

Transformada de Fourier*

1. De las series de Fourier a la Transformada de Fourier: primeras consideraciones

Las series de Fourier son útiles para el estudio de señales periódicas pero, desafortunadamente, este tipo de señales no son tan frecuentes en la práctica como las no-periódicas. Esta situación requiere el desarrollo de una teoría matemática más ambiciosa y a ello vamos a dedicar algún tiempo.

Sea $x(t)$ una señal aperiódica¹ definida en todo el intervalo real y denotemos por $x_T(t)$ ($T > 0$) la señal $2T$ -periódica que se obtiene a partir de $x(t)$ haciendo $x_T(t) = x(t)$ para $t \in (-T, T]$ y extendiendo periódicamente con periodo $2T$. Si suponemos que $x(t)$ es suficientemente suave (e.g., es $C^1(\mathbb{R})$), entonces tendremos la identidad

$$x(t) = x_T(t) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T}^T x(s) e^{-\pi i/T ks} ds \right] e^{\pi i/T kt}, \text{ para } t \in (-T, T] \quad (1)$$

Evidentemente, si hacemos $T \rightarrow \infty$ en el segundo miembro de la igualdad anterior, entonces la igualdad límite será válida para todo $t \in \mathbb{R}$ y su valor será igual al de la señal de partida $x(t)$.

Ahora, estudiemos qué le sucede al segundo miembro si hacemos $T \rightarrow \infty$. Tomando $\Delta f = 1/(2T)$ y $f_k = k\Delta f$, podemos reescribir (1) como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta f \left[\int_{-T}^T x(s) e^{-2\pi i f_k s} ds \right] e^{2\pi i f_k t}, \text{ para } t \in (-T, T]$$

Ahora bien, $|f_{k+1} - f_k| = \Delta f = 1/2T$ ($k \in \mathbb{Z}$) y, por tanto, podemos interpretar los puntos $\{f_k\}$ como nodos equiespaciados de una partición de Riemann para la integral límite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-2\pi i f s} ds \right) e^{2\pi i f t} df$$

Es decir, podemos concluir que (bajo ciertas condiciones restrictivas sobre la suavidad de la señal aperiódica $x(t)$) se satisface la siguiente identidad (llamada: Teorema integral de Fourier):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-2\pi i f s} ds \right) e^{2\pi i f t} df$$

*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto del autor: J.M. Almira, "Matemáticas para la recuperación de señales", Grupo Editorial Universitario, 2005.

¹Es decir: no periódica.

Haciendo el cambio de variable $\xi = 2\pi f$, podemos reescribir la anterior fórmula como

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi$$

Definición 1 *La señal*

$$\mathcal{F}(x)(\xi) := \widehat{x}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\xi s} ds$$

toma el nombre de **transformada de Fourier** de la señal (aperiódica) $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

Definición 2 *La señal*

$$\mathcal{F}^{-1}(y)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

toma el nombre de **transformada de Fourier inversa** de la señal (aperiódica) $y(\xi)$.

Nota 1 *Es evidente que el teorema integral de Fourier se puede reescribir como*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x)(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(x))(t) \end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(y))(\xi) = y(\xi).$$

Una cosa es clara: bajo ciertas hipótesis (que luego especificaremos), conocer la transformada de Fourier de una señal equivale a conocer dicha señal, ya que al aplicar la transformada inversa recuperamos toda la información. De igual forma, si conocemos los coeficientes de Fourier $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ de cierta señal (periódica) $x(t)$, de la que sabemos que es suficientemente suave, entonces conocemos la señal, pues para rescatarla completamente bastará sumar la correspondiente serie de Fourier. Así, el papel del espectro de la señal, que en el caso periódico lo juegan los coeficientes de Fourier, en el caso aperiódico lo juega la transformada de Fourier.

Para evitar problemas con la definición de transformada de Fourier, supondremos que la señal $x(t)$ es absolutamente integrable en \mathbb{R} . Es decir, supondremos que

$$\|x\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

En tal caso, su transformada $\widehat{x}(\xi)$ existe y está uniformemente acotada en \mathbb{R} , pues $|e^{-i\xi s}| = 1$ para $\xi, s \in \mathbb{R}$ implica $|\widehat{x}(\xi)| \leq \|x\|_{L^1(\mathbb{R})}$ para $\xi \in \mathbb{R}$.

1.1. Teoremas básicos sobre la transformada de Fourier

La palabra "transformada" indica que estamos trabajando con una herramienta para transformar un tipo determinado de problema en otro. De hecho, la transformada de Fourier será útil (como veremos) para simplificar el estudio de la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales, convirtiendo el problema de la solución de una ED en un problema de solución de ecuaciones algebraicas. La motivación para dicho estudio está en el hecho de que la transformada de Fourier posee buenas propiedades algebraicas cuando se aplica a las derivadas sucesivas de una señal, o al trasladar la señal, etc. En este apartado estudiamos las propiedades más sencillas de la transformada de Fourier.

A continuación exponemos una lista de las propiedades elementales de $\mathcal{F}(x)(\xi) = \hat{x}(\xi)$ (Algunas de las demostraciones son muy sencillas y las dejamos como ejercicio).

Nota 2 *Mantenemos ambas notaciones, $\mathcal{F}(x)$ y \hat{x} para la transformada de Fourier, porque a veces una de ellas es más cómoda o más clarificadora que la otra. Por otra parte, esto ayuda a que el estudiante se familiarice con ambas notaciones y, por tanto, le permitirá leer fácilmente diferentes textos sobre el tema (ya que por ahora no hay acuerdo unánime para la notación en esta materia).*

- **Linealidad** La transformada de Fourier es un operador lineal. Más precisamente, si $x_1, x_2 \in L^1(\mathbb{R})$, y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\widehat{ax_1 + bx_2}(\xi) = a\hat{x}_1(\xi) + b\hat{x}_2(\xi)$.
- **Traslación en el tiempo.** Dado $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\mathcal{F}[x(t - a)](\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}[x(t)](\xi) \text{ y } \mathcal{F}[e^{ia\xi}x(t)](\xi) = \mathcal{F}[x(t)](\xi - a)$$

Demostración. En realidad, esta propiedad es trivial: basta hacer un cambio de variable, como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t - a)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} x(t - a) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(s+a)} x(s) ds \text{ (donde } s = t - a) \\ &= e^{-ia\xi} \mathcal{F}[x(t)](\xi). \end{aligned}$$

La otra fórmula se demuestra de forma análoga. \square

- **Cambios de escala.** Si $\delta > 0$ y $x_\delta(t) = \delta^{-1}x(t/\delta)$, entonces

$$\mathcal{F}[x_\delta](\xi) = \mathcal{F}[x](\delta\xi) \text{ y } \mathcal{F}[x(\delta t)](\delta\xi) = \mathcal{F}(x)_\delta(\xi).$$

Demostración. De nuevo un simple cambio de variable sirve para nuestros objetivos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_\delta](\xi) &= \delta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} x(t/\delta) dt \\ &= \delta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\delta s} x(s) \delta ds \text{ (donde } s = \frac{t}{\delta}) \\ &= \mathcal{F}[x](\delta\xi) \end{aligned}$$

La demostración de la segunda fórmula es análoga. \square

- **Derivación.** Si x es continua y derivable a trozos, con $x'(t) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\mathcal{F}(x')(\xi) = i\xi \mathcal{F}(x)(\xi).$$

Además, si $tx(t)$ es integrable entonces

$$\mathcal{F}(tx(t))(\xi) = i\mathcal{F}(x)'(\xi).$$

Demostración. En este caso vamos a utilizar la fórmula de integración por partes, para el cálculo de \hat{x}' :

$$\begin{aligned} \hat{x}'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} x'(t) dt \\ &= e^{-i\xi t} x(t) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} x(t) dt \\ &= i\xi \hat{x}(\xi) \end{aligned}$$

Antes de continuar desarrollando la teoría, vamos a calcular algunas transformadas de Fourier:

Ejemplo 1 Consideremos la señal escalón

$$u_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_a)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_a(s) e^{-i\xi s} ds \\ &= \int_{-a}^a e^{-2\pi i \xi s} ds = \frac{e^{-i\xi s}}{-i\xi} \Big|_{s=-a}^{s=a} = \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} \\ &= \frac{\cos(-a\xi) + i \sin(-a\xi) - \cos(a\xi) - i \sin(a\xi)}{-i\xi} \\ &= 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Sea $x(t) = \exp(-|t|)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \widehat{x}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-i\xi t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\xi t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\xi t} dt \\
 &= -\int_{-\infty}^0 e^{-u} e^{i\xi u} du + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\xi t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-t} (e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}) dt = \int_0^{\infty} 2e^{-t} \cos(\xi t) dt \\
 &= 2 \left(-\cos(\xi t) e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \xi \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(\xi t) dt \right) \\
 &= 2 \left[1 + \xi \left(e^{-t} \sin(\xi t) \Big|_0^{\infty} - \xi \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\xi t) dt \right) \right] \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \xi^2 \widehat{x}(\xi) \right); \text{ pues ya hemos visto que } \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(\xi t) dt = \frac{1}{2} \widehat{x}(\xi).
 \end{aligned}$$

De modo que

$$\widehat{x}(\xi) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \xi^2 \widehat{x}(\xi) \right) = 2 - \xi^2 \widehat{x}(\xi)$$

y, por tanto,

$$\widehat{x}(\xi) = \frac{2}{\xi^2 + 1}.$$

Hay otros ejemplos cuyo cálculo no es tan sencillo como en los casos anteriores. Esto, unido a su importancia para las aplicaciones, los traslada a la categoría de teoremas:

Teorema 1 Si $x(t) = \exp(-t^2)$, entonces $\widehat{x}(\xi) = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2/4)$.

Demostración. El primer paso para el cálculo de $\widehat{x}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\xi t} dt$ consiste en agrupar en un sólo término el producto $e^{-t^2} e^{-i\xi t}$, de manera que aparezca como exponente un cuadrado perfecto. Así, si tenemos en cuenta que

$$\left(t + \frac{i\xi}{2} \right)^2 = t^2 + i\xi t - \frac{\xi^2}{4},$$

resulta que

$$-(t^2 + i\xi t) = -\frac{\xi^2}{4} - \left(t + \frac{i\xi}{2} \right)^2$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
 \widehat{x}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4} - (t + \frac{i\xi}{2})^2} dt \\
 &= e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t + \frac{i\xi}{2})^2} dt,
 \end{aligned}$$

lo que reduce nuestro problema al cálculo de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\frac{i\xi}{2})^2} dt.$$

Para ello, vamos a demostrar el siguiente resultado técnico:

Lema 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Demostración. Denotemos por \mathbf{I} la integral que queremos calcular: $\mathbf{I} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$. Entonces

$$\mathbf{I}^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+s^2)} dt ds.$$

Si hacemos el cambio de variable a coordenadas polares,

$$\begin{cases} t = \rho \cos \theta \\ s = \rho \sin \theta \end{cases},$$

cuyo Jacobiano es igual a ρ , podemos entonces hacer uso del teorema de integración por cambio de variables, para obtener que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho \right) \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = 2\pi \left[\frac{-1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{\infty} = 2\pi \frac{1}{2} = \pi. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{I} = \sqrt{\pi}$. \square

Tomamos ahora en consideración la fórmula integral de Cauchy, aplicada a la función entera $f(z) = \exp(-z^2)$. Como se trata de una función sin singularidades, la integral $\int_{\gamma} \exp(-z^2) dz$ se anula sobre cualquier curva cerrada γ . Consideramos, pues, la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, cuyo grafo es el borde del rectángulo $[-R, R] \times [0, \xi/2]$ y que está orientada positivamente (de modo que γ_1 va desde $-R$ hasta R , γ_2 va desde R hasta $R + i\frac{\xi}{2}$, γ_3 va desde $R + i\frac{\xi}{2}$ hasta $-R + i\frac{\xi}{2}$ y γ_4 va desde $-R + i\frac{\xi}{2}$ hasta $-R$). Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz \\ &= \int_{-R}^R e^{-t^2} dt - \int_{-R}^R e^{-(t+\frac{i\xi}{2})^2} dt. \end{aligned}$$

Como esta igualdad se satisface paa todo $R > 0$, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\frac{i\xi}{2})^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

y, por tanto,

$$\widehat{x}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Ya hemos mencionado anteriormente que si la señal es absolutamente integrable en \mathbb{R} entonces su transformada de Fourier es acotada. En realidad, el siguiente resultado, más fuerte, se satisface:

Teorema 2 (Lema de Riemann-Lebesgue) Si $x \in L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}(x)(\xi) = 0.$$

Otro resultado importante (y, en principio, inesperado) consiste en que podemos garantizar la continuidad de $\widehat{x}(\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}$, incluso para señales $x(t)$ discontinuas. Más precisamente, se satisface el siguiente teorema:

Teorema 3 Supongamos que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; t \rightarrow x(t)$ es continua a trozos y absolutamente integrable (i.e., $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$). Entonces $\widehat{x}(\xi)$ es continua en todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración. Para demostrar el teorema, vamos a hacer uso de un resultado técnico de análisis real que no cabe demostrar en un curso del nivel que nos proponemos, pero sí podremos utilizar. Se trata de una versión del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue adaptada al contexto en que nos encontramos:

Teorema 4 (Convergencia dominada, Lebesgue) Supongamos que tenemos una familia de funciones $x_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ($h \in \mathbb{R}$), continuas a trozos tales que existe una cierta función g verificando que

$$|x_h(t)| \leq |g(t)| \text{ para todo } t, h \in \mathbb{R}$$

y $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < \infty$. Si además sabemos que existe el límite puntual

$$x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} x_h(t); t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x_h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt.$$

Nota: Para la demostración de este resultado, ver [?].

Ahora podemos demostrar la continuidad de $\widehat{x}(\xi)$. Para ello, fijado $\xi \in \mathbb{R}$ hacemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(\xi + h) - \widehat{x}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(e^{-i(\xi+h)t} - e^{-i\xi t}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\xi t}(e^{-iht} - 1) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_h(t) dt, \end{aligned}$$

donde $x_h(t) = x(t)e^{-i\xi t}(e^{-iht} - 1)$. Es claro que, para $\xi, h, t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|x_h(t)| = |x(t)||e^{-i\xi t}||e^{-iht} - 1| \leq 2|x(t)|$$

Como $g(t) = 2|x(t)|$ es absolutamente integrable, y existe el límite puntual

$$\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t) = x(t)e^{-i\xi t} \lim_{h \rightarrow 0} (e^{-iht} - 1) = 0, t \in \mathbb{R};$$

se concluye que podemos utilizar el teorema de la convergencia dominada, de modo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\widehat{x}(\xi + h) - \widehat{x}(\xi)) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x_h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{h \rightarrow 0} x_h(t)) dt = 0,$$

que es lo que queríamos probar. \square

Corolario 1 *En las condiciones del teorema anterior, si $\widehat{x}(\xi)$ es absolutamente integrable, entonces $x(t) \in \mathbf{C}(\mathbb{R})$.*

Es más, si utilizamos una versión más fuerte del Teorema de la convergencia dominada (ver [?]), se puede demostrar el siguiente (importante) resultado:

Teorema 5 (Riemann-Lebesgue + Continuidad de $\widehat{x}(\xi)$) *Sean $L^1(\mathbb{R})$ y $\mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ dotados de sus normas usuales $\|x(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ y $\|x(t)\|_{\mathbf{C}_0(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$. Entonces $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$ es un operador acotado. Lo mismo sucede con el operador transformada de Fourier inversa, $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{C}_0(\mathbb{R})$*

Otra propiedad importante de la transformada de Fourier es el siguiente resultado:

Teorema 6 *Supongamos que las funciones $x(t)e^{s_1 t}$ y $x(t)e^{s_2 t}$ son continuas a trozos y absolutamente integrables en toda la recta real, y $s_1 < s_2$. Entonces la función*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-izt} dt$$

existe y es holomorfa en la banda

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z \in (s_1, s_2)\}.$$

Demostración. Sea $z = w + is \in \mathcal{D}$. Entonces, para $t \geq 0$, se tiene que

$$|x(t)e^{-izt}| = |x(t)|e^{st} \leq |x(t)|e^{s_2 t}$$

Además, para $t \leq 0$, se tiene que

$$|x(t)e^{-izt}| = |x(t)|e^{st} \leq |x(t)|e^{s_1 t}.$$

Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-izt}| dt \leq \int_{-\infty}^0 |x(t)|e^{s_1 t} dt + \int_0^{\infty} |x(t)|e^{s_2 t} dt < \infty.$$

Esto demuestra la existencia de $F(z)$ para $z \in \mathcal{D}$. Por otra parte, fijados $z^* \in \mathcal{D}$, y $\{z_n\} \rightarrow z^*$ ($\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$), se tiene que

$$|F(z_n) - F(z^*)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iz_n t} - e^{-iz^* t}| |x(t)| dt.$$

Ahora bien, sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |e^{-iz_n t} - e^{-iz^* t}| = 0$ (puntualmente en $t \in \mathbb{R}$) y, por tanto, necesitamos (para utilizar el Teorema de Convergencia Dominada) encontrar una función $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $|e^{-iz_n t} - e^{-iz^* t}| |x(t)| \leq y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y todo $n \geq 0$. Es fácil comprobar que la función $y(t)$ definida por $y(t) = 2e^{s_2 t} |x(t)|$ si $t \geq 0$, $y(t) = 2e^{s_1 t} |x(t)|$ si $t < 0$ satisface dichos requisitos. Por tanto, F es continua en \mathcal{D} . Tomamos ahora γ una curva cerrada en \mathcal{D} . Entonces, utilizando el teorema de Fubini, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(z) dz &= \int_{\gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-izt} dt \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} x(t) e^{-izt} dz \right) dt \text{ (por Fubini)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0 dt \text{ (por el Teor. Integral de Cauchy)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, podemos usar el Teorema de Morera para afirmar que $F \in H(\mathcal{D})$, que es lo que queríamos demostrar. \square

Corolario 2 Si $\hat{x}(\xi)$ tiene soporte compacto entonces $x(t)$ es la restricción a \mathbb{R} de una función entera $x(z)$.

1.2. Convolución y Transformada de Fourier

Dadas dos señales $x(t)$, $y(t)$ absolutamente integrables en \mathbb{R} , recordamos que su convolución está dada por la fórmula

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) y(t - s) ds.$$

En realidad, la convolución está bien definida desde el momento en que una de las señales sea acotada (en \mathbb{R}) y la otra sea absolutamente integrable.

Proposición 1 La convolución de señales es una operación conmutativa.

Demostración. Basta hacer el cambio de variables $t - s = u$, de modo que:

$$\begin{aligned} \widehat{x * y}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) y(t - s) ds = - \int_{\infty}^{-\infty} x(t - u) y(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - u) y(u) du = \widehat{y * x}(t). \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 2 Si $x(t)$ e $y(t)$ son señales continuas a trozos y absolutamente integrables en \mathbb{R} , entonces su convolución, $\widehat{x * y}(t)$ es también una señal absolutamente integrable. Es más, se verifica la desigualdad

$$\|\widehat{x * y}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|x\|_{L^1(\mathbb{R})} \|y\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Demostración. Como las señales son absolutamente integrables, podemos utilizar el Teorema de Fubini, para cambiar el orden de integración en los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \|\widehat{x * y}\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{x * y}(t)| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s) ds \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)||y(t-s)| ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)| ds \right\} |y(t-s)| dt \text{ (por Fubini)} \\ &= \|x\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |y(t-s)| dt = \|x\|_{L^1(\mathbb{R})} \|y\|_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

Teorema 7 Supongamos que $x, y \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\widehat{x * y}(\xi) = \hat{x}(\xi)\hat{y}(\xi)$$

Demostración. Ya sabemos que $\widehat{x * y}(t)$ es absolutamente integrable, de modo que podemos utilizar el teorema de Fubini otra vez en nuestros cálculos:

$$\begin{aligned} \widehat{x * y}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x * y(t)e^{-i\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(s)y(t-s) ds \right\} e^{-i\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-i\xi s} y(t-s)e^{-i\xi(t-s)} ds dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(s)e^{-i\xi s} ds \right\} y(t-s)e^{-i\xi(t-s)} dt \\ &= \hat{x}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} y(t-s)e^{-i\xi(t-s)} dt \\ &= \hat{x}(\xi)\hat{y}(\xi), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Evidentemente el teorema de convolución anterior es útil en teoría de señales, puesto que los filtros son normalmente operadores de convolución y, usando el resultado anterior, podemos convertir

una operación relativamente complicada (la convolución de señales en el dominio del tiempo) en otra muy sencilla (el producto de señales en el dominio de la frecuencia). Esto lleva a pensar que quizás cierto tipo de problemas que se plantean de forma natural en el dominio del tiempo se puedan trasladar (vía la transformada de Fourier) al dominio de la frecuencia, donde (supuestamente) serán más fáciles de resolver. En tal caso, una vez obtenida la solución en el dominio de la frecuencia, será necesario llevársela al dominio del tiempo vía una transformación que deberá funcionar como el operador inverso de la transformada de Fourier. Con esto, queda motivado el contenido de la siguiente sección.

1.3. El teorema integral de Fourier

En las secciones anteriores llegamos mediante una serie de argumentos heurísticos a la expresión

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x)(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Ahora vamos a estudiar en detalle bajo qué condiciones sobre la señal $x(t)$ se satisface dicha fórmula. De la misma forma que no fue sencillo el estudio de la convergencia de las series de Fourier, la respuesta a la pregunta que nos formulamos ahora no es trivial en absoluto. Para empezar, pudiera suceder que $\mathcal{F}(x) = \widehat{x} \notin L^1(\mathbb{R})$ y, por tanto, la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(x)(\xi) e^{i\xi t} d\xi$ no sea convergente. Un ejemplo de que esto es perfectamente posible lo da la identidad (que ya demostramos en su momento)

$$\mathcal{F}(u_a)(\xi) = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$

por otra parte, aún en el caso de que $\widehat{x} \in L^1(\mathbb{R})$ es posible que para comprobar la fórmula

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi$$

no baste con substituir por el valor de $x(s)$ y realizar el cálculo de la integral doble, pues podría suceder que no podamos hacer ciertas operaciones como, por ejemplo, intercambiar el orden de integración (debido a que no hay convergencia absoluta para la integral doble).

Pero podemos intentar lo siguiente:

- Primero multiplicamos el integrando $\widehat{x}(\xi)$ por una función $\Phi_\varepsilon(\xi)$ que decrezca muy rápido para $\xi \rightarrow \pm\infty$ pero que, si hacemos $\varepsilon \rightarrow 0$, se aproxime uniformemente a la función 1. De esta forma, para $\varepsilon > 0$ fijo, podemos hacer las cuentas (intercambiar el orden de integración, etc) pues la correspondiente integral doble es absolutamente convergente.
- A continuación intentamos llegar a nuestro resultado tomando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Existen varias elecciones de $\Phi_\varepsilon(\xi)$ que funcionan (y, por tanto, existen varias versiones del Teorema Integral de Fourier²). Una posibilidad es tomar $\Phi_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon^2 \xi^2 / 2}$ y, de hecho, el correspondiente teorema es muy usado para el estudio de procesos estocásticos. Nosotros vamos a elegir $\Phi_\varepsilon(\xi)$ de

²En realidad, esto es parecido a la existencia de varios métodos de sumación para las series de Fourier.

forma un poco más drástica. Tomamos: $\Phi_\varepsilon(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]}(\xi)$, lo que es equivalente a interpretar la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \widehat{x}(\xi) d\xi$ como su valor principal. Es decir, para nuestro teorema, no suponemos la convergencia de la integral impropia en el sentido estricto sino que interpretamos que denota su valor principal,

$$\text{v.p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \widehat{x}(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

De esta forma, llegamos a demostrar el siguiente (importante) resultado:

Teorema 8 (Teorema Integral de Fourier) *Supongamos que $x(t)$ es continua a trozos, absolutamente integrable en \mathbb{R} , en cada punto admite ambas derivadas laterales, y que en los puntos de discontinuidad está definida como*

$$x(t) = (x(t+) + x(t-))/2.$$

Entonces

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{i\xi t} \widehat{x}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \text{v.p} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \widehat{x}(\xi) d\xi \right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Demostración. Utilizamos el teorema de Fubini para ver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \widehat{x}(\xi) e^{i\xi t} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\xi s} ds \right) e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left(\int_{-M}^M e^{-i\xi s} e^{i\xi t} d\xi \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left(\left[\frac{e^{i\xi(t-s)}}{i(t-s)} \right]_{\xi=-M}^{\xi=M} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \frac{2 \sin(M(t-s))}{t-s} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t x(s) \frac{\sin(M(t-s))}{t-s} ds + \frac{1}{\pi} \int_t^{\infty} x(s) \frac{\sin(M(t-s))}{t-s} ds \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $u = s - t$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \widehat{x}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 x(u+t) \frac{\sin(Mu)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x(u+t) \frac{\sin(Mu)}{u} du.$$

Vamos a demostrar que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du = \frac{x(t+)}{2}$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 x(u+t) \frac{\sin(Mu)}{u} du = \frac{x(t-)}{2}.$$

En realidad, basta que hagamos una de estas pruebas (la otra es análoga). Lo primero que hacemos es descomponer la integral $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du$ en dos trozos, como sigue

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du$$

(la elección de la constante π no es, de todas formas, significativa). La función

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{x(t+u)}{u} & \text{si } u \geq \pi \\ 0 & \text{si } u < \pi \end{cases}$$

es continua a trozos y absolutamente integrable en \mathbb{R} , de modo que podemos utilizar el Teorema de Riemann Lebesgue para garantizar que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin(Mt) dt = 0$$

Por tanto, $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_{\pi}^{\infty} \frac{x(t+u)}{u} \sin(Mu) du = 0$ y sólo tenemos que estudiar el límite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du.$$

Ahora bien, sabemos que $h(u) = \frac{x(t+u) - x(t^+)}{u}$ es continua a trozos y, por tanto, también como consecuencia del Teorema de Riemann-Lebesgue, se tiene que

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(t+u) \frac{\sin(Mu)}{u} du \\ = & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{x(t+u) - x(t^+)}{u} \sin(Mu) du + x(t^+) \int_0^{\pi} \frac{\sin(Mu)}{u} du \right\} \\ = & \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{x(t^+)}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(Mu)}{u} du \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $s = Mu$, obtenemos que $\frac{du}{u} = \frac{ds}{s}$ y, por tanto,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(Mu)}{u} du = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi M} \frac{\sin(s)}{s} ds = \int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$$

La demostración del teorema se concluye si tenemos en cuenta que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2}$, hecho que separamos en forma de nota. \square

Nota 3 Veamos que $\int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2}$. Como $\frac{\sin(s)}{s}$ es continua en $[0, \infty)$, la integral impropia será convergente si y solo si lo es la integral $\int_a^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$ para alguna elección de $a > 0$. Para demostrar esto último, hacemos integración por partes.

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds = \left[\frac{-\cos s}{s} \right]_{s=a}^{s=\infty} + \int_a^{\infty} \frac{\sin(s)}{s^2} ds$$

Ahora bien, $\left| \frac{\sin s}{s^2} \right| \leq \frac{1}{s^2}$ y $\int_a^{\infty} \frac{1}{s^2} ds < \infty$. Esto demuestra que nuestra integral impropia existe.

Teniendo en cuenta que $\frac{\sin u}{u}$ es una función continua concluimos que la integral impropia $\int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds$ se podrá representar como

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(s)}{s} ds = \lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_0^{R_n} \frac{\sin(s)}{s} ds$$

para alguna elección de la sucesión $\{R_n\}_{n=0}^\infty$. Para hacer efectivos los cálculos, tomamos $R_n = (n + \frac{1}{2})\pi$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin((n + 1/2)t)}{t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{2 \sin(\frac{1}{2}t)}{t} \frac{\sin((n + 1/2)t)}{2 \sin(\frac{1}{2}t)} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{2 \sin(\frac{1}{2}t)}{t} D_n(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin(\frac{1}{2}t)}{t} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

(donde se ha utilizado el Teorema de Dirichlet ??). Esto finaliza la prueba. □

1.4. Transformada de Fourier de funciones de $L^2(\mathbb{R})$

En principio, la transformada de Fourier de una señal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ podría no existir, por la sencilla razón de que la integral $\int_{-\infty}^\infty x(t)e^{i\xi t} d\xi$ podría ser divergente si $x(t) \notin L^1(\mathbb{R})$. Aún así, sería deseable disponer de una extensión de la transformada de Fourier a todo $L^2(\mathbb{R})$: después de todo, $L^2(\mathbb{R})$ es el sustituto natural (en el mundo analógico) de $l^2(\mathbb{Z})$ y, ya que la serie de Fourier tenía tan buenas propiedades en relación con el espacio $l^2(\mathbb{Z})$, quizás consigamos algo parecido para la transformada de Fourier.

La extensión a que nos referimos se puede hacer en gran medida gracias al siguiente resultado técnico:

Lema 2 Si $x(t), y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ son tales que también $\hat{x}(t), \hat{y}(t) \in L^1(\mathbb{R})$, entonces tanto $x(t), y(t)$ como $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$ y además

$$(x, y)_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} (\hat{x}, \hat{y})_{L^2(\mathbb{R})}$$

En particular, si $x(t) = y(t)$, entonces se tiene la siguiente “fórmula de Parseval”:

$$\|x\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{x}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Demostración. Que $x(t), \hat{x}(t) \in L^1(\mathbb{R})$ implica $x(t), \hat{x}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ es sencillo de probar. Vamos a

calcular el producto $(x, y)_{L^2(\mathbb{R})}$ utilizando el teorema integral de Fourier:

$$\begin{aligned}
 (x, y)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{y}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \right) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{y}(\xi) x(t) e^{-i\xi t} dt \right) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{y}(\xi)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\xi t} dt \right) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{y}(\xi)} \widehat{x}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} (\widehat{x}, \widehat{y})_{L^2(\mathbb{R})}
 \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. \square

Ahora, si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces es posible encontrar una sucesión de señales $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ tales que $x_n(t), \widehat{x}_n(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ (ver [?]). Se sigue entonces del lema anterior que la sucesión $\{\widehat{x}_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$, ya que la sucesión $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ lo es (al ser convergente) y

$$\|\widehat{x}_n(\xi) - \widehat{x}_m(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \|x_n(t) - x_m(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

se satisface para todo $n, m \geq 0$. Se sigue que existe una señal $z(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_n(\xi) - z(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Veamos que $z(\xi)$ no depende de la sucesión de aproximantes $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$: si $\{y_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ fuese otra sucesión de señales con $y_n(t), \widehat{y}_n(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$, entonces se tendría que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{x}_n(\xi) - \widehat{y}_n(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - y_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

y, por tanto, también $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{y}_n(\xi) - z(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$. Esto prueba que $z(\xi)$ sólo depende de la señal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$.

Definición 3 Llamamos transformada de Fourier³ de la señal $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ a la única señal $\widehat{x}(\xi)$ tal que es límite en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$ de una sucesión de transformadas $\{\widehat{x}_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$, donde $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty} \subset L^2(\mathbb{R})$ satisface $x_n(t), \widehat{x}_n(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$.

De esta forma hemos demostrado el siguiente (importante) resultado:

Teorema 9 (Plancherel) La transformada de Fourier, definida originalmente en $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, se extiende de forma única a un operador $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ($\mathcal{F}(x(t)) = \widehat{x}(\xi)$). Además,

$$(x, y)_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} (\widehat{x}, \widehat{y})_{L^2(\mathbb{R})} \text{ y } \|x\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{x}\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

se satisfacen para toda elección de $x, y \in L^2(\mathbb{R})$.

Nota 4 El resto de propiedades algebraicas de la transformada de Fourier también se conservan para la extensión que hemos definido en esta sección.

³Algunos autores llaman transformada de Plancherel a la extensión de \mathcal{F} a $L^2(\mathbb{R})$ y la denotan por \mathcal{P} . Ver, por ejemplo, [?].

1.5. Fórmula de Poisson

Sea $x \in L^1(\mathbb{R})$ y sea $\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT)$. Es evidente que $\varphi(t) = \varphi(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y, además,

$$\int_0^T |\varphi(t)| dt \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T |x(t + nT)| dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} |x(t)| dt = \|x\|_{L^1} < \infty$$

por tanto, podemos intentar calcular los coeficientes de Fourier de φ como función T -periódica.

$$\begin{aligned} c_k(\varphi) &= \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T x(t + nT) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt = \frac{1}{T} \hat{x}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) \end{aligned}$$

Se sigue que el desarrollo en serie de Fourier de φ es

$$\varphi(t) \sim \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{\frac{2\pi i k t}{T}}$$

y, por tanto, cuando se pueda garantizar la convergencia de dicho desarrollo, se tendrá la conocida fórmula de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \quad (2)$$

Un caso especial es el que se logra de hacer $t = 0$ en la expresión anterior:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{2\pi n}{T}\right). \quad (3)$$

Es muy importante, para nuestros objetivos futuros (relacionados con la teoría del muestreo de señales analógicas), observar que se satisface la siguiente propiedad:

Proposición 3 Si $x = \phi \in \mathbb{S}$, entonces se satisface la Fórmula de Poisson (2).

2. Transformada de Fourier de Señales Generalizadas

Uno de los problemas que tiene el concepto de transformada de Fourier es que para calcular $\mathcal{F}(x)$ es necesario asumir que $x \in L^1(\mathbb{R})$ o, mediante el argumento explicado en la sección anterior, también podemos ampliar dicho cálculo al caso en que $x(t)$ es una señal de energía finita, $x \in L^2(\mathbb{R})$. ¿Podemos definir la transformada de Fourier de señales en espacios menos restrictivos?. Por ejemplo, ¿es posible definir $\mathcal{F}(x)$ cuando $x \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in (1, \infty)$? (Una idea podría ser considerar los elementos de $L^p(\mathbb{R})$ como funciones generalizadas).

Si tenemos en cuenta que para toda función $\phi \in \mathbb{S}$ se tiene que $\mathcal{F}(\phi) \in \mathbb{S}$ (algo que dejamos como ejercicio para el lector), entonces podemos definir la transformada de Fourier de una señal generalizada $x \in \mathbb{G}$ del siguiente modo:

Definición 4 Sea $x \in \mathbb{G}$ una función generalizada arbitraria. Definimos su transformada de Fourier (generalizada) $\mathcal{F}(x)$ mediante la fórmula siguiente:

$$\mathcal{F}(x)\{\phi\} = x\{\mathcal{F}(\phi)\}$$

También usamos la notación $\hat{x} = \mathcal{F}(x)$.

Nota 5 En la definición anterior se está utilizando la caracterización de las funciones generalizadas como distribuciones temperadas (i.e., funcionales continuos $h : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$). Ver Teorema ??.

El concepto que acabamos de introducir permite hacer un uso muy extenso de las transformadas de Fourier ya que en principio no hay grandes restricciones para las funciones generalizadas. En particular, esto se hará notar en el estudio del teorema del muestreo clásico. Ahora, para que la transformada de Fourier que acabamos de introducir sea útil es imprescindible comprobar que las propiedades básicas de la transformada de Fourier clásica se conservan.

Teorema 10 (Teorema de inversión de Fourier para señales generalizadas) Sea $x(t) \in \mathbb{G}$ una función generalizada. Entonces para toda señal $\phi \in \mathbb{S}$ se tiene que

$$\frac{1}{2\pi} \hat{x}\{\phi(t)\} = x\{\phi(-t)\},$$

y, por tanto, podemos afirmar que $x(t) = \frac{1}{2\pi} \hat{x}(-t)$.

Demostración. Sean $x \in \mathbb{G}$ y $\phi \in \mathbb{S}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \hat{x}\{\phi(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(t) \hat{\phi}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{\phi}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi(-t) dt \\ &= x\{\phi(-t)\} \end{aligned}$$

□

Nota 6 Obsérvese con qué facilidad hemos podido demostrar el teorema de inversión para señales generalizadas, a pesar de lo difícil que fue su prueba para las señales ordinarias. Ahora bien: dicha simplicidad es engañosa puesto que nuestra prueba descansa sobre el hecho de que se conoce el teorema de inversión de Fourier para las funciones ϕ que están en la clase de Schwartz, que son señales ordinarias.

Ejemplo 3 Vamos a calcular la transformada de Fourier de la función delta de Dirac δ . Por definición, $\mathcal{F}(\delta)\{\phi\} = \delta\{\mathcal{F}(\phi)\} = \mathcal{F}(\phi)(0)$ y, por tanto,

$$\mathcal{F}(\delta)\{\phi\} = \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s) \cdot 1 ds = 1\{\phi\}.$$

para toda señal $\phi \in \mathbb{S}$. Por tanto, hemos demostrado que $\mathcal{F}(\delta) = 1$. Además, utilizando el teorema de inversión de Fourier, y el hecho de que δ es par, podemos afirmar que $\mathcal{F}(1)(t) = \widehat{\delta}(t) = 2\pi\delta(-t) = 2\pi\delta(t)$. Además, si consideramos las traslaciones de la señal delta de Dirac, $\delta_w(t) = \delta(t - w)$, entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\delta_w\{\phi\}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - w)\widehat{\phi}(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)\widehat{\phi}(s + w)ds \\ &= \widehat{\phi}(w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\phi(t)dt \\ &= (e^{-iwt})\{\phi\},\end{aligned}$$

es decir, $\widehat{\delta(\cdot - w)}(t) = \exp(-iwt)$.

Ejemplo 4 El ejemplo anterior sirve (entre otras cosas) para calcular la transformada de Fourier de una exponencial compleja, $x(t) = \exp(iwt)$. Para ello basta aplicar el Teorema 10, pues

$$\widehat{x}(t) = \widehat{\delta(\cdot - w)}(t) = 2\pi\delta(-t - w) = 2\pi\delta(t + w).$$

Ejemplo 5 Otro ejemplo importante es el cálculo de la transformada de Fourier del tren de impulsos $III\{\phi\}_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT)$. Claramente, $III_T\{\phi\} = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - nT))\{\phi\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\widehat{III_T\{\phi\}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta(\cdot - nT)}\{\phi\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-inTt)\{\phi\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(nT) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{2\pi}{T}n\right) \text{ (gracias a la Fórmula de Poisson (3)).} \\ &= \frac{2\pi}{T} III_{\frac{2\pi}{T}}\{\phi\}.\end{aligned}$$

Es decir, $\widehat{III_T} = \frac{2\pi}{T} III_{\frac{2\pi}{T}}$.

Teniendo en cuenta la conocida fórmula de derivación de Leibnitz,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)},$$

se puede demostrar que si la señal α satisface

$$\alpha^{(k)} \in \text{CSG} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

entonces, para toda señal $\phi \in \mathbb{S}$ se tiene que $\alpha\phi \in \mathbb{S}$. Veámoslo. Para ello, calculamos las derivadas

$$(\alpha\phi)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{(k)} \phi^{(n-k)}.$$

Como $\alpha^{(k)} \in \text{CSG}$ y $\phi^{(n-k)} \in \mathbb{S}$ para todo $k \leq n$, se tiene que las funciones $\alpha^{(k)} \phi^{(n-k)}$ pertenecen a \mathbb{S} para todo $k \leq n$ y, por tanto, también se tiene que $(\alpha\phi)^{(n)} \in \mathbb{S}$.

Obviamente, si la señal α satisface la condición (4), podemos definir para toda señal generalizada $x \in \mathbb{G}$, el producto generalizado

$$(\alpha \cdot x)\{\phi\} = x\{\phi \cdot \alpha\}.$$

Obviamente, si la señal α satisface la condición (4), podemos definir para toda señal generalizada $x \in \mathbb{G}$, el producto generalizado

$$(\alpha \cdot x)\{\phi\} = x\{\phi \cdot \alpha\}.$$

Por otra parte, la convolución de señales generalizadas se puede definir de la siguiente forma: Supongamos que las señales $\hat{\beta}, \hat{\beta}', \hat{\beta}'', \dots$ pertenecen a \mathbb{S} . Entonces, para toda señal $x \in \mathbb{G}$ se define el producto de convolución

$$(\beta * x)\{\phi\} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\phi * \tilde{\beta})(t) dt,$$

donde $\tilde{\beta}(t) := \beta(-t)$.

Vamos a probar que entonces se satisface la siguiente importante propiedad:

Teorema 11 (Producto y Convolución) Sean $\alpha(t)$ verificando (4) y $x \in \mathbb{G}$. Entonces

$$\widehat{\alpha \cdot x} = \frac{1}{2\pi} \hat{\alpha} * \hat{x}.$$

Demostración. Para empezar, si tenemos en cuenta que α verifica (4), entonces $\beta = \hat{\alpha}$ satisface las condiciones necesarias para definir el producto de convolución $\beta * x$, puesto que $\hat{\beta} = \hat{\hat{\alpha}} = 2\pi\tilde{\alpha}$.

Sea $\varphi \in \mathbb{S}$. Entonces, para toda señal $\phi \in \mathbb{S}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{(\varphi\alpha)}\{\phi\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi\alpha)(t)\hat{\phi}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)(\hat{\phi}(t)\varphi(t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) \widehat{(\phi * \tilde{\varphi})}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(t)(\phi * \hat{\varphi})(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}(t)(\phi * \tilde{\varphi})(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\alpha} * \hat{\varphi})(t)\phi(t) dt = \frac{1}{2\pi} (\hat{\alpha} * \hat{\varphi})\{\phi\} \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\widehat{\varphi\alpha} = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\alpha} * \widehat{\varphi})$ siempre que $\varphi \in \mathbb{S}$. En particular, hemos dado una prueba explícita de que para toda señal $\varphi \in \mathbb{S}$ se tiene que $\varphi * \tilde{\alpha} \in \mathbb{S}$ y, por tanto, el producto de convolución $\widehat{\alpha} * \widehat{x}\{\phi\}$ está bien definido.

Terminamos la demostración calculando $\widehat{\alpha \cdot x}\{\phi\}$ explícitamente:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha \cdot x}\{\phi\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\alpha(t)\widehat{\phi}(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)(\widehat{\phi}(t)x(t))dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\widehat{(\phi * \tilde{x})}(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\alpha}(t)(\phi * \tilde{x})(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\alpha}(t)(\phi * \tilde{x})(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{\alpha} * \widehat{x})(t)\phi(t)dt = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\alpha} * \widehat{x})\{\phi\} \end{aligned}$$

□

3. Transformada de Fourier y sistemas LTI: diferentes tipos de filtros

Ya sabemos que una clase amplia de filtros se pueden representar a través de la convolución contra la respuesta del sistema LTI al impulso unidad (i.e., $Lx = x * h$, donde $h = L\delta$). Si tomamos la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad, obtenemos que el sistema LTI se puede representar en el dominio de la frecuencia como

$$\widehat{y} = \mathcal{F}(Lx) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(h) = \widehat{x} \cdot \widehat{h}$$

Generalmente, se emplea la notación siguiente: $X(w) = \widehat{x}(w)$ representa la entrada del sistema e $Y(w) = \widehat{y}(w)$ representa la salida del sistema (ambas en el dominio de la frecuencia). En tal caso, la señal $H(w) = \widehat{h}(w)$ caracteriza completamente el sistema (en el dominio de la frecuencia). La señal $H(w)$ recibe el nombre de **función de transferencia del sistema**. Evidentemente, la fórmula

$$Y(w) = X(w)H(w),$$

que describe completamente el sistema en el dominio de la frecuencia, es más sencilla (en principio) que la correspondiente fórmula en el dominio del tiempo. Esto, además, posee importantes aplicaciones para el diseño de filtros: veamos por qué.

Consideremos la señal exponencial truncada:

$$x_T(t) = e^{i\omega t} \chi_{[-T, T]}(t) = \begin{cases} e^{i\omega t} & |t| \leq T \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y sea L un filtro con respuesta al impulso unidad dada por $(L\delta)(t) = h(t)$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (Lx_T)(t) &= (x_T * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t-s)h(s)ds \\ &= \int_{T-t}^{T+t} e^{i\omega(t-s)}h(s)ds \\ &= e^{i\omega t} \int_{T-t}^{T+t} e^{-i\omega s}h(s)ds \end{aligned}$$

Si ahora tomamos límite $T \rightarrow \infty$ en ambos miembros de la igualdad, entonces obtenemos que

$$L(e^{i\omega t})(t) = \widehat{h}(\omega)e^{i\omega t}.$$

Es decir: $e^{i\omega t}$ es un autovector del operador L y su autovalor asociado es precisamente $H(\omega) = \widehat{h}(\omega)$. Esto nos lleva a considerar el siguiente concepto:

Definición 5 Sea $H(\omega) = A(\omega)e^{-i\Phi(\omega)}$ la función de transferencia del filtro L , donde se supone que $A(\omega) \geq 0$ y $\Phi(\omega) \in \mathbb{R}$ para todo ω . Entonces llamamos **espectro de amplitud del sistema** a la función $A(\omega)$ y **espectro de fase** a la función $\Phi(\omega)$. Decimos que el sistema no produce **distorsión en las amplitudes** si la función $A(\omega) = A_0 > 0$ es constante. Decimos que el filtro produce un **desplazamiento en la fase** si la función $\Phi(\omega)$ es lineal, $\Phi(\omega) = \omega t_0$. En tal caso, decimos que el filtro es **ideal**, ya que no produce distorsión en la fase.

Una propiedad sencilla de los espectros de fase y de amplitud de un filtro, es la siguiente:

Teorema 12 Supongamos que $h(t) = (L\delta)(t)$, la respuesta al impulso unidad es una señal real. Entonces el espectro de amplitudes del sistema es una función par y el espectro de frecuencias del sistema es una función impar.

Demostración. Como $H(\omega) = A(\omega)e^{-i\Phi(\omega)} = \widehat{h}(\omega)$, tenemos que

$$\overline{H(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s}h(s)ds} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s}h(s)ds = H(-\omega).$$

Por tanto,

$$\overline{A(\omega)e^{-i\Phi(\omega)}} = A(\omega)e^{i\Phi(\omega)} = \overline{H(\omega)} = H(-\omega) = A(-\omega)e^{-i\Phi(-\omega)},$$

lo que nos lleva a las igualdades

$$\begin{cases} A(\omega) = A(-\omega) & (\text{i.e., } A \text{ es par}) \\ \Phi(-\omega) = -\Phi(\omega) & (\text{i.e., } \Phi \text{ es impar}), \end{cases}$$

que es lo que queríamos probar. \square

A continuación, vamos a describir la construcción de algunos tipos (importantes) de filtros ideales:

3.0.1. Filtros ideales paso bajo

En el caso de un filtro ideal paso-bajo queremos eliminar la influencia de todas las frecuencias w que sobrepasen en amplitud una frecuencia dada (i.e., con $|w| \geq w_0$ para cierto valor fijo $w_0 > 0$), y no distorsionar la influencia de las frecuencias w que satisfacen $|w| < w_0$. Como el filtro es ideal, tendremos que $\Phi(w) = wt_0$ para cierto t_0 fijo. Ambas exigencias nos llevan derechos a la expresión

$$H_{w_0}(w) = \begin{cases} e^{-iwt_0} & |w| \leq w_0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} .$$

Como $H(w) = \widehat{h}(w)$, podemos usar el teorema de inversión de la transformada de Fourier para obtener que la respuesta al impulso unidad del correspondiente sistema LTI viene dada por

$$\begin{aligned} h_{w_0}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{w_0}(w) e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-w_0}^{w_0} e^{iw(t-t_0)} dw \\ &= \frac{\sin(w_0(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} \end{aligned}$$

y, por tanto, nuestro filtro está dado por

$$L_{w_0}(x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \frac{\sin(w_0(t-s-t_0))}{\pi(t-s-t_0)} ds$$

3.0.2. Filtros ideales paso todo

En el caso de un filtro ideal paso-todo, no deseamos ningún tipo de distorsión sobre el espectro de amplitudes o el espectro de fases. Esto significa que podríamos tomar como filtro paso todo el sistema L obtenido como límite del sistema L_{w_0} calculado en el apartado anterior, para $w_0 \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} (Lx)(t) &= \lim_{w_0 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \frac{\sin(w_0(t-s-t_0))}{\pi(t-s-t_0)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t-t_0-s) ds = x(t-t_0) \end{aligned}$$

Esto demuestra que los únicos filtros ideales paso-todo que existen son las traslaciones en el tiempo.

3.0.3. Filtros ideales paso alto

Denotemos por S_{w_0} un filtro ideal que elimine todas las componentes de frecuencia de la señal para frecuencias que satisfacen $|w| < w_0$ para cierto w_0 fijo, pero deje intactas las componentes de frecuencia $|w| \geq w_0$ (diremos entonces que S_{w_0} es un filtro ideal paso alto) y sea L_{w_0} el filtro paso bajo descrito anteriormente. Entonces $S_{w_0} + L_{w_0}$ es forzosamente un filtro paso todo y, por tanto, $(S_{w_0}x)(t) = x(t-t_0) - (L_{w_0}x)(t)$ para cierta elección de t_0 .

3.0.4. Filtros ideales de banda estrecha

En muchas aplicaciones queremos eliminar todas las componentes de frecuencia de una señal excepto aquellas que están muy cerca de una componente de frecuencia prefijada, $w_c \neq 0$. Para ello, fijamos un valor pequeño $w_0 \ll w_c$ y entendemos como frecuencias cercanas a w_c aquellas para las que $|w - w_c| < w_0$. Como el espectro de amplitudes es par (estamos tratando con señales reales), el comportamiento cerca de $-w_c$ está sujeto a la relación $A(-w) = A(w)$. Como de todas formas queremos que el filtro sea ideal, la correspondiente función de transferencia debe ser forzosamente de la forma

$$H_{w_c, w_0}(w) = \begin{cases} e^{-iwt_0} & \text{si } \text{máx}\{|w - w_c|, |w + w_c|\} \leq w_0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

La respuesta al impulso unidad es, por tanto:

$$\begin{aligned} h_{w_c, w_0}(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{w_c, w_0}(w) e^{iwt} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-w_c - w_0}^{-w_c + w_0} e^{iw(t-t_0)} dw + \frac{1}{2\pi} \int_{w_c - w_0}^{w_c + w_0} e^{iw(t-t_0)} dw \\ &= \frac{1}{\pi(t-t_0)} \{ \sin((w_c + w_0)(t-t_0)) - \sin((w_c - w_0)(t-t_0)) \} \\ &= \frac{1}{\pi(t-t_0)} \sin(w_c(t-t_0)) \cos(w_0(t-t_0)). \end{aligned}$$

Nota: Como se habrá observado, los filtros ideales tienen el problema de ser sistemas no causales y, por tanto, ser físicamente irrealizables. En la práctica aparece, por tanto, el siguiente importante problema: buscar aproximaciones razonablemente buenas a los diferentes tipos de filtros ideales (i.e., a las funciones de transferencia de dichos filtros) mediante el uso de funciones de transferencia que se correspondan con filtros causales. Este problema no es en absoluto sencillo de resolver (ni existe, por el momento, una solución óptima del mismo) y, debido a la naturaleza elemental de estas notas, no abordamos su solución aquí.

4. Transformada de Laplace

4.1. Algunas limitaciones de la Transformada de Fourier

Como ya hemos comentado anteriormente, una de las limitaciones más significativas de la Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(x)(\xi) := \hat{x}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-i\xi s} ds$$

es que para garantizar su existencia (cuando consideramos señales que son funciones en el sentido ordinario del término), necesitamos exigir que la señal $x(t)$ sea absolutamente integrable, ya que, al ser $\xi \in \mathbb{R}$, se tiene que $|e^{-i\xi s}| = 1$ para toda elección de $s \in \mathbb{R}$. Si suponemos que nuestra señal es causal (i.e., $x(t) = 0$ para $t < 0$) y permitimos que ξ tome valores complejos, la situación cambia, puesto que

$$|e^{-zt}| = |e^{-(t\text{Re}z + i\text{Im}z)}| = |e^{-t\text{Re}z}|$$

es una función absolutamente integrable en $(0, \infty)$ si $\operatorname{Re} z > 0$ y, por tanto,

$$\mathcal{L}(x)(z) := \mathcal{F}(x)(-iz) = \int_0^{\infty} x(s)e^{-zs} ds$$

converge incluso para funciones no acotadas $x(t)$.

Definición 6 Dada la señal $x(t)$, su **transformada de Laplace**⁴ es la función de variable compleja

$$\mathcal{L}(x)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zs} x(s) ds; z \in \Omega,$$

donde $\Omega \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de puntos del plano complejo para los que la integral del segundo miembro de la fórmula anterior es convergente.

En algunos textos se llama transformada de Laplace unilateral a la transformada que acabamos de definir y se define la transformada de Laplace tomando la integral en toda la recta real. Para nosotros, la transformada

$$\mathcal{L}_b(x)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zs} x(s) ds$$

recibe el nombre de **transformada de Laplace bilateral**.

4.2. Propiedades elementales de la transformada de Laplace

Antes de describir las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6 Tomamos $x(t) = u(t)$, la función escalón unidad. Entonces

$$\mathcal{L}(x)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zs} ds = \lim_{L \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-zs}}{-z} \right]_{s=0}^{s=L} = \frac{1}{z}, \text{ para } z > 0.$$

Si $z < 0$, entonces la integral impropia anterior es divergente y, por tanto, no existe transformada de Laplace en dichos valores.

Ejemplo 7 Tomamos $x(t) = \exp(at)$ ($a \in \mathbb{R}$). Entonces

$$\mathcal{L}(x)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zs} e^{as} ds = \lim_{L \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{(a-z)s}}{a-z} \right]_{s=0}^{s=L} = \frac{1}{z-a}, \text{ para } z > 0.$$

⁴P. S. Laplace (1749-1827). Matemático francés. En palabras del profesor Solomon Bochner (ver [?]), podemos afirmar que Laplace dominó la matemática, astronomía, física y teoría de probabilidades de su época, y contribuyó a todas ellas. De origen social modesto, comenzó como protegido de D'Alembert. Sus resultados más importantes fueron: una hipótesis cosmológica, la revisión de la fórmula de Newton para la propagación del sonido; una memoria con Lavoisier sobre aspectos cuantitativos de la química y la introducción de las integrales de Laplace como funciones generatrices en la teoría de la probabilidad.

Ejemplo 8 Tomamos $x(t) = \sin(at)$. Entonces podemos utilizar que $\sin(at) = \frac{\exp(iat) - \exp(-iat)}{2i}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zs} \sin(as) ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-zs} \frac{\exp(ias) - \exp(-ias)}{2i} ds \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{\exp(iat)}{2i}\right)(z) - \mathcal{L}\left(\frac{\exp(-iat)}{2i}\right)(z) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - ia} - \frac{1}{z + ia} \right) \\ &= \frac{a}{z^2 + a^2} \text{ (para } z > 0). \end{aligned}$$

Ejemplo 9 Tomamos $x(t) = \cos(at)$. Entonces podemos utilizar que $\cos(at) = \frac{\exp(iat) + \exp(-iat)}{2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zs} \cos(as) ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{-zs} \frac{\exp(ias) + \exp(-ias)}{2} ds \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{\exp(iat)}{2}\right)(z) + \mathcal{L}\left(\frac{\exp(-iat)}{2}\right)(z) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - ia} + \frac{1}{z + ia} \right) \\ &= \frac{z}{z^2 + a^2} \text{ (para } z > 0). \end{aligned}$$

Ejemplo 10 Consideremos ahora la transformada de Laplace de una función $x(t)$ continua a trozos y T -periódica. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(z) &= \int_0^{\infty} e^{-zs} x(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-zs} x(s) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T e^{-z(u+kT)} x(u) du \text{ (donde } s = u + kT) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-zT})^k \right) \int_0^T e^{-zu} x(u) du \\ &= \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T e^{-zu} x(u) du. \end{aligned}$$

Podemos probar fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 4 Sea $x(t)$ una señal causal continua a trozos con valores reales o complejos. Si existen constantes a y K tales que

$$|x(t)| \leq K \exp(at), \text{ para todo } t \geq 0$$

entonces $\mathcal{L}(x)(z)$ está bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(z) > a$.

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(x)(z)| &\leq \int_0^\infty |e^{-zs}x(s)| ds \\ &= \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}(z)s} |x(s)| ds \leq K \int_0^\infty e^{(a-\operatorname{Re}(z))s} ds \\ &= \frac{K}{\operatorname{Re}(z) - a} \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > a$. \square

La transformada de Laplace posee numerosas propiedades algebraicas, como la transformada de Fourier, y es precisamente en base a dichas propiedades, y a que ésta se puede aplicar a funciones no absolutamente integrables, que dicha transformada resulta de gran utilidad para las aplicaciones.

A continuación escribimos una lista de las propiedades más importantes de \mathcal{L} . Algunas propiedades las demostramos, pero otras las dejamos como ejercicio.

- **Linealidad.** La transformada de Laplace es un operador lineal. Es decir, si $\mathcal{L}(x_i)(z)$ existe para valores $z \in \Omega_i$ ($i = 1, 2$), y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\mathcal{L}(ax_1 + bx_2)(z)$ existe para $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, y

$$\mathcal{L}(ax_1 + bx_2)(z) = a\mathcal{L}(x_1)(z) + b\mathcal{L}(x_2)(z).$$

- **Transformada de Laplace y desplazamientos** Se satisface la fórmula:

$$\mathcal{L}(\exp(-bt)x(t))(z) = \mathcal{L}(x)(z + b).$$

Además, si $u(t)$ denota la función salto unidad, entonces

$$\mathcal{L}(u(t - t_0)x(t - t_0))(z) = e^{-zt_0} \mathcal{L}(x)(z).$$

- **Transformada de Laplace de la derivada.** Supongamos que $x(t)$ es derivable y admite transformada de Laplace. Entonces se satisface la igualdad:

$$\mathcal{L}(x')(z) = z\mathcal{L}(x)(z) - x(0)$$

Demostración. Basta utilizar el método de integración por partes para el cálculo de $\mathcal{L}(x')$. De hecho,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x')(z) &= \int_0^\infty e^{-zs}x'(s)ds = x(s) \frac{-e^{-zs}}{z} \Big|_{s=0}^{s=\infty} + z \int_0^\infty e^{-zs}x(s)ds \\ &= z\mathcal{L}(x)(z) - x(0). \quad \square \end{aligned}$$

La propiedad de la derivada se puede generalizar de la siguiente forma:

Teorema 13 Supongamos que $x(t)$ es de clase al menos $\mathbf{C}^{(n)}$. Entonces se satisface la fórmula siguiente:

$$\mathcal{L}(x^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(x)(z) - z^{n-1}x(0) - z^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

Demostración. La prueba se hace por inducción sobre n . Para $n = 1$ se trata de la fórmula que acabamos de probar. Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^{(n)})(z) &= x^{(n-1)}(0) - z\mathcal{L}(x^{(n-1)})(z) \\ &= z(z^{n-1}\mathcal{L}(x)(z) - z^{n-2}x(0) - z^{n-3}x'(0) - \dots - x^{(n-2)}(0)) \\ &\quad - \{z^n\mathcal{L}(x)(z) - z^{n-1}x(0) - z^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)\}_{|z=0} \\ &= z^n\mathcal{L}(x)(z) - z^{n-1}x(0) - z^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

- **Multiplicación por t^n .** Se satisface la siguiente fórmula:

$$\mathcal{L}(t^n x(t))(z) = (-1)^n (\mathcal{L}(f)(z))^{(n)}$$

- **Propiedad del valor inicial.** Supongamos que $x'(t)$ tiene transformada de Laplace, entonces se satisface la fórmula:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z\mathcal{L}(x)(z) = x(0^+)$$

Demostración. Consideramos la transformada de Laplace de la señal $x'(t)$. Sabemos que

$$\mathcal{L}(x'(t))(z) = x(0^+) - z\mathcal{L}(x)(z)$$

Ahora bien, es claro que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{L}(x'(t)) = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-zs} x'(s) ds = 0,$$

pues e^{-zs} converge a cero para $z \rightarrow \infty$. Se sigue que $x(0^+) = \lim_{z \rightarrow \infty} z\mathcal{L}(x)(z)$. \square

- **Propiedad del valor final.** Supongamos que $x'(t)$ tiene transformada de Laplace, entonces se satisface la fórmula:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\mathcal{L}(x)(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

Demostración. En este caso utilizamos la fórmula

$$\mathcal{L}(x'(t))(z) = x(0^+) - z\mathcal{L}(x)(z)$$

tomando límite para $z \rightarrow 0$. Como $\lim_{z \rightarrow 0} e^{-zs} = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} (x(0^+) - z\mathcal{L}(x)(z)) &= \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{L}(x'(t))(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-zs} x'(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} x'(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0^+), \end{aligned}$$

de donde se sigue la fórmula que queríamos demostrar. \square

Es evidente que podemos ayudarnos de las propiedades de la transformada de Laplace que acabamos de demostrar para realizar el cálculo de nuevas transformadas de Laplace. En realidad, podríamos decir que el cálculo de transformadas integrales tiene una metodología similar a la que se emplea en un primer curso de cálculo para hallar integrales indefinidas. De hecho, lo usual en este punto es dedicar algún tiempo al manejo de la transformada de Laplace a través del uso de las propiedades anteriores, proponiendo al alumno una lista de funciones cuya transformada debe calcular.

4.3. Transformada de Laplace inversa

En esta sección estamos interesados en el proceso de inversión de la transformada de Laplace. Evidentemente, esta transformada perdería su utilidad si no fuese posible calcular su transformada inversa. Sin embargo, veremos que el proceso de inversión es mucho más complejo que en el caso de la transformada de Fourier.

Comenzamos con el siguiente resultado:

Teorema 14 *Supongamos que $e^{-at}x(t)$ es continua a trozos y absolutamente integrable en $[0, \infty)$. Entonces $\mathcal{L}(x)(z)$ es una función analítica en el semiplano $H_a = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > a\}$.*

Demostración. Basta utilizar el Teorema 6. \square

Este resultado es importante por varias razones. Por ejemplo, si tenemos en cuenta que una función analítica queda determinada completamente una vez se conoce sobre un conjunto que posea puntos de acumulación interiores a su dominio de definición (esto es el conocido **principio de identidad** que se da en cualquier curso de introducción a las funciones de una variable compleja), entonces resulta evidente que la transformada de Laplace queda completamente determinada por las expresiones que se calculen para valores reales de z . En realidad, esto es algo que hemos utilizado para todos los cálculos que se han hecho anteriormente.

Ahora estamos en condiciones de definir la transformada inversa de Laplace. Como en el caso de la transformada de Fourier, la posibilidad de invertir la transformada de Laplace de una señal $x(t)$, depende de ciertas propiedades de suavidad de $x(t)$. Así pues, el teorema análogo al teorema integral de Fourier es, en este caso, el siguiente resultado:

Teorema 15 (Transformada de Laplace inversa) *Supongamos que $x(t)$ es continua, satisface $e^{-at}x(t) \in L^1([0, \infty))$, y sus derivadas unilaterales existen para todo valor de t . Sea $X(z) = \mathcal{L}(x)(z)$ ($\operatorname{Re}(z) > a$) la transformada de Laplace de $x(t)$. Entonces*

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} e^{zt} X(z) dz,$$

para todos los valores $t > 0$ y $s > a$.

Nota 7 *Obsérvese que la integral que aparece en el teorema anterior se toma sobre la recta $L_s = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = s\}$, con $s > a$ arbitrariamente elegido. Al tomar $s > a$, dicha recta está contenida en el dominio de holomorfía de $X(z)$ y, por tanto, no depende de la elección del valor s . Esta fórmula recibe también el nombre de fórmula de inversión de Mellin-Fourier.*

Demostración. Vamos a basar nuestra prueba en el teorema integral de Fourier. Consideramos $s > a$ fijo, y definimos la función $Y(v) = X(s + iv)$, $v \in \mathbb{R}$. Entonces

$$Y(v) = \int_0^{\infty} e^{-(s+iv)t} x(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-ivt} [e^{-st} x(t)] dt = \hat{y}(v),$$

donde

$$y(t) = \begin{cases} e^{-st} x(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ahora bien, las hipótesis sobre $x(t)$ pasan a verificarse para la señal $y(t)$ y, por tanto, podemos aplicar el teorema integral de Fourier:

$$y(t) = \text{p.v.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} \hat{y}(v) dv = \text{p.v.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} Y(v) dv, \text{ para todo } t \neq 0.$$

Se sigue que, para $t > 0$,

$$e^{-st} x(t) = \text{p.v.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivt} X(s + iv) dv$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{p.v.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+iv)t} X(s + iv) dv \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} e^{zt} X(z) dz, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

Ya sabemos en qué condiciones es posible invertir la transformada de Laplace. Ahora bien, el cálculo de la transformada inversa de Laplace no es en general sencillo. Dedicamos el resto de esta sección al estudio de algunos casos concretos en los que la transformada \mathcal{L}^{-1} se puede calcular explícitamente. En particular, vamos a suponer que $X(z) = \mathcal{L}(x)(z)$ es una función con un número finito de singularidades y vamos a utilizar el teorema del residuo para el cálculo de $x(t)$. Un caso particular, de especial importancia, es cuando $X(z)$ es una función racional.

Supongamos, pues, que $X(z) = \mathcal{L}(x)(z)$ es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ y que $\text{Re}(z_i) < a$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $s > a$ y sea $R > 0$ un número real lo bastante grande como para garantizar que el semicírculo derecho de centro $(s, 0)$ y radio R contiene en su interior todos los $\{z_i\}_{i=1}^n$. Denotemos por $\gamma_R = I_R + C_R$ la curva que parametriza el borde de dicho semicírculo, orientada contra el sentido de las agujas del reloj (donde I_R representa el trozo de dicha parametrización que cubre el segmento $\{s\} \times [-R, R]$, y C_R parametriza el resto del borde). Podemos aplicar entonces el teorema de los residuos, para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{zt} X(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{zt} X(z); z_j).$$

(Evidentemente, esta identidad se alcanza independientemente de R , para R suficientemente grande). Por tanto, si reescribimos la integral del miembro de la izquierda de la igualdad como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{zt} X(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_R} e^{zt} X(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} e^{zt} X(z) dz$$

podemos concluir que, si fuese cierto que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{zt} X(z) dz = 0 \tag{5}$$

entonces tendríamos que la fórmula

$$x(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} e^{zt} X(z) dz = \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{zt} X(z); z_j).$$

proporcionaría un cálculo explícito de la transformada de Laplace inversa para la función $X(z)$.

El siguiente resultado nos muestra ciertas condiciones suficientes para que la fórmula anterior sea verdadera:

Teorema 16 Sea $X(z) = \mathcal{L}(x)(z)$ una función analítica en todo \mathbb{C} excepto quizás en un número finito de puntos y sea $\gamma_R = I_R + C_R$ como antes. Si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R} |X(z)| = 0,$$

entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{zt} X(z) dz = 0$$

y, por tanto,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X)(t) = \sum_{j=1}^n \text{Res}(e^{zt} X(z); z_j).$$

El teorema anterior se puede aplicar para el estudio de la transformada de Laplace inversa de cualquier función racional, $X(z) = p(z)/q(z)$, con $\deg p < \deg q$, pues en tal caso se tiene que $X(z)$ sólo tiene como posibles singularidades los ceros de $q(z)$ (que son a lo sumo $\deg q$) y $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{|z| > R} |X(z)| = 0$.

Un caso particular que se puede estudiar fácilmente es el descrito por el siguiente resultado:

Teorema 17 Supongamos que $X(z) = \mathcal{L}(x)(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $\deg p < \deg q$ y $q(z) = a(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_m)$, con $\alpha_i \neq \alpha_j$ para $i \neq j$. Entonces

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X)(t) = \sum_{k=1}^m \frac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}.$$

Demostración. Sabemos que

$$x(t) = \sum_{j=k}^m \text{Res}\left(\frac{e^{zt} p(z)}{q(z)}; \alpha_k\right).$$

Por tanto, sólo necesitamos calcular los residuos $\text{Res}\left(\frac{e^{zt} p(z)}{q(z)}; \alpha_k\right)$, $k = 1, \dots, m$. Vamos a suponer que todos los ceros de $q(z)$ son polos de orden uno de $\frac{p(z)}{q(z)}$ (y, por tanto, polos de orden uno de $Y(z) = e^{zt} \frac{p(z)}{q(z)}$, pues e^{zt} es una función entera para todo $t > 0$). Ahora bien, sabemos que si la función $X(z)$ posee un polo de orden m en $z = \alpha$ entonces

$$\text{Res}(X(z); \alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha_k} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - \alpha)^m X(z)).$$

En nuestro caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}p(z)}{q(z)}; \alpha_k\right) &= \lim_{z \rightarrow \alpha_k} (z - \alpha_k) e^{zt} \frac{p(z)}{q(z)} \\
 &= \lim_{z \rightarrow \alpha_k} e^{zt} p(z) \frac{z - \alpha_k}{q(z) - q(\alpha_k)} \\
 &= e^{\alpha_k t} p(\alpha_k) \lim_{z \rightarrow \alpha_k} \left(\frac{q(z) - q(\alpha_k)}{z - \alpha_k} \right)^{-1} \\
 &= e^{\alpha_k t} p(\alpha_k) \frac{1}{q'(\alpha_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Si $p(\alpha_k) = 0$ entonces la función que estamos considerando tiene una singularidad evitable en α_k y, por tanto, el correspondiente residuo es cero. Por otra parte, el correspondiente sumando que aparece en el segundo miembro de la fórmula que estamos considerando, también será igual a cero si $p(z)$ se anula en α_k . Esto finaliza la demostración. \square

En realidad, no es difícil proporcionar un resultado general para el cálculo de $\mathcal{L}^{-1}(p(z)/q(z))$ para funciones racionales con $\deg p < \deg q$. A continuación vamos a realizar dicho cálculo utilizando la descomposición en fracciones simples de dichas funciones racionales y dejamos como ejercicio la comprobación de que las fórmulas que se obtienen por ambos métodos coinciden.

Así pues, dada una función racional $\frac{p(z)}{q(z)}$, podemos hallar su **descomposición como suma de fracciones simples**⁵ como sigue:

- Comenzamos suponiendo (sin pérdida de generalidad), que p y q no tienen ceros en común. Si $\deg p \geq \deg q$, utilizamos el algoritmo de división euclídea para polinomios, dividiendo p por q . Se sigue que $p(z) = q(z)c(z) + r(z)$ con $\deg r < \deg q$, y, por tanto, $\frac{p(z)}{q(z)} = c(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$. Esto reduce todos los casos al caso en que $\deg p < \deg q$.
- Podemos suponer, pues, sin pérdida de generalidad que q es mónico y $\deg p < \deg q$. Si $q(z) = (z - \alpha_1)^{m_1} (z - \alpha_2)^{m_2} \dots (z - \alpha_k)^{m_k}$, donde se supone que todos los α_i son distintos, entonces podemos encontrar constantes $\{C_{i,j}\}_{i \leq k, j \leq m_i} \subset \mathbb{C}$ tales que

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{i,j}}{(z - \alpha_i)^j}.$$

Demostración. Podemos hacer lo siguiente: si $q(z) = (z - \alpha)^m h(z)$, con $q(\alpha) = 0$ y $h(\alpha) \neq 0$, entonces buscamos una constante C y un polinomio $s(z)$ de grado menor que $\deg p$ tales que

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z - \alpha)^m h(z)} = \frac{C}{(z - \alpha)^m} + \frac{s(z)}{(z - \alpha)^{m-1} h(z)}.$$

Si conseguimos hacer esto, entonces podremos continuar el algoritmo, aplicando la misma operación a $\frac{s(z)}{(z - \alpha)^{m-1} h(z)}$, y terminaremos obteniendo la expresión que buscábamos en un número finito de pasos.

⁵El cálculo de la descomposición en fracciones simples de una función racional aparece, por primera vez, en la correspondencia entre J. Bernoulli y Leibnitz, alrededor de 1700, pero estas ideas fueron explotadas sistemáticamente por J. Bernoulli (1702), Leibnitz (1702), Euler (1768) y Hermite (1873). En particular, se suele llamar método de Hermite al método de integración de funciones racionales basado en dicha descomposición.

Ahora bien, si la ecuación anterior se puede resolver para ciertos C y $s(z)$, entonces

$$p(z) = Ch(z) + s(z)(z - \alpha)$$

y, por tanto, $C = \frac{p(\alpha)}{h(\alpha)}$, y $s(z)$ se obtiene de dividir $p(z) - \frac{p(\alpha)}{h(\alpha)}$ por $x - \alpha$. Esto finaliza la prueba.
□

De esta forma, se ha reducido el cálculo de la transformada de Laplace inversa para la fracción $\frac{p(z)}{q(z)}$ al cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{(z-\alpha)^m}\right)$ para $m \geq 0$ y $\alpha, C \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

Ahora bien, si tenemos en cuenta que

$$\mathcal{L}(t^n \exp(\alpha t)) = \frac{n!}{(z - \alpha)^{n+1}}, \text{ para } |z| > |\alpha|,$$

se concluye que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{(z - \alpha)^m}\right) = \frac{C}{n!} t^n \exp(\alpha t)$$

y, por tanto, si

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{i,j}}{(z - \alpha_i)^j}.$$

es la descomposición en fracciones simples de $\frac{p(z)}{q(z)}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p(z)}{q(z)}\right) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C_{i,j}}{(z - \alpha_i)^j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{i,j}}{j!} t^j \exp(\alpha_i t) \end{aligned}$$

Este resultado es muy importante. En concreto, en la próxima sección podremos comprobar que de él depende el poder resolver ciertas ecuaciones diferenciales que aparecen frecuentemente en la práctica. Por supuesto, una vez sabemos que las descomposiciones en fracciones simples existen, nos resultará imprescindible encontrar algún mecanismo sencillo para su cálculo.

Ahora bien, si multiplicamos $\frac{p(z)}{q(z)}$ por $(z - \alpha_{i_0})^{m_{i_0}}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} &(z - \alpha_{i_0})^{m_{i_0}} \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \sum_{i \leq k; i \neq i_0} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{i,j} (z - \alpha_{i_0})^{m_{i_0}}}{(z - \alpha_i)^j} + \sum_{j=1}^{m_{i_0}} C_{i_0,j} (z - \alpha_{i_0})^{m_{i_0}-j} \\ &= \sum_{i \leq k; i \neq i_0} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{i,j} (z - \alpha_{i_0})^{m_{i_0}}}{(z - \alpha_i)^j} + \sum_{t=1}^{m_{i_0}} C_{i_0, m_{i_0}-t} (z - \alpha_{i_0})^t \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$C_{i_0, m_{i_0} - k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left((z - \alpha_{i_0})^{m_{i_0}} \frac{p(z)}{q(z)} \right) \Big|_{z=\alpha_{i_0}} ; \text{ para } k = 0, 1, \dots, m_{i_0}$$

De esta forma podremos calcular todas las constantes $C_{i,j}$, una vez conocidos los polos de $\frac{p(z)}{q(z)}$.

4.4. Transformada de Laplace y EDO's

Comenzamos esta sección desarrollando los cálculos para abordar la solución del problema de valores iniciales dado por

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

(donde a, b, c, y_0 , e y_1 son constantes dadas de antemano y buscamos la función $y = y(t)$ que verifica la ecuación anterior para todo $t > 0$), mediante el uso de la transformada de Laplace. Posteriormente, explicamos el método para atacar problemas lineales con coeficientes constantes, en el caso general.

Como todo el mundo sabe, este tipo de ecuaciones diferenciales aparecen en muchos contextos y son, por tanto muy útiles.

Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación anterior, y tenemos en cuenta las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y') &= z\mathcal{L}(y)(z) - y(0) \\ \mathcal{L}(y'') &= z^2\mathcal{L}(y)(z) - zy'(0) - y(0) \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(ay'' + by' + cy)(z) \\ &= a(z^2\mathcal{L}(y)(z) - zy'(0) - y(0)) + b(z\mathcal{L}(y)(z) - y(0)) + c\mathcal{L}(y)(z) \\ &= (az^2 + bz + c)\mathcal{L}(y)(z) - (az + b)y_0 - ay_1 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{L}(y)(z) = y_0 \frac{az + b}{az^2 + bz + c} + y_1 \frac{a}{az^2 + bz + c}$$

Ahora bien, \mathcal{L} es un operador lineal y, por tanto, si \mathcal{L} tuviese un operador inverso, \mathcal{L}^{-1} , éste sería lineal. Vamos a suponer momentáneamente que tal es el caso. Entonces la expresión anterior la podríamos reescribir como:

$$y(z) = y_0 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{az + b}{az^2 + bz + c} \right) + y_1 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{a}{az^2 + bz + c} \right)$$

en realidad, si definimos las funciones $F(z) = \frac{az+b}{az^2+bz+c}$ y $G(z) = \frac{a}{az^2+bz+c}$, necesitamos encontrar las funciones $\mathcal{L}^{-1}(F)$ y $\mathcal{L}^{-1}(G)$ de modo que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(0) = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}(F)'(0) = 0$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}(G)(0) = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}(G)'(0) = 0.$$

Para realizar los cálculos que faltan, es necesario distinguir varios casos, que dependen de cómo son los ceros de $q(z) = az^2 + bz + c$:

- **Caso 1: Los ceros de $q(z)$ son simples.** Esto significa que $q(z) = a(z - \alpha)(z - \beta)$ y, por tanto, $F(z)$ (y también $G(z)$) se puede descomponer en fracciones simples como sigue:

$$F(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \beta}$$

para ciertas constantes $A, B \in \mathbb{C}$. Se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}.$$

- **Caso 2: $q(z)$ tiene un cero doble.** Esto implica que $q(z) = a(z - \alpha)^2$ para cierto número real α y, por tanto, $F(z)$ (y también $G(z)$) se descompone ahora como

$$F(z) = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{(z - \alpha)^2}$$

para ciertas constantes A, B . Se sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = Ae^{\alpha t} + Bte^{\alpha t}.$$

- **Caso 3: Los ceros de $q(z)$ son complejos conjugados.** En este caso, podemos encontrar $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ tal que $q(z) = a(z - (\alpha + i\beta))(z - (\alpha - i\beta))$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\beta \neq 0$ y, por tanto, $F(z)$ (también $G(z)$) se descompone como

$$F(z) = \frac{A\beta}{(z - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B(z - \alpha)}{(z - \alpha)^2 + \beta^2}$$

Ahora la transformada de Laplace inversa queda como:

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = Ae^{\alpha t} \sin \beta t + Be^{\alpha t} \cos \beta t.$$

4.4.1. El caso general

Consideremos ahora la EDO

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = \varphi(t), \text{ para } t > 0, \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Queremos utilizar la transformada de Laplace para su solución. Para ello, empezamos aplicando el operador \mathcal{L} a ambos lados de la ecuación. Se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi)(z) &= z^n \mathcal{L}(y)(z) - z^{n-1}y(0) - z^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) + \\ &+ a_{n-1}[z^{n-1} \mathcal{L}(y)(z) - z^{n-2}y(0) - z^{n-3}y'(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \\ &\quad + \dots \dots \dots + \\ &\quad + a_1[\mathcal{L}(y)(z) - y(0)] + \\ &\quad + a_0 \mathcal{L}(y)(z) \end{aligned}$$

Agrupando los términos convenientemente, resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y)(z)[z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0] = \\ \mathcal{L}(\varphi)(z) + y(0)[z^n + a_{n-1}z^{n-2} + \dots + a_2z + a_1] + \\ + y'(0)[z^n + a_{n-2}z^{n-1} + \dots + a_3z + a_2] \\ + \dots \dots \dots + \\ + y^{(n-2)}(0)[z + a_{n-1}] \\ + y^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

Tomando $q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, la ecuación anterior queda como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y)(z) = \frac{\mathcal{L}(\varphi)(z)}{q(z)} + y(0)\frac{z^n + a_{n-1}z^{n-2} + \dots + a_2z + a_1}{q(z)} + \\ + y'(0)\frac{z^n + a_{n-2}z^{n-1} + \dots + a_3z + a_2}{q(z)} \\ + \dots \dots \dots + \\ + y^{(n-2)}(0)\frac{z + a_{n-1}}{q(z)} \\ + y^{(n-1)}(0)\frac{1}{q(z)} \end{aligned}$$

Esto reduce el problema del cálculo de la solución de la EDO lineal con condiciones iniciales dada anteriormente, al cálculo de la transformada de Laplace inversa del segundo miembro de la fórmula anterior. Es decir: debemos ser capaces de calcular $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)$ para cierta función racional $\frac{P}{Q}$. Ahora bien, esto es posible gracias al uso de la descomposición en fracciones simples de $\frac{P}{Q}$ (ver la sección anterior).

Es evidente que podemos interpretar la EDO lineal con coeficientes constantes como un tipo especial de sistema LTI. De hecho, este tipo de sistemas aparecen en diferentes contextos, como son el análisis de circuitos o el estudio de sistemas con muelles. De esta forma podemos interpretar la transformada de Laplace como un instrumento matemático útil para la teoría de señales y sistemas analógicos. En la próxima sección vamos a introducir la transformada \mathcal{Z} , que, como veremos, es útil para el estudio de señales y sistemas digitales.

Nota 8 *Para tratar el problema de la solución de EDO's lineales generales es también posible hacer uso de la transformada de Fourier generalizada (es decir: la transformada de Fourier de funciones generalizadas) pues, como ya se ha visto en una sección anterior, dicha transformada verifica también buenas propiedades formales con respecto al producto, la convolución, y la derivación. Si estamos interesados en estudiar la ecuación*

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \dots + b_0 x(t),$$

donde $x, y \in \mathbb{G}$ (x nos la dan y buscamos y), entonces aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad y teniendo en cuenta que $\mathcal{F}(y^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k \mathcal{F}(y)(\xi)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que la identidad anterior se transforma en la siguiente

$$(a_n (i\xi)^n + \dots + a_0) \mathcal{F}(y)(\xi) = (b_m (i\xi)^m + \dots + b_0) \mathcal{F}(x)(\xi).$$

Es decir, el problema pasa a ser la solución (en sentido generalizado) de la ecuación algebraica

$$Y(\xi) = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}X(\xi)$$

para ciertos polinomios algebraicos $P(z), Q(z)$. Esto se puede interpretar, en el dominio del tiempo, como

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y)(t) = \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{P(\xi)}{Q(\xi)} \right) * x \right) (t).$$

Es decir, el cociente $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$ representa la respuesta del sistema al impulso unidad en el dominio de la frecuencia y nuestro problema es calcular su transformada de Fourier inversa, algo que tiene sentido gracias a que estamos trabajando con funciones generalizadas.

5. Transformada Z

5.1. Definición de la transformada Z. Primeras propiedades

Dada una señal discreta $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, definimos su transformada Z como

$$\mathcal{Z}(\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},$$

donde se supone que z pertenece a la región de convergencia de la serie de Laurent que aparece en el segundo miembro de la igualdad anterior. (Obsérvese que dichas regiones de convergencia son siempre anillos $\{z : r < |z| < R\}$, donde los radios de interior y exterior del anillo dependen del comportamiento asintótico de la sucesión $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$).

La correspondencia que acabamos de establecer (una sucesión es llevada a una cierta función analógica), no es biyectiva. Es sencillo obtener sucesiones distintas tales que, si se suma la serie que define la transformada Z de ambas secuencias, entonces resulte que para ambas se obtiene la misma expresión algebraica. Por ejemplo, tomamos $\mathbf{x} = \{u(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\mathbf{y} = \{-u(n-1)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \text{ (para } |z^{-1}| < 1) \\ \mathcal{Z}(\mathbf{y}) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &= -z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1} \text{ (para } |z| < 1) \end{aligned}$$

Así pues, ambas transformadas producen la misma función, $\frac{z}{z-1}$, excepto por el detalle (que nunca debemos menospreciar) de que dicha función está definida en dominios distintos, ya que las regiones de convergencia de las correspondientes series, son diferentes. Así, podemos definir con mayor precisión la transformada Z de una sucesión como sigue:

Definición 7 Dada la sucesión de números $\mathbf{x} = \{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (reales o complejos), definimos su transformada Z como el par $(\mathcal{Z}(\mathbf{x}), \mathbf{R}(\mathbf{x}))$, donde

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

y $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ es la región de convergencia de la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$.

El siguiente resultado se satisface:

Teorema 18 No hay dos señales distintas \mathbf{x}, \mathbf{y} tales que

$$(\mathcal{Z}(\mathbf{x}), \mathbf{R}(\mathbf{x})) = (\mathcal{Z}(\mathbf{y}), \mathbf{R}(\mathbf{y})).$$

Demostración. En realidad, el teorema anterior es una sencilla consecuencia del siguiente teorema debido a Laurent⁶:

Teorema 19 (Laurent) ⁷ Supongamos que $f(z)$ es una función de variable compleja derivable en un anillo $\mathbf{R} = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Entonces $f(z_0 + h) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h^n$ para $R_1 < |h| < R_2$, donde la convergencia de la serie es uniforme sobre compactos del anillo $R_1 < |h| < R_2$, y las constantes c_n están dadas por

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde C_r es la curva parametrizada por $C_r(t) = z_0 + \exp(2\pi i t)$, $t \in [0, 1]$, $r \in (R_1, R_2)$.

Si tomamos $z_0 = 0$ entonces la expresión que aparece en el teorema anterior, se transforma en $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, y las regiones de convergencia pasan a ser coronas con centro el origen de coordenadas.

Para x una señal arbitraria, si la región de convergencia $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ es un anillo no vacío, entonces la función $\mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)$ es holomorfa en dicho anillo. Supongamos ahora que $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. Entonces el teorema de Laurent garantiza que, si C_r es una circunferencia interior al anillo $\mathbf{R}(\mathbf{x})$, entonces

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) z^{n-1} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

y por tanto, si $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{R}(\mathbf{y}) \neq \emptyset$, y $\mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)$ coincide con $\mathcal{Z}(\mathbf{y})(z)$ para $z \in C_r$, una circunferencia interior a ambas regiones, se obtiene que $x(n) = y(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. \square

El teorema de Laurent proporciona la clave para el proceso de inversión asociado a la transformada Z . Más precisamente, si conocemos tanto la función $X(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)$ y su correspondiente región

⁶P. A. Laurent (1813-1854). Ingeniero francés. En 1842 envió una memoria para participar en un premio de matemáticas a la Academia de Ciencias de París, pero el manuscrito llegó fuera de tiempo y, a pesar de que Cauchy emitió un informe positivo, éste no fue evaluado. Los desarrollos en serie de Laurent son muy importantes en la teoría de funciones de variable compleja.

⁷La demostración de este resultado se puede consultar en [?, p. 196, Th. 11.1]

de convergencia $\Omega = \mathbf{R}(\mathbf{x})$, no sólo es cierto que existe una única señal $\mathbf{x} = \{x(n)\}$ para la que $X(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)$ y $\Omega = \mathbf{R}(\mathbf{x})$ sino que, de hecho, los valores $x(n)$ se pueden rescatar de $X(z)$ (y Ω) simplemente teniendo en cuenta las expresiones

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) z^{n-1} dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Así, podemos afirmar que la fórmula anterior define la transformada \mathcal{Z} inversa. El problema es que no siempre resulta sencillo evaluar las integrales que aparecen en el segundo miembro de la expresión anterior. Así pues, nos preguntamos si en ciertos casos especiales (y que también sean importantes para las aplicaciones) es sencillo evaluar la transformada \mathcal{Z} inversa.

Terminamos esta sección con las siguientes observaciones:

- Se sigue del teorema de Laurent que toda función $X(z)$ holomorfa en un anillo \mathbf{R} , es la transformada \mathcal{Z} de alguna señal $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.
- La función $X(z)$ es la transformada \mathcal{Z} de una señal causal $\mathbf{x} = \{x(n)\}$ si y sólo si la función $\tilde{X}(z) = X(1/z)$ es holomorfa en un disco de la forma $\mathbf{D}(0, r) = \{z : |z| < r\}$ para cierto $r > 0$. Además, esto es equivalente a decir que la región de convergencia de $\mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)$ es el complementario de un disco \mathbf{D} para cierto $r > 0$.

5.2. Propiedades elementales de la Transformada Z. Inversión de la transformada Z

En esta sección, vamos a establecer las propiedades elementales de la transformada \mathcal{Z} y, a continuación, vamos a explicar el proceso de inversión para la transformada \mathcal{Z} para funciones racionales $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ (Posteriormente, veremos que dichos casos son útiles en la práctica).

La transformada \mathcal{Z} satisface las siguientes propiedades:

- **Linealidad.** La transformada \mathcal{Z} es lineal. Es decir, si \mathbf{x} , \mathbf{y} son dos señales discretas y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $\mathcal{Z}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathcal{Z}(\mathbf{x}) + b\mathcal{Z}(\mathbf{y})$. Además, $\mathbf{R}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = \mathbf{R}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{R}(\mathbf{y})$.
- **Desplazamiento en el tiempo.** Sea $m \in \mathbb{Z}$ fijo. Entonces

$$\mathcal{Z}(\{x(n-m)\}_{n=-\infty}^{\infty})(z) = z^{-m} \mathcal{Z}(\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty})(z).$$

Además, la región de convergencia no varía, excepto quizás por la posible inclusión o exclusión de 0 o de ∞ .

- **Cambios de escala en la frecuencia.** Dado $a \in \mathbb{C}$, se tiene que $\mathcal{Z}(\{a^n x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty})(z) = \mathcal{Z}(\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty})(\frac{z}{a})$. Además, la región de convergencia pasa de ser $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ a ser $|a|\mathbf{R}(\mathbf{x})$.
- **Reflexión en el tiempo.** Se tiene que $\mathcal{Z}(\{x(-n)\})(z) = \mathcal{Z}(\{x(n)\})(\frac{1}{z})$. Además, la región de convergencia de $\mathbf{y} = \{x(-n)\}$ es: $\mathbf{R}(\mathbf{y}) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} \in \mathbf{R}(\mathbf{x})\}$.

- **Convolución.** Dadas $\mathbf{x} \in l_1(\mathbb{Z})$ y $\mathbf{y} \in l_\infty(\mathbb{Z})$, se tiene que

$$\mathcal{Z}(\widehat{\mathbf{x} * \mathbf{y}})(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)\mathcal{Z}(\mathbf{y})(z)$$

Todas estas propiedades son sencillas de demostrar y se dejan como simples ejercicios. Sólo haremos algún comentario respecto de la convolución. Así pues, recordemos que si $\mathbf{x} \in l_1(\mathbb{Z})$ y $\mathbf{y} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ son dos señales discretas, su convolución está dada por $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \{c_n\}_{n=-\infty}^\infty$, donde

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, es sencillo comprobar que, si multiplicamos las series de potencias $\mathcal{Z}(x)$ y $\mathcal{Z}(y)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathbf{x})(z)\mathcal{Z}(\mathbf{y})(z) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)z^{-k}z^{-(n-k)} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) \right) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \\ &= \mathcal{Z}(\mathbf{x} * \mathbf{y})(z), \end{aligned}$$

lo que demuestra la propiedad de convolución.

Dada una función racional $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, queremos ahora calcular la señal $x(t)$ tal que $X(z) = \mathcal{Z}(x(t))$. Para ello, consideramos (como es habitual) la descomposición en fracciones simples de $X(z)$,

$$X(z) = h(z) + \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{i,j}}{(z - \alpha_i)^j},$$

donde $h(z)$ es el polinomio que resulta de dividir $P(z)$ por $Q(z)$, y de esta forma hemos reducido nuevamente nuestro problema al de conocer la transformada inversa de las fracciones simples $\frac{C_{i,j}}{(z - \alpha_i)^j}$, $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m_i$.

Ahora bien, dichas transformadas se pueden calcular de forma sencilla, si se tiene en cuenta que

$$\mathcal{Z}(\{\alpha^n u(n)\}_{n=-\infty}^\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

con región de convergencia $\mathbf{R} = \{z : |z| > |\alpha|\}$. Para verlo, basta derivar m veces ambos lados de la expresión anterior respecto de α , obteniendo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\alpha^{n-m}z^{-n} = \frac{m!z}{(z - \alpha)^{m+1}}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{Z}^{-1} \left(\frac{z}{(z-a)^{m+1}} \right) = \binom{n}{m} \alpha^{n-m} u(n).$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta la propiedad de desplazamiento en el tiempo, se ve que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left(\frac{1}{(z-a)^{m+1}} \right) = \mathcal{Z}^{-1} \left(z^{-1} \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \right) = \binom{n-1}{m} \alpha^{n-1-m} u(n-1).$$

5.3. Transformada \mathcal{Z} y filtros digitales

Dado un filtro digital L , sabemos que éste queda completamente determinado por su respuesta al impulso unidad (también llamada respuesta impulsional del sistema) $L(\delta) = \{h(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Evidentemente, como la transformada \mathcal{Z} es invertible, dicha respuesta impulsional queda completamente determinada a su vez por su transformada \mathcal{Z} . Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 8 Llamamos *función de transferencia del filtro digital L* a la función de variable compleja:

$$H(z) = \mathcal{Z}(\{h(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}.$$

Nota 9 Obsérvese, además, que $H(z)$ se puede interpretar como un autovalor de L de la siguiente forma: Tomamos $\mathbf{x} = \{z^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ para $z \in \mathbb{C}$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x})(n) &= (\mathbf{x} * \mathbf{h})(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}z^n \\ &= H(z)x(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$L(\mathbf{x}) = H(z)\mathbf{x}.$$

Es decir: $H(z)$ es un autovalor con autovector \mathbf{x} .

El nombre "función de transferencia" (del sistema) proviene de la siguiente interpretación: Sabemos que $\mathbf{y} = L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} * \mathbf{h}$, donde \mathbf{h} es la respuesta impulsional del sistema. Si aplicamos a ambos lados de la fórmula anterior la transformada \mathcal{Z} , entonces (teniendo en cuenta la propiedad de convolución) se tiene que

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

donde $Y(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{y})$ representa la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, $X(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})$ es la entrada del sistema (también en el dominio de la frecuencia) y $H(z)$ es la función de transferencia.

Evidentemente, de la misma forma que $\{h(n)\}$ lleva toda la información del sistema y, por tanto, podemos caracterizar algunas propiedades del sistema en términos de $\{h(n)\}$, lo mismo sucederá con

las funciones de transferencia $H(z)$. Veamos, por ejemplo, cómo se caracterizan en términos de $H(z)$ las propiedades de causalidad y de estabilidad (BIBO) del sistema L . Esto queda resuelto mediante las siguientes proposiciones:

Proposición 5 *Un sistema L que es LTI es además estable BIBO si y sólo si la región de convergencia de su función de transferencia contiene la circunferencia unidad.*

Proposición 6 *Un sistema L que es LTI es además causal si y sólo si la región de convergencia de su función de transferencia es el exterior de una circunferencia.*

5.3.1. Ecuaciones en diferencias

Es bien sabido que los filtros digitales más comúnmente usados vienen descritos por ecuaciones en diferencias,

$$\sum_{k=0}^d a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^h b_k x(n-k), \quad n \in \mathbb{Z},$$

donde $\mathbf{x} = \{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ representa la entrada del sistema, $\mathbf{y} = \{y(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ representa la salida del sistema y $\{a_k\}_{k=0}^d, \{b_k\}_{k=0}^h$ son ciertas constantes que determinan completamente el sistema. Estamos suponiendo que para cierto $n_0 \in \mathbb{Z}$ se tiene que si $x(n) = 0$ para todo $n < n_0$ entonces $y(n) = 0$ también para todo $n < n_0$ (i.e., suponemos la causalidad del sistema). De esta forma garantizamos que la sucesión $\{y(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ está unívocamente determinada por la sucesión $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Si aplicamos la transformada \mathcal{Z} a ambos lados de la ecuación anterior, obtendremos entonces que

$$\sum_{k=0}^d a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^h b_k z^{-k} X(z)$$

y, por tanto,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^h b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^d a_k z^{-k}}$$

es una función racional.

Como las funciones racionales quedan completamente determinadas por sus ceros y sus polos, será entonces deseable disponer de descripciones de las propiedades del sistema en términos de dicha información.

Podemos ahora calcular $\{y(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (i.e., la solución de la ecuación en diferencias, o, lo que es igual: la salida del sistema) de alguna de las dos formas siguientes:

- Calculamos $X(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x})$ y luego calculamos $\mathcal{Z}^{-1}(X(z)H(z))$. Este procedimiento se puede llevar a cabo fácilmente, siempre que $X(z)$ sea una función racional.
- Calculamos $\{h(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$ y luego calculamos la convolución

$$\{y(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} = \{(\mathbf{h} * \mathbf{x})(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

Nótese que para calcular $\mathcal{Z}^{-1}(H(z))$ necesitamos fijar de antemano la región de convergencia para $H(z)$. Esto significa que necesitamos saber si el sistema es o no causal. Evidentemente, bajo nuestras hipótesis, el sistema es causal y por tanto supondremos que la región de convergencia de $H(z)$ es el exterior de una circunferencia de centro el origen de coordenadas. Recuérdese que para dicho caso ya realizamos el cálculo de la transformada \mathcal{Z} inversa de las fracciones simples asociadas a cualquier función racional H .

Vemos a continuación un ejemplo resuelto de ambas formas:

Ejemplo 11 Consideramos la ecuación en diferencias

$$y(n) + 2y(n - 1) = x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sabemos que en este caso, $H(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}} = \frac{z}{z+2}$ y, por tanto, $h(n) = (-2)^n u(n)$. Vamos a realizar los cálculos para las entradas $x_1(n) = u(n)$ y $x_2(n) = u(n) - u(n - 3)$. En el primero de los casos es claro que

$$X_1(z) = \mathcal{Z}(\mathbf{x}_1) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

y, por tanto, $Y_1(z) = X_1(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}$. La correspondiente descomposición en fracciones simples es

$$Y(z) = \frac{z/3}{z-1} + \frac{2z/3}{z+2}$$

y, por tanto,

$$y(n) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n \right) u(n).$$

Para calcular la salida de $\mathbf{x}_2 = \{u(n) - u(n - 3)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, observamos que

$$x_2(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2)$$

y, por tanto,

$$y(n) = (\mathbf{x}_2 * \mathbf{h})(n) = (-2)^n u(n) + (-2)^{n-1} u(n - 1) + (-2)^{n-2} u(n - 2)$$

Es decir: $y(0) = 0$, $y(1) = -1$ y $y(n) = \frac{3}{4}(-2)^n$ para $n \geq 2$.

Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$ son los polos de $H(z)$ y suponemos que $|\alpha_i| \leq |\alpha_{i+1}|$, $i = 1, 2, \dots, d - 1$, entonces existe $i, s \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\alpha_{i_0}| < 1 = |\alpha_{i_0+1}| = \dots = |\alpha_{i_0+s}| < |\alpha_{i_0+s+1}|$$

y, por tanto, asociadas a $H(z)$ podemos considerar varias regiones de convergencia. Si la región de convergencia es

$$\mathbf{R}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\alpha_d|\}$$

entonces el sistema será causal. Si $H(z)$ no tiene polos en la circunferencia unidad, entonces podemos considerar como región de convergencia la corona mayor que contenga la circunferencia unidad y

carezca de polos y obtendremos que el correspondiente sistema es estable. Finalmente, si tomamos como región de convergencia a

$$\mathbf{R}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\alpha_1|\}$$

entonces el sistema será anticausal. Evidentemente, varias de estas cosas pueden suceder simultáneamente. En particular, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 7 *El sistema descrito por la función de transferencia racional $H(z)$ será estable y causal simultáneamente si y sólo si se satisface que: (i) Todos los polos de $H(z)$ están en el interior del disco unidad, y (ii) tomamos como región de convergencia de $H(z)$ a $\mathbf{R}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |\alpha_d|\}$, donde α_d es uno de los polos de $H(z)$ con valor absoluto máximo.*

Referencias

- [1] **C. Gasquet and P. Witomski**, *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets* Texts in Applied Mathematics **30** Springer 1999.
- [2] **C. Lanczos**, *Discourse on Fourier Series*, Olyver and Boyd, Edinburg, 1966.