{array} \arrow[uu, "\Upsilon_1(1+\gamma)"']
\end{tikzcd}
$$

donde los morfismos Υ_0 y Υ_1 son morfismos canónicos en $\mathbb{H}$, concretamente, $\Upsilon_0 = can = r(1+m)(1+l)(1+m+1)$ y $\Upsilon_1 = can =$

$r(1+n)(1+l)(1+n+1)$.

■

Definimos entonces:

Definición 3.2.12. *Dada una 2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$, $(\mathcal{E},\gamma,\lambda)$, el 4-cociclo de Ulbrich de G con coeficientes en $\mathbb{A}$, (P,t), construido anteriormente lo llamaremos un sistema de Schreier de la 2-extensión.*

Nos ocupamos ahora de ver el efecto de diferentes elecciones de $s(g)$, X_{g_1,g_2}, $P(g_1,g_2,g_3)$ y u_{g_1,g_2,g_3} en la construcción del 4-cociclo. Otra elección de $s'(g)$, X'_{g_1,g_2}, $P'(g_1,g_2,g_3)$ y u'_{g_1,g_2,g_3}, como en (3.39) y (3.40), define un 4-cociclo (P',t'), que es cohomólogo a (P,t):

En efecto, ya que $q(s(g)) = q(s'(g))$, para todo $g \in G$, sea $h(g) \in Obj(\mathbb{H})$ un objeto tal que $s'(g) = d(h(g)) + s(g)$. Entonces

$$d(h(g_1) + {}^{s(g_1)}h(g_2) + X_{g_1,g_2}) = d(X'_{g_1,g_2} + h(g_1+g_2)),$$

para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$, y, por tanto, podemos elegir un objeto $Q(g_1,g_2)$ en $\mathbb{A}$ y un morfismo en $\mathbb{H}$ (véase 3.2.2)

$$v_{g_1,g_2} : h(g_1) + {}^{s(g_1)}h(g_2) + X_{g_1,g_2} \to j(Q(g_1,g_2)) + X'_{g_1,g_2} + h(g_1+g_2).$$

Ahora, para cualesquiera tres elementos $g_1, g_2, g_3 \in G$, definimos

$${}^{g_1}Q(g_2,g_3)+Q(g_1,g_2+g_3)+P'(g_1,g_2,g_3) \xrightarrow{b(g_1,g_2,g_3)} P(g_1,g_2,g_3)+Q(g_1,g_2)+Q(g_1+g_2,g_3)$$

como el único que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[dl, "1\otimes\gamma"'] & \mathbf{2} \arrow[l, "(\lambda\otimes 1)({}^{(dh_1+sg_1)}v_{2,3}\otimes 1)"'] \arrow[dr, "(1\otimes u_{1,2,3})(\gamma\otimes 1)"] & \\
\mathbf{3} \arrow[d, "1\otimes v_{1,2+3}"'] & & & \mathbf{4} \arrow[d, "(v_{1,2}\otimes 1)(\varphi\otimes 1)"] \\
\mathbf{5} \arrow[dr, "(1\otimes u'_{1,2,3}\otimes 1)(1\otimes\varphi\otimes 1)"'] & & & \mathbf{6} \arrow[dl, "(1\otimes\varphi\otimes 1)(1\otimes v_{1+2,3})"] \\
 & \mathbf{7} \arrow[r, "j(b(g_1,g_2,g_3))\otimes 1"'] & \mathbf{8} &
\end{tikzcd} \tag{3.42}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} =& j({}^{g_1}Q_{2,3}) + {}^{(dh_1+sg_1)}X'_{2,3} + {}^{(dh_1+sg_1)}h_{2+3} + h_1 + X_{1,2+3}\\
\mathbf{2} =& {}^{(dh_1+sg_1)}(h_2 + {}^{sg_2}h_3 + X_{2,3}) + h_1 + X_{1,2+3}\\
\mathbf{3} =& j({}^{g_1}Q_{2,3}) + {}^{(dh_1+sg_1)}X'_{2,3} + h_1 + {}^{sg_1}h_{2+3} + X_{1,2+3}\\
\mathbf{4} =& h_1 + {}^{sg_1}h_2 + {}^{(sg_1+sg_2)}h_3 + j(P_{1,2,3}) + X_{1,2} + X_{1+2,3}\\
\mathbf{5} =& j({}^{g_1}Q_{2,3} + Q_{1,2+3}) + {}^{[dh_1+sg_1]}X'_{2,3} + X'_{1,2+3} + h_{1+2+3}\\
\mathbf{6} =& j(P_{1,2,3} + Q_{1,2}) + X'_{1,2} + h_{1+2} + {}^{s(g_1+g_2)}h_3 + X_{1+2,3}\\
\mathbf{7} =& j({}^{g_1}Q_{2,3} + Q_{1,2+3} + P'_{1,2,3}) + X'_{1,2} + X'_{1+2,3} + h_{1+2+3}\\
\mathbf{8} =& j(P_{1,2,3} + Q_{1,2} + Q_{1+2,3}) + X'_{1,2} + X'_{1+2,3} + h_{1+2+3}
\end{aligned}$$

Entonces

Proposición 3.2.13. *El par de aplicaciones* $(Q : G^2 \to Obj(\mathbb{A})$, $b : G^3 \to Mor(\mathbb{A}))$ *define un coborde de 4-cociclos desde* (P, t) *en* (P', t').

Demostración.

La demostración es análoga a la de la Proposición 3.2.11. Así, la conmutatividad del diagrama (3.38) para (Q, b) es equivalente a la conmutatividad de $j(3.38) \otimes 1_\sigma$, donde, en este caso, σ es dado por:

$$\begin{aligned}
\sigma = {}^{s(g_1)}H_{g_2,g_3,g_4} + H_{g_1g_2+g_3,g_4} + H_{g_1,g_2,g_3} + G_{g_1,g_2,g_3,g_4}&\\
G'_{g_1,g_2,g_3,g_4} + H_{g_1,g_2,g_3+g_4} + H_{g_1+g_2,g_3,g_4}&,
\end{aligned}$$

con $G_{g_1,g_2,g_3,g_4} = X_{g_1,g_2} + X_{g_1+g_2,g_3} + X_{g_1+g_2+g_3,g_4}$, $G'_{g_1,g_2,g_3,g_4} = X'_{g_1,g_2} + X'_{g_1+g_2,g_3} + X'_{g_1+g_2+g_3,g_4}$, $H_{g_i,g_j,g_k} = X'_{g_i,g_j} + X'_{g_i+g_j,g_k} + h_{g_i+g_j+g_k}$; que es elegido de forma que podamos usar la conmutatividad del diagrama (3.42), que define $b : G^3 \to Mor(\mathbb{A})$.

■

Consecuentemente, la clase de cohomología del sistema de Schreier asociado a la 2-extensión especial $(\mathcal{E}, \gamma, \lambda)$ no depende de las elecciones realizadas. Denotaremos dicha clase por $\Gamma(\mathcal{E}, \gamma, \lambda) \in H^4_{Ulb}(G, \mathbb{A})$.

Proposición 3.2.14. *Cualquier 2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$, $(\mathcal{E}, \gamma, \lambda)$, admite un sistema de Schreier normalizado.*

Demostración.

Tomando $s(0)=0$ y $X_{0,g}=0=X_{g,0}$, para todo $g\in G$, entonces podemos elegir $P(g_1,g_2,0)=P(g_1,0,g_2)=P(0,g_1,g_2)=0$ y los morfismos $u_{g_1,g_2,0}$, $u_{g_1,0,g_2}$ y u_{0,g_1,g_2} por la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
{}^{s(g_1)}0+X_{g_1,g_2} \arrow[r, "u_{g_1,g_2,0}"] \arrow[d, "\xi+1"'] & j(0)+X_{g_1,g_2}+0 \arrow[d, "\mu_0+1"] \\
0+X_{g_1,g_2} & 0+X_{g_1,g_2}+0 \arrow[l, "r"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{}^{s(g_1)}0+X_{g_1,g_2} \arrow[r, "u_{g_1,0,g_2}"] \arrow[d, "\xi+1"'] & j(0)+0+X_{g_1,g_2} \arrow[d, "\mu_0+1"] \\
0+X_{g_1,g_2} & 0+0+X_{g_1,g_2} \arrow[l, "l"]
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
{}^{0}X_{g_1,g_2}+0 \arrow[r, "u_{0,g_1,g_2}"] \arrow[d, "\phi_0+1"'] & j(0)+0+X_{g_1,g_2} \arrow[d, "\mu_0+1"] \\
X_{g_1,g_2}+0 \arrow[d, "r"'] & 0+0+X_{g_1,g_2} \arrow[d, "l"] \\
X_{g_1,g_2} & 0+X_{g_1,g_2} \arrow[l, "l"]
\end{tikzcd}$$

Entonces, es fácil probar que el 4-cociclo resultante es normalizado. ■

Proposición 3.2.15. *Sea $(F,\tau,\chi,\theta):(\mathcal{E},\gamma,\lambda)\to(\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$ un morfismo de 2-extensiones especiales de G por $\mathbb{A}$:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathbb{H} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\theta"] & \underline{K} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tau"] & \underline{G} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "j'"'] & \mathbb{H}' \arrow[r, "d'"'] & \underline{K}' \arrow[r, "q'"'] & \underline{G}
\end{tikzcd}$$

Entonces $\Gamma(\mathcal{E},\gamma,\lambda)=\Gamma(\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$.

Demostración.

Sea (P,t) el sistema de Schreier asociado a $(\mathcal{E},\gamma,\lambda)$, una vez elegidos $s(g)$, X_{g_1,g_2} y u_{g_1,g_2,g_3}. Como $q'\cdot\tau=q$ y $d'\cdot F=\tau\cdot d$, podemos tomar $s'(g)=\tau s(g)$,

$X'_{g_1,g_2} = F(X_{g_1,g_2})$ y u'_{g_1,g_2,g_3} como el morfismo dado por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{}^{s'g_1}X'_{g_2,g_3} + X'_{g_1,g_2+g_3} \arrow[r, "u'_{g_1,g_2,g_3}"] \arrow[d, "\mu\cdot(\chi+1)"'] & j(P(g_1,g_2,g_3)) + X'_{g_1,g_2} + X'_{g_1+g_2,g_3} \\
F({}^{sg_1}X_{2,3} + X_{g_1,g_2+g_3}) \arrow[r, "F(u_{g_1,g_2,g_3})"'] & F(j(P(g_1,g_2,g_3)) + X_{g_1,g_2} + X_{g_1+g_2,g_3}) \arrow[u, "(\theta_{P(g_1,g_2,g_3)}+1)\cdot\mu^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Entonces, el sistema de Schreier resultante para $(\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$ coincide con (P,t). Por tanto, $\Gamma(\mathcal{E},\gamma,\lambda) = \Gamma(\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$. ■

Tenemos así una aplicación bien definida

$$\Gamma : 2 - Ext[G,\mathbb{A}] \to H^4_{Ulb}(G,\mathbb{A}), \tag{3.43}$$

que probaremos que es biyectiva.

Lema 3.2.16. *Sea (P,t) un 4-cociclo normalizado de G con coeficientes en $\mathbb{A}$, entonces existe una 2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$, $\mathcal{E}(P,t)$, tal que:*

1. *(P,t) es un sistema de Schreier de $\mathcal{E}(P,t)$.*
2. *Si $(\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$ es una 2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$ que tiene a (P,t) como sistema de Schreier asociado, entonces existe un morfismo de 2-extensiones especiales $\mathcal{E}(P,t) \to (\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$.*
3. *Si (P,t) y (P',t') son 4-cociclos cohomólogos, entonces existe un morfismo de 2-extensiones especiales $\mathcal{E}(P,t) \to \mathcal{E}(P',t')$.*

Demostración.

Sea $\mathcal{F}$ el grupo libre con generadores $\{s(g) : g \in G\}$, con $s(0) = 0$, y $q : \mathcal{F} \to G$ la proyección canónica. Es bien conocido que el núcleo de q, $L = Ker(q)$, es también libre con generadores $\{l_{1,2} = s(g_1) + s(g_2) - s(g_1+g_2) :\ g_1, g_2 \in G^*\}$, donde $G^* \subset G$, denota el conjunto de los elementos no nulos de G.

Para cualquier $w \in F$ y $l \in L$ sea $\beta(w,l) \in Obj(\mathbb{A})$ definido, inductivamente en la longitud de l, por:

- $\beta(w,0)=0$
- $\beta(w,l_{1,2})=\beta(w,s(g_1)+s(g_2)-s(g_1+g_2))=P(q(w),g_1,g_2)$
- $\beta(w,-l_{1,2})=-P(q(w),g_1,g_2)$
- $\beta(w,l+(-1)^{\nu}\ l_{1,2})=\beta(w,l)+(-1)^{\nu}\ \beta(w,l_{1,2})$

con $\nu=\pm 1$.

Entonces, para cualesquiera $w,w'\in F$, $l,l'\in F$ y $g_1,g_2\in G$, podemos considerar isomorfismos canónicos:

$$\vartheta:\beta(w,-l)\to -\beta(w,l),\qquad a=a_{w,l,l'}:\beta(w,l+l')\to\beta(w,l)+\beta(w,l'),$$

$$r_l:\beta(0,l)\to 0,\qquad r_{l,l'}:\beta(l,l')\to 0$$

y

$$\beta(w,w'+l_{1,2}-w')\xrightarrow{\varsigma_{w,w',g_1,g_2}}P(qw,qw',g_1)+P(qw,qw'+g_1,g_2)-P(qw,qw',g_1+g_2)$$

construidos, inductivamente en la longitud de l, a partir de los canónicos de $\mathbb{A}$: a, c, l, r, m y n.

Considerando ahora $t:G^4\to Mor(\mathbb{A})$, definimos morfismos

$$t_{w,w',l}:\ {}^{q(w)}\beta(w',l)+\beta(w,w'+l-w')\to\beta(w+w',l) \tag{3.44}$$

para todo $w,w'\in F$, inductivamente en la longitud de l, como sigue:

- Para $l=l_{1,2}=s(g_1)+s(g_2)-s(g_1+g_2)$, $g_1,g_2\in G$, $t_{w,w',l_{1,2}}$ es dado por la composición:

$$\begin{array}{c}
{}^{qw}\beta(w',l_{1,2})+\beta(w,w'+l_{1,2}-w')=\ {}^{qw}P(qw',g_1,g_2)+\beta(w,w'+l_{1,2}-w')\\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1+\varsigma_{w,w',g_1,g_2}}\\
{}^{qw}P(qw',g_1,g_2)+P(qw,qw',g_1)+P(qw,qw'+g_1,g_2)-P(qw,qw',g_1+g_2)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1+c+1}\\
{}^{qw}P(qw',g_1,g_2)+P(qw,qw'+g_1,g_2)+P(qw,qw',g_1)-P(qw,qw',g_1+g_2)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle t(qw,qw',g_1,g_2)+1}\\
P(qw,qw',g_1+g_2)+P(qw+qw',g_1,g_2)-P(qw,qw',g_1+g_2)\\
\Big\downarrow{\scriptstyle l(m+1)(1+c)}\\
P(qw+qw',g_1,g_2)=\beta(w+w',l_{1,2})
\end{array}$$

- Para $l=-l_{1,2}=-(s(g_1)+s(g_2)-s(g_1+g_2))$, $g_1,g_2\in G$, $t_{w,w',-l_{1,2}}$ como la composición:

$$
\begin{array}{c}
{}^{qw}\beta(w',-l_{1,2})+\beta(w,w'-l_{1,2}-w') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1+\vartheta} \\
{}^{qw}\beta(w',-l_{1,2})-\beta(w,w'+l_{1,2}-w') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle can} \\
-[{}^{qw}\beta(w',l_{1,2})+\beta(w,w'+l_{1,2}-w')] \\
\Big\downarrow{\scriptstyle -t_{w,w',l_{1,2}}} \\
-\beta(w+w',l_{1,2})=\beta(w+w',-l_{1,2})
\end{array}
$$

- Finalmente, para cada $l\in L$, $t_{w,w',l+l_{1,2}}$ es la composición:

$$
\begin{array}{c}
{}^{qw}\beta(w',l+l_{1,2})+\beta(w,w'+l+l_{1,2}-w') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (1+c+1)(\psi+a)} \\
{}^{qw}\beta(w',l)+\beta(w,w'+l-w')+{}^{qw}\beta(w',l_{1,2})+\beta(w,w'+l_{1,2}-w') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle t_{w,w',l}+t_{w,w',l_{1,2}}} \\
\beta(w+w',l)+\beta(w+w',l_{1,2})=\beta(w+w',l+l_{1,2})
\end{array}
$$

Ahora, sea $\mathbb{H}$ el grupo categórico cuyos conjunto de objetos es el producto $Obj(\mathbb{A})\times L$ y, dados objetos $(A,l),(B,l')\in Obj(\mathbb{H})$, entonces resulta que $Hom_{\mathbb{H}}((A,l),(B,l'))$ es igual a $Hom_{\mathbb{A}}(A,B)$, si $l=l'$, y vacío, si $l\neq l'$. La composición es la inducida por la de $\mathbb{A}$ y el producto tensor, o suma en $\mathbb{H}$, es dado, en objetos, por $(A,l)+(B,l')=(A+B,l+l')$ y en morfismos como en $\mathbb{A}$. El objeto cero es el par $(0,0)$ y los isomorfismos canónicos, de asociatividad y unidad a izquierda y a derecha son dadas por los correspondientes en $\mathbb{A}$, (además $((-A,-l),m_A,n_A)$ es un opuesto para $(A,l)\in Obj(\mathbb{H})$).

La aplicación $\beta:\digamma\times L\to Obj(\mathbb{A})$ y los morfismos $t_{w,w',l}$, nos permiten definir una $\digamma$-acción sobre $\mathbb{H}$ como sigue:

$$
{}^{w}(A,l)=({}^{q(w)}A+\beta(w,l),w+l-w),
$$

para cada objeto (A,l) en $\mathbb{H}$ y $w\in\digamma$, y para cualquier morfismo $f:(A,l)\to(B,l)$ en $\mathbb{H}$

${}^{w}f = {}^{q(w)}f + 1_{\beta(w,l)} : ({}^{q(w)}A + \beta(w,l), w + l - w) \to ({}^{q(w)}B + \beta(w,l), w + l - w).$

Dados objetos $(A,l),(B,l')$ en $\mathbb{H}$ y elementos $w, w' \in F$, el isomorfismo natural

$$\Psi_{w,(A,l),(B,l')} : {}^{w}[(A,l) + (B,l')] \to {}^{w}(A,l) + {}^{w}(B,l')$$

es definido por la composición:

$${}^{q(w)}(A+B) + \beta(w, l + l') \xrightarrow{(1+c+1)\cdot(\psi+a)} {}^{q(w)}A + \beta(w,l) + {}^{q(w)}B + \beta(w,l'),$$

mientras que $\Phi_{w,w',(A,l)} : {}^{w+w'}(A,l) \to {}^{w}({}^{w'}(A,l))$ es dado por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{}^{q(w+w')}A + \beta(w+w',l) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\phi + t^{-1}_{w,w',l}"'] & {}^{q(w)}({}^{q(w')}A + \beta(w',l)) + \beta(w, w' + l - w') \arrow[d, "\psi+1"] \\
& {}^{q(w)}({}^{q(w')}A) + {}^{q(w)}\beta(w',l) + \beta(w, w' + l - w')
\end{tikzcd}$$

Finalmente, $\Phi_{0,(A,l)} : {}^{0}(A,l) \to (A,l)$ no es otro que

$$\Phi_0 = r_A \cdot (\phi_0 + r_l) : \ {}^{0}A + \beta(0,l) \to A.$$

La condición de cociclo (3.36) y las condiciones de normalización para (P,t) implican, tras un cálculo rutinario, la conmutatividad de las condiciones de coherencia (3.6) y (3.7) para esta F-acción. La condición (3.5) es consecuencia directa de la correspondiente para la G-acción sobre $\mathbb{A}$.

La 2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$ asociada a (P,t), $(\mathcal{E}(P,t), \gamma, \lambda)$, se describe como sigue:

$$\mathcal{E}(P,t) : \mathbb{A} \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} \underline{F} \xrightarrow{q} \underline{G}, \tag{3.45}$$

donde $d(A,l) = l$ para cualquier objeto (A,l) en $\mathbb{H}$, y $j(A) = (A,0)$ para todo $A \in Obj(\mathbb{A})$ (así, j es un homomorfismo estricto).

El isomorfismo natural $\gamma_{(A,l),(B,l')} : {}^{d(A,l)}(B,l') + (A,l) \to (A,l) + (B,l')$, para objetos (A,l), (B,l'), es el morfismo en $\mathbb{H}$ haciendo conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
{}^{0}B + \beta(l,l') + A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\phi_0 + r_{l,l'} + 1_A"'] & A + B \arrow[d, "c_{A,B}"] \\
B + I + A \arrow[r, "r_B + 1_A"'] & B + A
\end{tikzcd}$$

y para cualquier elemento $w \in \digamma$, $\lambda_{w,(A,l)}$ es el isomorfismo canónico de unidad a derecha en $\mathbb{A}$, es decir,

$$\lambda_{w,(A,l)} = r_{^{q(w)}A} : {}^{w}j(A) = ({}^{q(w)}A + \beta(w,0), 0) \longrightarrow j({}^{q(w)}A) = ({}^{q(w)}A, 0).$$

$(\mathcal{E}(P,t), \gamma, \lambda)$ es llamada la *2-extensión especial de G por $\mathbb{A}$ definida por el 4-cociclo* (P,t). Es claro que (P,t) es un sistema de Schreier para esta extensión, eligiendo, para cualesquiera $g_1, g_2, g_3 \in G$, $X_{g_1,g_2} = (0, l_{1,2} = s(g_1) + s(g_2) - s(g_1 + g_2)) \in Obj(\mathbb{H})$ y el morfismo (3.40) $u_{g_1,g_2,g_3} \in Mor(\mathbb{H})$, por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}^{g_1}0 + P(g_1,g_2,g_3) + 0 \arrow[r, "u_{g_1,g_2,g_3}"] \arrow[d, "\xi+1"'] & P(g_1,g_2,g_3) + 0 + 0 \arrow[d, "r"] \\
0 + P(g_1,g_2,g_3) + 0 \arrow[r, "l"'] & P(g_1,g_2,g_3) + 0
\end{tikzcd}$$

y, así, 1) está probado. Veamos 2):

Supongamos que $(\mathcal{E}' : \mathbb{A} \xrightarrow{j'} \mathbb{H}' \xrightarrow{d'} \underline{K'} \xrightarrow{q'} \underline{G}, \gamma', \lambda')$ es una 2-extensión especial que tiene a (P,t) como sistema de Schreier, una vez elegidos $s'(g) \in K'$, $X'_{g_1,g_2} \in Obj(\mathbb{H}')$ y $u'_{g_1,g_2,g_3} \in Mor(\mathbb{H}')$ como en (3.39) y (3.40). Entonces definimos un morfismo de 2-extensiones especiales $(F, \tau, \chi, \theta) : (\mathcal{E}(P,t), \gamma, \lambda) \to (\mathcal{E}', \gamma', \lambda')$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathbb{H} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta}{\Leftarrow}"] & \underline{\digamma} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\tau"] & \underline{G} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "j'"'] & \mathbb{H}' \arrow[r, "d'"'] & \underline{K'} \arrow[r, "q'"'] & \underline{G}
\end{tikzcd}$$

tomando $\tau : \digamma \to K'$ como el único homomorfismo de grupos tal que $\tau(s(g)) = s'(g)$, para todo $g \in G$.

Para definir $F = (F, \mu) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$, sea $X' : L \to Obj(\mathbb{H}')$ la única aplicación tal que $X'(0) = 0$ y $X'(l_{1,2}) = X'_{g_1,g_2}$, para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$. Entonces $F : \mathbb{H} \to \mathbb{H}'$ viene dado en objetos por $F(A,l) = j'(A) + X'(l)$; y para $f : (A,l) \to (B,l)$ un morfismo en $\mathbb{H}$, $F(f) = j'(f) + 1_{X'(l)}$. El isomorfismo natural $\mu : F(A,l) + F(B,l') \to F((A,l) + F(B,l'))$ es el morfismo en

$\mathbb{H}'$ haciendo conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
j'(A+B)+X'(l+l') & j'(A)+X'(l)+j'(B)+X'(l') \arrow[l, "\mu_{(A,l),(B,l')}"'] \\
j'(A)+j'(B)+X'(l+l') \arrow[u, "\mu_{A,B}+1"] \arrow[r, "1+can"'] & j'(A)+j'(B)+X'(l)+X'(l') \arrow[u, "1+\varphi'+1"']
\end{tikzcd}$$

donde $\varphi'_{B,X'(l)} : j'(B)+X'(l) \to X'(l)+j'(B)$ es el definido en la Proposición 3.2.3.

Finalmente, la transformación monoidal $\theta : F \cdot j \Rightarrow j'$ es dada, para cada objeto A de $\mathbb{A}$, por

$$\theta_A = r_{j'(A)} : Fj(A) = j'(A) + 0 \longrightarrow j'(A)$$

y para cada $w \in F$ y $(A, l) \in Obj(\mathbb{H})$, el morfismo

$$\chi_{w,(A,l)} : {}^{\tau(w)}F(A,l) \to F({}^{w}(A,l))$$

es la composición

$$\begin{tikzcd}
{}^{\tau(w)}j'(A)+X'(l) \arrow[d, "\lambda'+u_{w,l}"] \\
j'({}^{q(w)}A)+j'(\beta(w,l))+X'(w+l-w) \arrow[d, "\mu+1"] \\
j'({}^{q(w)}A+\beta(w,l))+X'(w+l-w)
\end{tikzcd}$$

donde $u_{w,l} : X'(l) \to j'(\beta(w,l)) + X'(w+l-w)$ es el morfismo en $\mathbb{H}'$ que, para los elementos básicos $w = s(g_1)$ y $l_{2,3} = s(g_2) + s(g_3) - s(g_2+g_3)$, hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & j'P(g_1,g_2,g_3)+X'_{g_1,g_2}+X'_{g_1+g_2,g_3}-X'_{g_1,g_2+g_3}+X'_{g_1+g_2,g_3} \arrow[dr, "1+n"] & \\
 & & j'P(g_1,g_2,g_3)+X'_{g_1,g_2}+X'_{g_1+g_2,g_3}+0 \arrow[ddl, "1+r"] \\
X'_{g_1,g_2}+X'_{g_1+g_2,g_3} \arrow[uur, "u_{w,l_{1,2}}+1"] \arrow[dr, "u'_{g_1,g_2,g_3}"'] & & \\
 & j'P(g_1,g_2,g_3)+X'_{g_1,g_2}+X'_{g_1+g_2,g_3} &
\end{tikzcd}$$

Para concluir, 3) se demuestra de forma análoga. ■

Como consecuencia inmediata del lema anterior, obtenemos:

Teorema 3.2.17. *Sea G un grupo y $\mathbb{A}$ un G-grupo categórico simétrico. La aplicación (3.43)*

$$\Gamma : 2-Ext[G,\mathbb{A}] \to H^4_{Ulb}(G,\mathbb{A})$$

es una biyección. Su inversa es la aplicación que asocia a la clase de un 4-cociclo (P,t) en $H^4_{Ulb}(G,\mathbb{A})$, la clase de la 2-extensión especial $(\mathcal{E}(P,t),\gamma,\lambda)$.

Notemos que, usando la biyección anterior, el conjunto $2-Ext[G,\mathbb{A}]$ hereda una estructura de grupo abeliano a partir de la de $H^4_{Ulb}(G,\mathbb{A})$. En particular, la clase de la 2-extensión trivial de G por $\mathbb{A}$, $(\mathbb{A}\xrightarrow{1}\mathbb{A}\xrightarrow{0}\underline{G}\xrightarrow{1}\underline{G},\gamma,1)$, que describimos en el Ejemplo 3.2.8, sería el elemento neutro de $2-Ext[G,\mathbb{A}]$ pues, como es fácil ver, su imagen por Γ es la clase del cociclo trivial.

El lema 3.2.16 nos permite simplificar la relación de equivalencia definida entre 2-extensiones especiales, en orden a obtener $2-Ext[G,\mathbb{A}]$, (véase 3.40).

Corolario 3.2.18. *Dos 2-extensiones especiales de G por $\mathbb{A}$, $(\mathcal{E},\gamma,\lambda)$ y $(\mathcal{E}',\gamma',\lambda')$, determinan el mismo elemento en $2-Ext[G,\mathbb{A}]$ si, y solamente si, existe una 2-extensión especial $(\mathcal{E}'',\gamma'',\lambda'')$ y homomorfismos de 2-extensiones especiales de la forma*

$$\mathcal{E} \longleftarrow \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{E}'$$

Ejemplo 3.2.19. Sea G un grupo y A un G-módulo y consideramos el G-grupo categórico discreto $(A \rightrightarrows A)$. Entonces, $2-Ext[G, A \rightrightarrows A] \cong 2-Ext[G, A]$, como observamos en el Ejemplo 3.2.6.

Por otra lado, existe una biyección $H^4_{Ulb}(G, A \rightrightarrows A) \cong H^3_{E-M}(G, A)$, (véase, por ejemplo, [56]), el tercer grupo de cohomología de Eilenberg-MacLane de G con coeficientes en el G-módulo A. Combinando ambas biyecciones, nuestro Teorema 3.2.17 particulariza en la conocida clasificación de 2-extensiones especiales de un grupo G por un G-módulo A, [31], [32], [61].

Ejemplo 3.2.20. Con los mismos datos del ejemplo anterior, consideramos ahora el G-grupo categórico simétrico con sólo un objeto $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$. Entonces, en este caso, se tiene una biyección, $H^4_{Ulb}(G, A \rightrightarrows \mathbf{1}) \cong H^4_{E-M}(G, A)$, el cuarto grupo de cohomología de Eilenberg-MacLane de G con coeficientes en el G-módulo A. Consecuentemente, el Teorema 3.2.17 proporciona una interpretación de este grupo en términos de clases de 2-extensiones especiales de G por $(A \rightrightarrows \mathbf{1})$.

Otra interpretación conocida de $H^4_{E-M}(G, A)$ es la dada por Conduché en [15], que prueba la existencia de una biyección

$$\Gamma' : NA^3(G, A) \to H^4_{E-M}(G, A),$$

donde $NA^3(G, A)$ denota el conjunto de clases (por la relación de Yoneda) de 3-extensiones no abelianas de G por A.

Según vimos en Ejemplo 3.2.7, tenemos una aplicación

$$\Delta : NA^3(G, A) \to 2 - Ext[G, A \rightrightarrows \mathbf{1}],$$

que aplica la clase de una 3-extensión no abeliana $\mathbf{E} : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} N \xrightarrow{\delta} O \xrightarrow{d} K \xrightarrow{q} G \longrightarrow \mathbf{1}$ en la clase de la 2-extensión especial asociada, $(\mathcal{E} : (A \rightrightarrows \mathbf{1}) \xrightarrow{j} \mathbb{G}(\delta) \xrightarrow{d} \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{G}, \gamma, 1)$ con $\mathbb{G}(\delta)$ el grupo categórico asociado al módulo cruzado δ, $j(a) = (i(a), 0)$ y $\gamma_{x,y} = (\{x, y\}, {}^{dx}y + x)$.

Siguiendo el método de 3.2.10, para calcular el cociclo asociado a una extensión, elegimos, para $g, g_1, g_2, g_3 \in G$, $s(g) \in K$, con $qs(g) = g$,

$X_{g_1,g_2} \in O$ con $d(X_{g_1,g_2}) = s(g_1) + s(g_2) - s(g_1 + g_2)$ y $n_{g_1,g_2,g_3} \in N$ con $\delta(n_{g_1,g_2,g_3}) + {}^{s(g_1)}X_{g_2,g_3} + X_{g_1,g_2+g_3} = X_{g_1,g_2} + X_{g_1+g_2,g_3}$, (correspondiéndose en este caso con la identidad (3.40)). Entonces, por un cálculo elemental, obtenemos que el 4-cociclo de G con coeficientes en el G-módulo A, $t : G^4 \to A$ viene dado por la igualdad:

$$
\begin{aligned}
i(t(g_1, g_2, g_3, g_4)) &= n_{g_1,g_2,g_3} + {}^{s(g_1)X_{g_2,g_3}}n_{g_1,g_2+g_3,g_4} + {}^{s(g_1)}n_{g_2,g_3,g_4} \\
&- {}^{s(g_1)+s(g_2)X_{g_3,g_4}}n_{g_1,g_2,g_3+g_4} - \{X_{g_1,g_2}, {}^{s(g_1+g_2)}X_{g_3,g_4}\} - {}^{X_{g_1,g_2}}n_{g_1+g_2,g_3,g_4},
\end{aligned}
$$

que no es otro que el obtenido por Conduché en [15].

Tenemos pues un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
2 - Ext[G, A \rightrightarrows \mathbf{1}] \arrow[r, "\Gamma"] & H^4_{E-M}(G, A) \\
NA^3(G, A) \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\Gamma'"'] &
\end{tikzcd}
$$

y así Δ es una biyección. Por tanto, cualquier elemento de $2 - Ext[G, A \rightrightarrows \mathbf{1}]$ puede ser representado por una 2-extensión especial $(\mathcal{E} : (A \rightrightarrows \mathbf{1}) \xrightarrow{j} \mathbb{H} \xrightarrow{d} \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{G}, \gamma, \lambda)$, donde $\mathbb{H}$ es K-grupo categórico estricto definido por un módulo cruzado.

Nuestro teorema de clasificación de 2-extensiones especiales tiene importantes corolarios en topología algebraica.

En 2.2.1 observamos que la cohomología de Ulbrich, cuando el grupo categórico de coeficientes $\mathbb{A}$ es un G-grupo categórico trivial, coincide con la cohomología simplicial definida en el Capítulo 2; es decir, se tienen isomorfismos $H^n(K(G,1), \mathbb{A}) \cong H^{n+1}_{Ulb}(G, \mathbb{A})$. En particular, para $n = 3$, $H^3(K(G,1), \mathbb{A}) \cong H^4_{Ulb}(G, \mathbb{A})$. Si consideramos ahora el complejo clasificador $K(\mathbb{A}, 3)$, asociado al grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$ (Definición 2.3.1), entonces el Teorema 2.3.10 de representación homotópica junto con el Teorema 3.2.17 de clasificación de 2-extensiones especiales nos permiten concluir:

Teorema 3.2.21. *Para cualquier grupo G y cualquier grupo categórico simétrico $\mathbb{A}$, existe una biyección*

$$2 - Ext[G, \mathbb{A}] \cong [K(G,1), K(\mathbb{A}, 3)], \tag{3.46}$$

entre el conjunto de clases de 2-extensiones especiales de G por el G-grupo categórico trivial $\mathbb{A}$ y el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $K(G,1)$ en $K(\mathbb{A},3)$.

Este teorema tiene como casos particulares:

Ejemplo 3.2.22. Sea G un grupo y A un grupo abeliano. Entonces según vimos en el Ejemplo 2.3.4, $K(A \rightrightarrows A, 3) \cong K(A,3)$, y, por otro lado, por el Ejemplo 3.2.6, la biyección (3.46) se reduce a

$$2 - Ext[G,A] \cong [K(G,1), K(A,3)].$$

Si consideramos ahora el grupo categórico simétrico con sólo un objeto $A \rightrightarrows \mathbf{1}$, entonces $K(A \rightrightarrows \mathbf{1}, 3) \cong K(A,4)$, (véase de nuevo el Ejemplo 2.3.4), mientras que, según observamos en el Ejemplo 3.2.20, $2 - Ext[G, A \rightrightarrows \mathbf{1}] \cong NA^3(G,A)$. Consecuentemente la biyección (3.46) particulariza una biyección

$$NA^3(G,A) \cong [K(G,1), K(A,4)], \tag{3.47}$$

entre el conjunto de clases de 3-extensiones no abelianas de G por el G-módulo trivial A y el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales entre los complejos de Eilenberg-MacLane $K(G,1)$ y $K(A,4)$.

Finalmente, por el Teorema 2.4.4, si $(Y_\bullet, *)$ es un complejo de Kan arco-conexo con $\pi_i(Y_\bullet, *) = 0$, para $i \neq 3,4$, entonces $(Y_\bullet, *)$ es homotópicamente equivalente a $K(\wp_3(Y_\bullet, *), 3)$, donde $\wp_3(Y_\bullet, *)$ es el tercer grupoide de homotopía superior de $(Y_\bullet, *)$, (Definición 1.2.1), que por el Teorema 1.2.5 es un grupo categórico simétrico. Consecuentemente, desde el Teorema 3.2.21 concluimos:

Teorema 3.2.23. *Sean $(X_\bullet, *)$, $(Y_\bullet, *)$ complejos de Kan punteados. Supongamos que $(X_\bullet, *)$ es asférico, es decir, $\pi_i(X_\bullet, *) = 0$, para todo $i \neq 1$, y que $\pi_j(Y_\bullet, *) = 0$, para todo $j \neq 3,4$. Entonces existe una biyección*

$$[(X_\bullet, *), (Y_\bullet, *)] \cong 2 - Ext[\pi_1(X_\bullet, *), \wp_3(Y_\bullet, *)], \tag{3.48}$$

entre el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones simpliciales de $(X_\bullet, *)$ en $(Y_\bullet, *)$ y el conjunto de clases de 2-extensiones especiales de $\pi_1(X_\bullet, *)$ por $\wp_3(Y_\bullet, *)$.

Cuando $\pi_3(Y_\bullet,*)=0$, entonces $\wp_3(Y_\bullet,*)$ es conexo y la inclusion $(\mathcal{A}ut_{\wp_3(Y_\bullet,*)}(*)\rightrightarrows \mathbf{1})\hookrightarrow \wp_3(Y_\bullet,*)$ es una equivalencia monoidal; pero como $\mathcal{A}ut_{\wp_3(Y_\bullet,*)}(*)=\pi_4(Y_\bullet,*)$, entonces $\wp_3(Y_\bullet,*)$ es equivalente a $(\pi_4(Y_\bullet,*)\rightrightarrows \mathbf{1})$. Teniendo ahora en cuenta el Ejemplo 3.2.20, la biyección (3.48) se traduce en el siguiente resultado de interpretación:

$$[(X_\bullet,*),(Y_\bullet,*)]\cong NA^3[\pi_1(X_\bullet,*),\pi_4(Y_\bullet,*)],$$

si $\pi_i(X_\bullet,*)=0=\pi_j(Y_\bullet,*)$, para todo $i\neq 1$ y $j\neq 4$.

De la misma forma, cuando $\pi_4(Y_\bullet,*)=0$, se tiene una equivalencia de grupos categóricos simétricos $(\pi_3(Y_\bullet,*)\rightrightarrows \pi_3(Y_\bullet,*))\sim \wp_3(Y_\bullet,*)$ y, entonces, por el Ejemplo 3.2.19, la biyección (3.48) tiene como caso particular la conocida interpretación $[(X_\bullet,*),(Y_\bullet,*)]\cong 2{-}Ext[\pi_1(X_\bullet,*),\pi_3(Y_\bullet,*)]$, para complejos $X_\bullet$ e $Y_\bullet$ con $\pi_i(X_\bullet,*)=0=\pi_j(Y_\bullet,*)$, para todo $i\neq 1$ y $j\neq 3$.

Bibliografía

[1] A.K. Bousfield y D.M. Kan, Homotopy limits, completions and localizations. *Lecture Notes in Mathematics*. 304, (1972).

[2] L. Breen, Théorie de Schreier supérieure. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, 25 (1992), 465-514.

[3] R. Brown, Some non-abelian methods in homotopy theory and homological algebra, U.C.N.W. (1984).

[4] R. Brown, Topology a geometric account of general topology, homotopy types and the fundamental groupoid. *John Wiley and Sons Limited* (1988).

[5] R. Brown y C.B. Spencer, G-groupoids, crossed modules and the fundamental group. *Proc. Kon. Ned. Acad. v. Wet.* 79 (1976) 296-302.

[6] M. Bullejos, P. Carrasco y A.M. Cegarra, Cohomology with coefficients in symmetric cat-groups. An extension of Eilenberg-MacLane's classification theorem. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 114 (1993), 163-189.

[7] M. Bullejos y A.M. Cegarra, A 3-dimensional non-abelian cohomology of groups with applications to homotopy of continous maps. *Can. J. Math.*, 43 (2) (1991), 265-296.

[8] P. Carrasco y A.M. Cegarra, Group theoretic algebraic models for homotopy types. *J. Pure Appl. Algebra* 75, No.3, (1991) 195-235.

[9] P. Carrasco y A.M. Cegarra, (Braided) Tensor structures on homotopy groupoids and nerves of (braided) categorical groups. *Communications in Algebra*, 24 (13), 3995-4058 (1996).

[10] P. Carrasco y A.M. Cegarra, Schreier theory for central extensions of categorical groups. *Communications in Algebra*, 24 (13), (1996), 4049-4112.

[11] P. Carrasco, A.R. Garzón y J.G. Miranda, Schreier theory for extensions of categorical groups and homotopy classification. Commun. Algebra 28, No.5, (2000), 2585-2613.

[12] P. Carrasco y J. Martínez-Moreno, A 2-dimensional cohomology with coefficients in categorical groups. *Extracta-Mathematicae* 12, no. 3, (1997), 231-241.

[13] P. Carrasco y J. Martínez-Moreno, Categorical G-crossed modules and 2-fold extensions. *JPAA.* (2001), ref. 2481.

[14] A.M. Cegarra y A.R. Garzón, Homotopy classification of categorical torsors. Aparecerá en *Applied Categorical Structures.*

[15] D. Conduché, Modules croisés généralisés de longueur 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34 (1984), 155-178.

[16] E. Curtis, Simplicial homotopy theory. *Lecture Notes Series. Aarhus: Matematisk Institut, Aarhus Universitet*, No.10 (1968).

[17] P. Dedecker, Cohomologie non-abelienne. *Séminaire de l'Institut Mathématique Lille*, 1965-65.

[18] J. Duskin, Simplical methods and the interpretation of triple cohomology. *Memoirs AMS*, Vol. 3, Issue 2, No. 163, (1975).

[19] S. Eilenberg y S. MacLane, Cohomology theory in abstract groups I. *Ann. of Math.*, 48 (1947), 51-78.

[20] S. Eilenberg y S. MacLane, Cohomology theory in abstract groups II. *Ann. of Math.*, 48 (1947), 326-341.

[21] S. Eilenberg y S. MacLane, On the groups $H(\pi, n)$ I. *Ann. of Math.*, 58 (1953), 55-106.

[22] S. Eilenberg y S. MacLane, On the groups $H(\pi, n)$ II. *Ann. of Math.*, 70 (1954), 49-139.

[23] S. Eilenberg y S. MacLane, On the groups $H(\pi, n)$ III. *Ann. of Math.*, 58 (1953), 513-557.

[24] D.B.A. Epstein, Functors between tensored categories. *Invent. Math.*, 1 (1966), 221-228.

[25] A. Frölich y C.T.C. Wall, Graded monoidal categories. *Compositio Mathematica*, Vol 28 (1974), 229-285.

[26] P. Gabriel y M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory. *Springer Verlag*, (1967), Berlin.

[27] A.R. Garzón, J.G. Miranda y A. del Rio. Tensor structures of homotopy groupoids of topological spaces. Preprint.

[28] P. Glenn, Realizations of cohomology classes by torsors under hyper-groupoids. *Thesis, Dep. of Math. SUNY/Buffalo 1977.*

[29] P. Glenn, Realizations of cohomology classes in arbitrary in exact categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 25 (1982), 33-105.

[30] A. Grothendieck, Categories Fibrées et déscente, (SGA I) exposé VI. *L.N. in Math.*, 224, Springer (1971).

[31] D.F. Holt, An interpretation of the cohomology groups $H^n(G, A)$. *J. of Algebra*, 60 (1979), 307-320.

[32] J. Huebschmann, Crossed n-fold extensions of groups and cohomology. *Comment. Math. Helv.*, 55 (1980), 302-314.

[33] Jardine, Supercoherence. *J. Pure Appl. Algebra* 75, No.2, (1991) 103-194.

[34] A. Joyal y R. Street, Braided tensor categories. *Advances in Math.*, (1) 82 (1991), 20-78.

[35] D.M. Kan, A combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.* 67 (2) (1958), 282-312.

[36] S. Kasagian y E.M. Vitale, Factorization systems for symmetric Cat-groups, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 7, No. 5 (2000), 47-70.

[37] G.M. Kelly, On MacLane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc. *J. of Algebra*, 1 (1964), 397-402.

[38] G.M. Kelly y M. L. Laplaza, Coherence for compact closed categories. *J. Pure Appl. Algebra* 19 (1980) 193-213.

[39] G.M. Kelly y S. MacLane, Closed coherence for a natural transformation. Coherence in Categories. *Lecture Notes Math.* 281 (1972) 1-28.

[40] M.L. Laplaza, Coherence for categories with group structure: An alternative approach. *J. Algebra* 84 (1983) 305-323.

[41] S. MacLane, Cohomology theory of abelian groups. *Proc. International Congress of Mathematicians*, II (1950), 8-14.

[42] S. MacLane, Natural associativity and commutativity. *Rice University Studies*, 49 (1963), 28-46.

[43] S. MacLane, Homology. *Classics in Mathematics. Springer*, (1975).

[44] S. MacLane y H.C. Whitehead, On the 3-type of a complex. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 36, (1950) 41-48.

[45] J.P. May, Simplicial objects in Algebraic Topology. *Van Nostrand*, (1967).

[46] J.C. Moore, Seminar on algebraic homotopy theory. *Princenton*, (1956).

[47] A. Rousseau, Extensions de Gr-Catégories. *Thèse de doctorat de mathématiques.* Université Paris 13. (2000).

[48] N. Saavedra, Catégories tannakiennes, *Lecture Notes in Math.* 265, *Springer Verlag* (1972).

[49] G.B. Segal, Classifying spaces and spectral sequences. *Publ. Math. Inst. des Hautes Eutdes Scient.* (Paris) 34 (1968), 105-112.

[50] H.X. Sinh, Gr-catégories. (Université Paris VII, These de doctorat, 1975).

[51] M. Takeuchi y K.H. Ulbrich, Complexes of categories with abelian group structure. *J. Pure and Appl. Algebra*, 27 (1983), 61-73.

[52] K.H. Ulbrich, An abstract version of the Hattori-Villamayor-Zelinsky Sequences. *Sci. Pap. Coll. Gen. Educ.*, Univ. Tokyo 29, (1979), 125-137.

[53] K.H. Ulbrich, Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktor I. *J. Algebra*, 72 (1981), 279-295.

[54] K.H. Ulbrich, Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktor II. *J. Algebra*, 81 (1983), 279-294.

[55] K.H. Ulbrich, Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktor III. *J. Algebra*, 88 (1984), 292-316.

[56] K.H. Ulbrich, Group cohomology for Picard Categories. *J. of Algebra*, 91 (1984), 464-498.

[57] K.H. Ulbrich, On cohomology of graded group categories. *Compositio Mathematica* 63 (1987), 408-417.

[58] E.M. Vitale, The Brauer and the Brauer-Taylor groups of a symmetric monoidal category. *Cahiers Topologie Géométrie Différentielle Catégoriques* 37 (1996) 91-122.

[59] E.M. Vitale, A Picard-Brauer exact sequence of categorical groups. Preprint.

[60] J.H.C. Whitehead, Combinatorial homotopy II. *Bull. Am. Math. Soc.* 55 (1949) 453-496.

[61] Y.CH. Wu, $H^3(G, A)$ and obstructions of group extensions. *J. of Pure Appl. Algebra*, 12 (1978), 93-100.