

# Introducción a la teoría clásica del muestreo\*

## 1. Teorema del Muestreo de Shannon-Whittaker-Kotelnikov

Supongamos que tomamos muestras sucesivas de una señal  $x(t)$  midiendo sus valores en los instantes de tiempo  $\{t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots\}$ . Podemos entonces preguntarnos si realmente la información que obtenemos es útil para lograr una descripción completa de la señal  $x(t)$ . Evidentemente, la respuesta es negativa en términos generales, ya que un conjunto discreto de valores  $\{x(t_1), \dots, x(t_m), \dots\}$  no puede servir, en general, para determinar completamente la señal (que toma valores en un continuo)  $x(t)$ . Ahora bien, si supiésemos algo más sobre la señal, quizás la cosa cambiaba. Por ejemplo, para las señales de banda limitada podemos decir algo más.

**Definición 1** La señal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  se dice de banda limitada si la transformada de Fourier  $\hat{x}(\xi)$  posee soporte compacto. Es decir,  $x(t)$  se dice de banda limitada si existe algún  $b > 0$  tal que  $\hat{x}(\xi) = 0$  para todo  $|\xi| > b$ . El menor  $b$  verificando esta propiedad se llama ancho de banda de la señal  $x(t)$ . El espacio de las señales  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  tales que  $\text{supp}(\hat{x}) \subset [-b, b]$  se denota por  $\text{PW}(b)$

La notación  $\text{PW}(b)$  se debe a que dicho espacio suele llamarse espacio de Paley-Wiener en honor los matemáticos que caracterizaron los elementos de este espacio de la siguiente forma (ver [5], [54], [33]):

$$\text{PW}(b) = \{x(z) \in H(\mathbb{C}) : x|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}) \text{ y } \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|x(z)|}{e^{b|\text{Im } z|}} < \infty\}.$$

---

\*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto del autor: J.M. Almira, “Matemáticas para la recuperación de señales”, Grupo Editorial Universitario, 2005.

Las señales de banda limitada<sup>1</sup> aparecen con frecuencia en aplicaciones reales. Por ejemplo, es conocido que las señales de sonido que el oído humano puede percibir se mueven entre las frecuencias de  $20\text{Hz}$  y  $20,000\text{Hz}$ .

Desde el punto de vista matemático este tipo de señales posee importantes propiedades. El resultado que deseamos probar es un ejemplo claro de la bondad de dichas señales.

**Teorema 1 (Teorema del Muestreo. Shannon, Wittaker, Kotelnikov)** *Supongamos que  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\hat{x}(\xi) = 0$  para todo  $|\xi| > b$ . Entonces  $x(t)$  queda completamente determinada a partir de sus valores en los puntos  $\{t_n = n\pi/b\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Además, se satisface la siguiente fórmula:*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\pi}(t - nT)\right),$$

donde  $T = \frac{\pi}{b}$  y

$$\operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

**Demostración.** Como  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  entonces  $\hat{x}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ , pero al ser la señal de banda limitada, tenemos que también  $\hat{x}(t) \in L^1(\mathbb{R})$  y  $x(t)$  es diferenciable (en realidad, es una función analítica). Podemos, pues, utilizar el teorema integral de Fourier. Por otra parte, la señal  $\hat{x}(\xi)$  se puede desarrollar en serie de Fourier en el intervalo  $[-b, b]$ , ya que las exponenciales complejas  $\{e^{in\pi\xi/b}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forman una base ortogonal de  $L^2(-b, b)$ . En particular, los coeficientes de Fourier de  $\hat{x}(\xi)$  están dados por

$$c_n = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \hat{x}(\xi) e^{-in\pi\xi/b} d\xi$$

Por conveniencia, escribimos la fórmula anterior como

$$c_{-n} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \hat{x}(\xi) e^{in\pi\xi/b} d\xi$$

Ahora bien, como  $\hat{x}(\xi) = 0$  para todo  $|\xi| > b$ , se tiene que en la anterior expresión podemos cambiar el intervalo de integración  $[-b, b]$  por la recta real, y, por tanto,

$$c_{-n} = \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\xi) e^{in\pi\xi/b} d\xi = \frac{\pi}{b} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\xi) e^{i\xi \frac{n\pi}{b}} d\xi = \frac{\pi}{b} x\left(\frac{n\pi}{b}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

<sup>1</sup>R.E.A.C. Paley (1907-1933). Matemático inglés. Aunque comenzó sus investigaciones sobre series de Fourier con Littlewood, fue Zygmund la persona que descubrió su talento y con quien colaboró más intensamente. Ellos demostraron muchos resultados de existencia utilizando las ideas del libro de Borel, *Calcul des probabilités denombrables*. El famoso libro de Zygmund, *Trigonometric series* (1935), debe mucho al trabajo conjunto de estos matemáticos. Viajó a estados unidos para trabajar con N. Wiener. Desafortunadamente, murió muy joven, al quedar, accidentalmente, aplastado por una avalancha de nieve mientras esquiba en Canadá.

N. Wiener (1894-1964). Matemático estadounidense. Se graduó en Cornell y se doctoró en Harvard en 1913. Luego estudió en Cambridge con B. Russell y en Göttingen con Hilbert. De su relación con los fisiólogos Cannon y Rosenblüth, con los que colaboró en el instituto de Cardiología de la Universidad de México, nacería su gran descubrimiento: la cibernética. En relación a los temas estudiados en este texto, es especialmente importante su libro *The Fourier integral and its applications* (1933). También es interesante su autobiografía: *I am a mathematician* (1956) y, la recientemente publicada biografía de J. M. Almira, "Norbert Wiener. Un matemático entre ingenieros", en *La Matemática en sus personajes*, vol 41, Ed. Nivola, 2009.

(En la última igualdad hemos usado el teorema integral de Fourier). Esto significa, obviamente, que

$$\begin{aligned}\widehat{x}(\xi) &= \frac{\pi}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right) e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{b} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n\pi}{b}\right) e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}},\end{aligned}$$

siendo la convergencia válida en el sentido de  $L^2(-b, b)$  y, por tanto, también en el sentido de  $L^1(-b, b)$  (pues  $L^2(-b, b)$  está inmerso continuamente en  $L^1(-b, b)$ , al ser  $b < \infty$ ). Ahora bien, como  $\widehat{x}(\xi)$  tiene soporte compacto, contenido en  $[-b, b]$ , entonces podemos afirmar que, si multiplicamos el segundo miembro de la igualdad anterior por la función característica de  $\chi_{[-b, b]}(\xi)$  del intervalo  $[-b, b]$ , entonces las sumas parciales

$$\frac{\pi}{b} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n\pi}{b}\right) e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} \chi_{[-b, b]}(\xi)$$

convergen a  $\widehat{x}(\xi)$  en las normas de  $L^2(\mathbb{R})$  y de  $L^1(\mathbb{R})$  para  $n \rightarrow \infty$ . Por otra parte, la transformada inversa de Fourier,

$$\mathcal{F}^{-1}(y(\xi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) e^{i\xi t} d\xi,$$

es un operador acotado  $\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  (esto es el Teorema de Parseval) y también es un operador acotado  $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$ . Teniendo todo esto en cuenta, así como el hecho de que podemos utilizar el Teorema integral de Fourier para la señal  $x(t)$  y, por tanto,  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{x}(\xi))$ , podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{x}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{b} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n\pi}{b}\right) e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} \chi_{[-b, b]}(\xi)\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi}{b} \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n\pi}{b}\right) \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} \chi_{[-b, b]}(\xi)\right),\end{aligned}$$

siendo la convergencia tanto en norma  $L^2(\mathbb{R})$  como en norma uniforme (i.e., en la norma de  $C_0(\mathbb{R})$ ). Ahora bien,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} \chi_{[-b, b]}(\xi)\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} \chi_{[-b, b]}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{-i\xi \frac{n\pi}{b}} e^{i\xi t} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b e^{i\xi t - i\xi \frac{n\pi}{b}} d\xi \\ &= \frac{b \sin(bt - n\pi)}{\pi (bt - n\pi)}\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba del teorema<sup>2</sup>.  $\square$

Por supuesto, existe una versión dual del teorema del muestreo, para señales de tiempo limitado que son muestreadas en el dominio de la frecuencia. (La demostración es análoga a la anterior. Para verlo, téngase en cuenta la simetría que existe entre la transformada de Fourier y su inversa)(ver [54]).

**Teorema 2** *Supongamos que  $\hat{x}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$  y  $x(t) = 0$  para todo  $|t| > L$ . Entonces  $\hat{x}(\xi)$  queda completamente determinada a partir de sus valores en los puntos  $\{\xi_n = n\pi/L\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Es más: se satisface la siguiente fórmula:*

$$\hat{x}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(L\xi - n\pi)}{L\xi - n\pi}.$$

## 2. Sobremuestreo

Desde el punto de vista práctico, la descomposición

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right) \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}$$

tiene la desventaja de que en general la convergencia de la serie es lenta, debido a que la función  $(\sin t)/t$ , converge (para  $t \rightarrow \infty$ ) muy lentamente a cero. Podemos, pues, preguntarnos si es posible recuperar la señal de banda limitada  $x(t)$  mediante algún otro proceso numéricamente más estable.

La respuesta es, afortunadamente, un sí rotundo. El truco se basa en la observación de que si la transformada de Fourier de la señal  $x(t)$  tiene su soporte contenido en el intervalo  $[-b, b]$  entonces también tiene su soporte en el intervalo  $[-c, c]$  para todo  $c > b$ . Esto permite utilizar el teorema del muestreo para recuperar la señal  $x(t)$  a partir de los valores en  $\{x(\frac{n\pi}{c})\}_{n=-\infty}^{\infty}$ . En principio, se obtendría el desarrollo en serie

$$x(t) = \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\sin(ct - n\pi)}{ct - n\pi}.$$

Ahora bien, si hacemos las cuentas de esta forma, no evitaremos que la velocidad de convergencia sea excesivamente lenta. Téngase en cuenta que si se introduce ruido en las mediciones de  $x(t)$  en los nodos  $\{\frac{n\pi}{c}\}$ , de modo que en realidad estamos evaluando la señal  $x^*(\frac{n\pi}{c}) = x(\frac{n\pi}{c}) + \eta_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

---

<sup>2</sup>Parece ser que este resultado fue demostrado de forma independiente (y en contextos y momentos diferentes) por estos tres científicos.

Shannon (1916-2001). Matemático estadounidense. Realizó, en el MIT, una tesina sobre el uso del álgebra de Boole para el análisis de circuitos y una tesis sobre genética teórica (1940). En 1941 ingresó en la compañía de teléfonos AT&T, como investigador matemático. Entonces publicó su famoso trabajo: *A Mathematical Theory of Communication*, donde, entre otras cosas, demuestra el teorema del muestreo y funda la Teoría de la Comunicación.

A. P. Kotelnikov (1865-1944). Matemático ruso. Dedicó toda su vida a temas de Geometría y aplicaciones en Mecánica Teórica.

entonces tendremos que la señal reconstruida estará dada por:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\sin(ct - n\pi)}{ct - n\pi} \\ &= \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\sin(ct - n\pi)}{ct - n\pi} + \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \frac{\sin(ct - n\pi)}{ct - n\pi} \\ &= x(t) + \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \frac{\sin(ct - n\pi)}{ct - n\pi}. \end{aligned}$$

Si evaluamos, por ejemplo, en  $t = \frac{\pi}{2c}$ , obtendremos que el error de cálculo en dicho punto está dado por

$$x^*\left(\frac{\pi}{2c}\right) - x\left(\frac{\pi}{2c}\right) = \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \frac{(-1)^n}{\frac{\pi}{2} - n\pi}$$

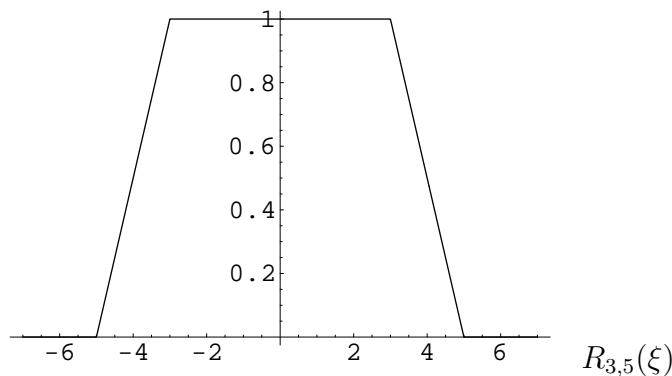
y, por tanto, es posible que dicho error sea infinito incluso para un ruido  $\{\eta_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_{\infty}(\mathbb{Z})$  (de hecho, basta tomar  $\eta_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ).

¿Qué podemos hacer, pues, para mejorar la convergencia?. Consideramos el desarrollo en serie de Fourier de  $\hat{x}(\xi) \in L^2(-c, c)$ ,

$$\hat{x}(\xi) = \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) e^{-i\xi \frac{n\pi}{c}}.$$

Como  $\text{supp}(x) \subset [-b, b]$ , podemos entonces multiplicar el segundo miembro de la igualdad anterior por la función (ver la figura)

$$R_{b,c}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\xi| \leq b \\ 1 - \frac{|\xi| - b}{c - b} & \text{si } b \leq |\xi| \leq c \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$



obteniéndose que, en realidad,

$$\hat{x}(\xi) = \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) e^{-i\xi \frac{n\pi}{c}} R_{b,c}(\xi),$$

siendo la convergencia válida en las normas de  $L^2(\mathbb{R})$  y  $L^1(\mathbb{R})$ . Ahora bien, la transformada de Fourier inversa de  $R_{b,c}(\xi)$  es la función

$$G_{b,c}(t) = \mathcal{F}^{-1}(R_{b,c}(\xi))(t) = \begin{cases} \frac{\cos(bt) - \cos(ct)}{\pi(c-b)t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ \frac{b+c}{2\pi} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-i\xi \frac{n\pi}{c}} R_{b,c}(\xi))(t) = G_{b,c}(t - \frac{n\pi}{c}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teniendo nuevamente en cuenta las propiedades de acotación del operador transformada inversa, así como el hecho de que para  $x(t)$  se satisface el teorema integral de Fourier, se concluye que

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{x}(\xi)) &= \frac{\pi}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) G_{b,c}\left(t - \frac{n\pi}{c}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\cos(b(t - \frac{n\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{n\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{n\pi}{c})^2}, \end{aligned}$$

siendo la convergencia uniforme en toda la recta real y también en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Es claro que los argumentos anteriores finalizan la demostración del siguiente resultado:

**Teorema 3 (Sobremuestreo)** *Supongamos que  $x(t)$  es una señal de banda limitada, cuyo ancho de banda es  $b > 0$ , y supongamos que  $b < c$ . Entonces podemos reconstruir la señal  $x(t)$  a partir de los valores  $\{x(\frac{n\pi}{c})\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , como sigue:*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\cos(b(t - \frac{n\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{n\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{n\pi}{c})^2}.$$

Además, la serie del segundo miembro de la igualdad anterior converge en  $C_0(\mathbb{R})$  y en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Es más, podemos ahora demostrar que el proceso de sobremuestreo descrito por el teorema anterior es numéricamente estable:

**Teorema 4** *Con la notación introducida en el teorema anterior, si cada valor  $x(\frac{n\pi}{c})$  se mide sujeto a un posible error, que está acotado (uniformemente en  $n$ ) por  $\delta > 0$ , entonces la señal recuperada dista en norma uniforme de la señal de partida, a lo sumo*

$$\delta \left( \frac{b+c}{c} + \frac{2}{3} \frac{c}{c-b} \right)$$

**Demostración.** Si nos ponemos bajo las hipótesis del teorema y denotamos por  $x^*(t)$  la señal recuperada (que, en principio, no coincide con la señal original  $x(t)$ ), entonces el ruido está acotado de la siguiente forma:

$$|x^*(t) - x(t)| \leq \delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos(b(t - \frac{n\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{n\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{n\pi}{c})^2} \right|$$

Vamos a suponer momentáneamente que  $t \in (0, \frac{\pi}{c})$ . Si  $n \geq 2$ , entonces  $(t - \frac{n\pi}{c})^2 \geq (\frac{n\pi}{c} - \frac{\pi}{c})^2 = (n-1)^2 \frac{\pi^2}{c^2}$  y

$$\left| \frac{\cos(b(t - \frac{n\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{n\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{n\pi}{c})^2} \right| \leq \frac{2}{c(c-b)(n-1)^2 \frac{\pi^2}{c^2}} \leq \frac{2c}{(c-b)(n-1)^2 \pi^2}.$$

Por otra parte, si  $n \leq -1$ , entonces  $(t - \frac{n\pi}{c})^2 \geq (\frac{n\pi}{c})^2 = n^2 \frac{\pi^2}{c^2}$  y

$$\left| \frac{\cos(b(t - \frac{n\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{n\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{n\pi}{c})^2} \right| \leq \frac{2}{c(c-b)n^2 \frac{\pi^2}{c^2}} \leq \frac{2c}{(c-b)n^2 \pi^2}.$$

Además, si  $n = 0$ , entonces

$$\left| \frac{\cos(bt) - \cos(ct)}{c(c-b)t^2} \right| \leq \frac{b+c}{2c}$$

y si  $n = 1$ , entonces también

$$\left| \frac{\cos(b(t - \frac{\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{\pi}{c})^2} \right| \leq \frac{b+c}{2c}.$$

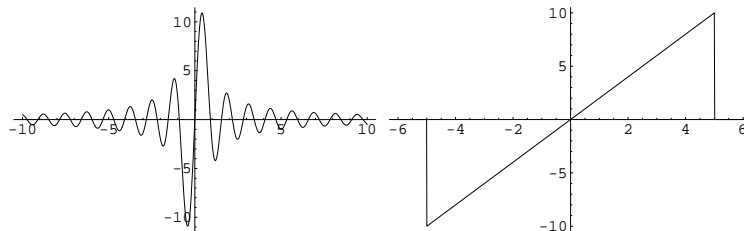
Utilizando todas las desigualdades anteriores, llegamos a que, para  $0 < t < \frac{\pi}{c}$ , el error producido por el ruido se puede acotar como

$$\begin{aligned} |x^*(t) - x(t)| &\leq \delta \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{2c}{(c-b)n^2 \pi^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2c}{(c-b)(n-1)^2 \pi^2} + \frac{b+c}{c} \right) \\ &= \delta \left( \frac{b+c}{c} + \frac{2}{3} \frac{c}{c-b} \right), \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Obsérvese que hemos usado la fórmula  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Si  $t$  no pertenece al intervalo  $(0, \frac{\pi}{c})$  y no es de la forma  $\frac{n\pi}{c}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), entonces estará en algún intervalo de la forma  $(k\frac{\pi}{c}, (k+1)\frac{\pi}{c})$  y, por tanto, podremos repetir los argumentos anteriores mediante una traslación adecuada. Esto finaliza la prueba.  $\square$

### 2.0.1. Algunos comentarios basados en el estudio de un ejemplo

Tomemos  $x(t) = \frac{-5 \cos(5t) + \sin(5t)}{t^2}$ . Esta función es de banda limitada, pues su transformada de Fourier está dada por  $\hat{x}(\xi) = \xi \chi_{[-5,5]}(\xi)$ , donde  $\chi_{[a,b]}$  denota la función característica del intervalo  $[a, b]$  (ver los gráficos).



Podemos, pues, aplicar tanto el teorema del muestreo como el teorema de sobremuestreo para recuperar la señal  $x(t)$  completamente. Ahora, nos interesa disponer de información sobre la velocidad de convergencia de las series

$$M_N x(t) = \sum_{n=-N}^N x\left(n\frac{\pi}{b}\right) \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}, \quad b = 5,$$

(que es una suma parcial de la serie cardinal, del teorema del muestreo)

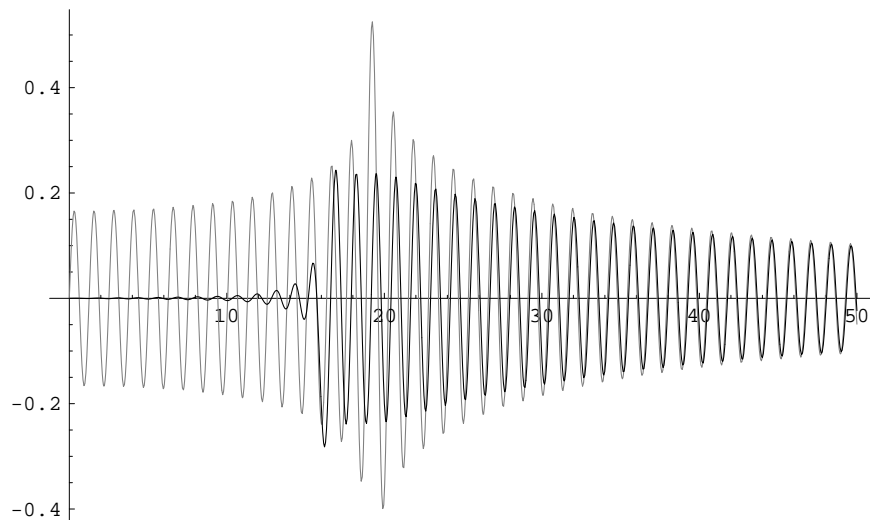
$$SM_N x(t) = \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n\pi}{c}\right) \frac{\cos(b(t - \frac{n\pi}{c})) - \cos(c(t - \frac{n\pi}{c}))}{c(c-b)(t - \frac{n\pi}{c})^2}; \quad b = 5, \quad c = 6.$$

(que es una suma parcial de la serie que aparece en el teorema de sobremuestreo) y

$$SM_N^* x(t) = \sum_{n=-N}^N x\left(n\frac{\pi}{c}\right) \frac{\sin ct - n\pi}{ct - n\pi}, \quad c = 6,$$

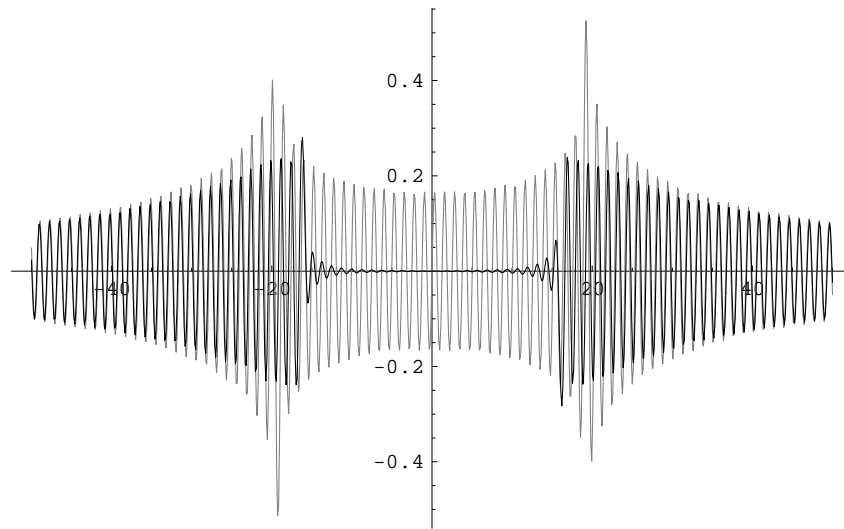
(que sería una suma parcial de la serie que aparece al usar el teorema del muestreo, tomando un ancho de banda mayor; es decir: sobremuestreando sin usar el "truco" de multiplicar por la función  $R_{b,c}(\xi)$  para  $N \rightarrow \infty$ ).

El siguiente gráfico representa los errores para  $M_{30}x$  y  $SM_{30}x$  y en el intervalo  $[0, 50]$  (la línea gris representa la curva del error para  $M_N x(t)$  y la línea negra representa el error para  $SM_N x(t)$ ):

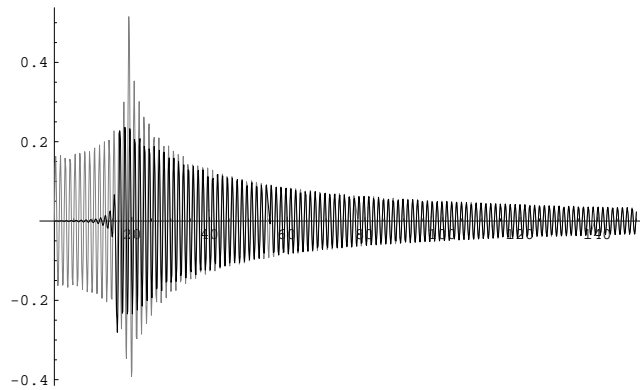


Si hacemos el gráfico correspondiente para el intervalo  $[-50, 50]$ , obtenemos

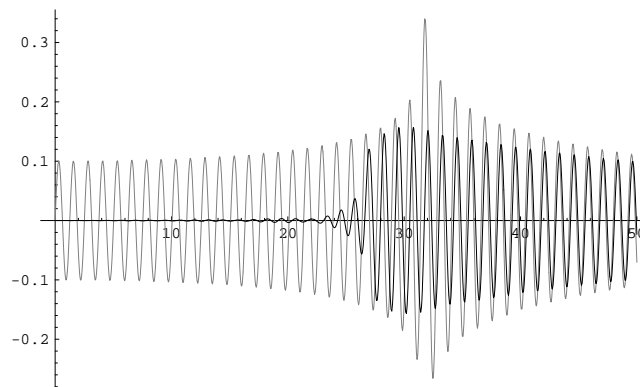




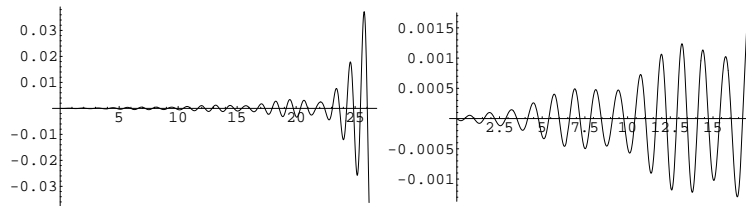
y si hacemos el gráfico de las mismas funciones en el intervalo  $[0, 150]$ , obtenemos



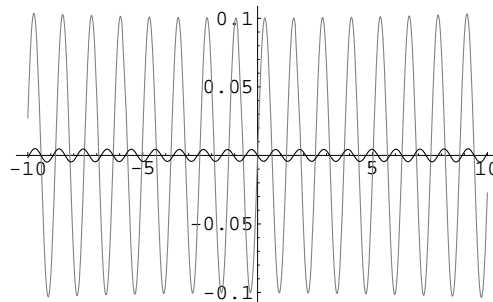
Por otra parte, si calculamos el gráfico correspondiente para  $N = 50$ , obtenemos (en el intervalo  $[0, 50]$ )



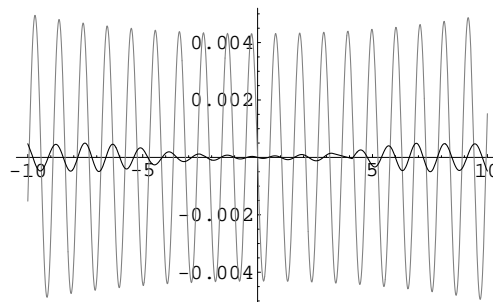
y si calculamos el gráfico de  $x(t) - SM_{50}x(t)$  en  $[0, 50\frac{\pi}{6}] \simeq [0, 26,18]$  (recuérdese que hemos tomado  $b = 5, c = 6$ ) y en un intervalo un poco menor (e.g.,  $[0, 16]$ ), obtenemos



Finalmente, podemos comparar las sumas  $M_N x$  (en gris) y  $SM_N^* x$  (en negro) ( $N = 50, b = 5, c = 6$ ), obteniendo el gráfico



y si comparamos las sumas  $SM_N^* x$  (en gris) y  $SM_N x$  (en negro) ( $N = 50, b = 5, c = 6$ ) obtenemos



Los gráficos anteriores muestran claramente que la velocidad de convergencia de la serie que aparece al utilizar el teorema del sobremuestreo es mejor que la de la serie que aparece al utilizar el teorema del muestreo suponiendo un ancho de banda superior al que la señal tiene en realidad, y ésta es a su vez mejor que la convergencia que se obtiene de utilizar el teorema del muestreo de Witterker-Shannon-Kotelnikov (ajustando el ancho de banda a la realidad). De hecho, si nos fijamos en estos gráficos descubrimos que:

- Existe cierta simetría respecto del origen.
- Existe un intervalo (cuyo tamaño depende de  $N$ , siendo aproximadamente igual a  $[-N\frac{\pi}{c}, N\frac{\pi}{c}]$ ) donde el sobremuestreo proporciona errores muy bajos en comparación al muestreo estándar.
- Lejos del origen de coordenadas, los errores que se obtienen convergen a cero a una velocidad similar a la velocidad de convergencia a cero de  $x(t)$  para  $|t| \rightarrow \infty$ .

Afirmamos que (de forma genérica) las propiedades anteriores se verifican para todos los ejemplos de señales  $x(t) \in \text{PW}(b)$  que se desarrollen.

Otra de las propiedades que podemos destacar de la suma

$$M_N x(t) = \sum_{n=-N}^{+N} x\left(\frac{n\pi}{b}\right) \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}$$

es que ésta interpola a la señal  $x(t)$  en los nodos  $\{-N\frac{\pi}{b}, \dots, 0, \dots, N\frac{\pi}{b}\}$ , pues las funciones  $h_n(t) = \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , satisfacen las igualdades

$$h_n\left(m\frac{\pi}{b}\right) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma, podemos interpretar el teorema del muestreo como resultado de tomar  $N \rightarrow \infty$  para cierto proceso de interpolación sobre los  $2N+1$  nodos equiespaciados  $\{-N\frac{\pi}{b}, (-N+1)\frac{\pi}{b}, \dots, 0, \dots, N\frac{\pi}{b}\}$ .

### 3. Aliasing

Si utilizamos la serie cardinal que aparece en el teorema del muestreo (para  $\text{PW}(b)$ ) para la reconstrucción de una señal  $x(t) \notin \text{PW}(b)$ , entonces se produce un fenómeno conocido como aliasing y que consiste básicamente en que la serie converge a una señal (a la que llamamos alias) diferente de la señal original  $x(t)$ . El fenómeno de aliasing se puede, pues, producir bien porque la señal  $x(t)$  es de banda limitada, pero su ancho de banda es mayor que  $b$  (de modo que estamos tomando menos muestras de las que realmente se necesitan para recuperar la señal) o bien porque la señal no es de banda limitada. Aún así, existen señales que no son de banda limitada pero para las cuales la serie cardinal es convergente y, de hecho, podemos estimar el error de aliasing. En particular, se satisface el siguiente importante resultado. No incluimos la demostración por considerarla excesivamente técnica, aunque se podría consultar en [10].

**Teorema 5 (Brown, 1967)** *Supongamos que  $\hat{x}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  (en cuyo caso decimos que  $x(t)$  es casi de banda limitada). Entonces  $x(t) \in \mathbf{C}_0(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  y el error de aliasing*

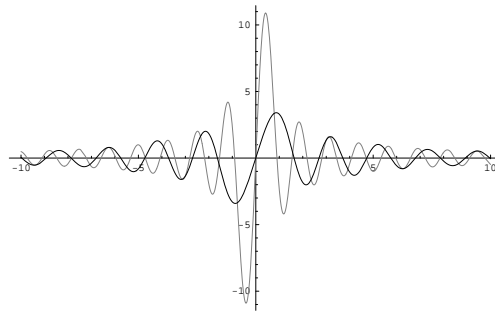
$$A(t) = x(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right) \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}$$

verifica la acotación:

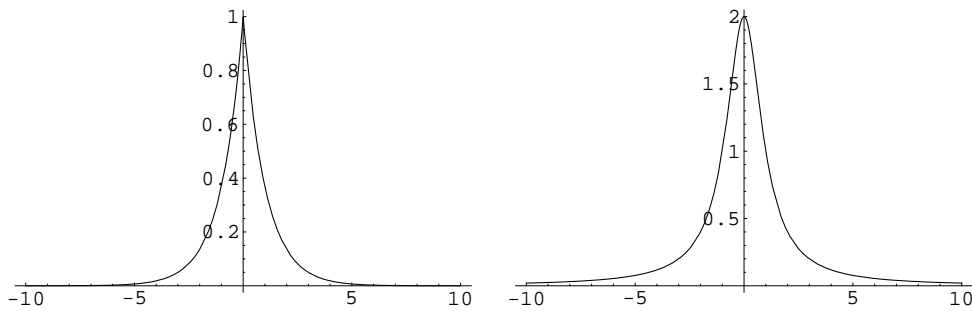
$$|A(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\xi| \geq b} |\hat{x}(\xi)| d\xi.$$

Además, dicha acotación es óptima, pues se alcanza para  $x(t) = \frac{\sin(2b(t - \frac{\pi}{2b}))}{2b(t - \frac{\pi}{2b})}$ .

Finalizamos esta sección exponiendo tres ejemplos de aliasing. En el primero, tomamos la misma función del ejemplo desarrollado en la sección anterior,  $x(t) = \frac{-5 \cos(5t) + \sin(5t)}{t^2}$ . Se trata de una función cuyo ancho de banda es exactamente igual a 5. Obtendremos un fenómeno de aliasing si aplicamos el teorema del muestreo con un ancho de banda menor. Vamos, de hecho, a suponer que el ancho de banda es 4 (un error, claro: pero en muchas situaciones reales no podemos saber con certeza el ancho de banda de una señal). Dibujamos, en el siguiente gráfico, las funciones  $x(t)$  y  $\sum_{n=-30}^{30} x\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{\sin(4t - n\pi)}{4t - n\pi}$ .



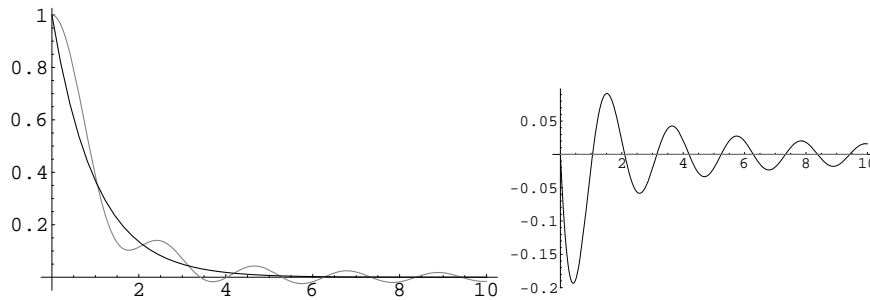
En el segundo ejemplo tomamos como señal casi de banda limitada a  $x(t) = e^{-|t|}$  (cuya transformada de Fourier es  $\hat{x}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ ). Los gráficos de  $x(t)$  y  $\hat{x}(\xi)$  son:



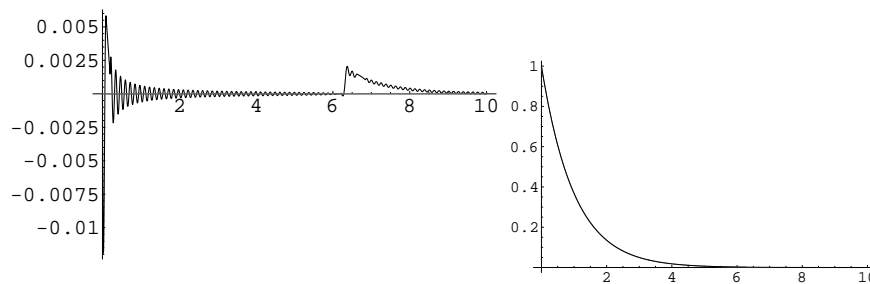
Consideremos, pues, la aproximación de  $x(t)$  por las sumas parciales

$$M_{N,b}x(t) = \sum_{n=-N}^N x\left(\frac{n\pi}{b}\right) \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}$$

Para  $b = 3$  y  $N = 10$  se obtienen los gráficos siguientes:



Para  $b = 50$  y  $N = 100$ , obtenemos



## 4. Principio de incertidumbre

Si utilizamos un poco de la teoría de funciones de variable compleja, el siguiente resultado es sencillo de demostrar:

**Teorema 6** *Una señal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  no puede ser simultáneamente de tiempo limitado y de banda limitada, a no ser que se trate de la señal idénticamente nula.*

**Demostración.** Suponemos que  $\hat{x}(\xi) = 0$  para todo  $|\xi| > \Omega$ , y  $\hat{x}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces la función

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z} \hat{x}(\xi) d\xi$$

no sólo tiene sentido para todo  $z \in \mathbb{C}$ , sino que, además, se puede derivar bajo el signo integral, demostrándose, pues, que se trata de una función entera. Teniendo cuenta ahora el teorema integral de Fourier, se ve que  $h(z)$  extiende a la señal  $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$  al plano complejo. Como  $h(z)$  es entera, por el principio de identidad, sus ceros son aislados y, por tanto, es imposible que se anule en ningún intervalo (de interior no vacío) de la recta real. Esto demuestra que  $x = h|_{\mathbb{R}}$  no puede ser una señal de tiempo limitado. El mismo tipo de argumento demuestra que si la señal de partida es de tiempo limitado, su transformada de Fourier sólo tiene ceros aislados y, por tanto, la señal no puede ser de banda limitada.  $\square$

El anterior resultado no es más que una forma débil de un principio general (que se llama, en el contexto de la mecánica cuántica, principio de incertidumbre), que reza como sigue: si la señal  $x(t)$  se anula, o es muy pequeña (en módulo) en el exterior de cierto intervalo pequeño, entonces su versión en el dominio de la frecuencia,  $\hat{x}(\xi)$  debe de estar bastante dispersa (i.e., toma valores relativamente grandes (o al menos no despreciables, en el sentido de que contribuyen significativamente al área que deja el grafo de su función de energía por encima del eje de abscisas) en un intervalo bastante grande de la recta real. Y también viceversa (i.e., cambiando los papeles de  $x$  y  $\hat{x}$ , se satisface una afirmación análoga). Para medir lo dispersa que pueda estar una señal alrededor del punto  $a$ , se introduce la siguiente magnitud:

$$\Delta_a x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - a)^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

En realidad,  $\Delta_a x$  mide en qué medida falla la señal  $x$  de estar concentrada en un entorno del punto  $a$ . Más concretamente, si  $x$  es de módulo pequeño en un entorno del punto  $a \in \mathbb{R}$ , entonces el factor  $(t - a)^2$  hace que  $\int_{-\infty}^{\infty} (t - a)^2 |x(t)|^2 dt$  sea pequeño en comparación con  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  y, por tanto,  $\Delta_a x \approx 0$ . Por otra parte, si la señal  $x(t)$  está dispersa (contiene información significativa sobre su energía) lejos de  $a$ , entonces el factor  $(t - a)^2$  incrementa dicho efecto y, por tanto, hace que  $\int_{-\infty}^{\infty} (t - a)^2 |x(t)|^2 dt$  sea grande en comparación con  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  y, por tanto,  $\Delta_a x \gg 0$ . El siguiente resultado expresa, por tanto, que no es posible que ambas señales  $x$  y  $\hat{x}$  estén concentradas simultáneamente en un entorno pequeño del punto  $a$ :

**Teorema 7 (Principio de Incertidumbre)** *Para toda señal  $x \in L^2(\mathbb{R})$  se tiene que*

$$\frac{1}{4} \leq (\Delta_a x)(\Delta_b \hat{x})$$

para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Para la demostración del teorema anterior se pueden consultar, por ejemplo, los libros [20], [46], [36].

## 5. Teoría del muestreo uniforme para señales generalizadas

Restringir la teoría del muestreo al espacio de Paley-Wiener  $\mathbf{PW}(b)$  impide trabajar con muchas funciones que aparecen con frecuencia en teoría de señales. Por ejemplo, las exponenciales complejas  $e^{i\omega t}$  no son elementos de  $\mathbf{PW}(b)$  puesto que no son señales de energía finita (en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$ ). Esta situación resulta del todo incómoda.

Es por tanto importante buscar una formulación del teorema del muestreo que sea aplicable a una gama de situaciones lo más amplia posible. Para ello, se hace necesario introducir un concepto de "señal de banda limitada" lo suficientemente general.

En particular, ¿Son las exponenciales complejas señales de banda limitada? La clave está en pensar en dichas señales no como funciones ordinarias (que lo son) sino como señales generalizadas (que también lo son) y utilizar la transformada de Fourier de funciones generalizadas para introducir el concepto de señal de banda limitada.

Todo lo que se acaba de sugerir parece muy razonable. Sin embargo, nos encontramos con las siguientes dificultades:

- (D1) Las señales generalizadas son funcionales  $x : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{C}$  y, como funciones dependientes del tiempo, no es claro el significado de  $x(t_0)$  para un valor dado  $t_0 \in \mathbb{R}$ . En particular, ¿qué significado puede darse al proceso de muestreo en este contexto tan general?.
- (D2) Teniendo en cuenta lo expresado en el ítem anterior, no queda claro cómo se pueda definir el soporte de una función generalizada.

Afortunadamente estos escollos se pueden salvar.

Para empezar, damos sentido al soporte de una señal generalizada utilizando un argumento indirecto:

**Definición 2** Decimos que la señal  $x \in \mathbb{G}$  se anula sobre el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  si para toda función  $\phi \in \mathbb{S}$  cuyo soporte satisface  $\text{supp}(\phi) \subseteq \Omega$  se tiene que  $x\{\phi\} = 0$ .

**Definición 3** Llamamos soporte de la señal  $x \in \mathbb{G}$ , y lo denotamos por  $\text{supp}(x)$ , al menor cerrado  $K \subseteq \mathbb{R}$  con la propiedad de que  $x$  se anula sobre  $\Omega = \mathbb{R} \setminus K$ .

Ahora podemos definir el espacio de las señales (generalizadas) cuyo ancho de banda es finito (i.e., las señales de banda limitada) de la siguiente forma:

**Definición 4** Decimos que  $x \in \mathbb{G}$  es una señal de banda limitada, con ancho de banda menor o igual a  $b$ , si  $\text{supp}(x) \subseteq [-b, b]$ .

Es evidente que

$$\mathbb{G}(b) = \{x \in \mathbb{G} : \text{supp}(\hat{x}) \subseteq [-b, b]\}$$

es un espacio vectorial. Ahora bien, ¿hasta qué punto podemos afirmar que  $\mathbb{G}(b)$  es un espacio de señales lo suficientemente amplio como para hacer interesante un teorema del muestreo válido para  $\mathbb{G}(b)$ ? A continuación vamos a caracterizar completamente los elementos de  $\mathbb{G}(b)$ . En particular, vamos a probar que las señales  $x \in \mathbb{G}(b)$  son de hecho funciones en el sentido ordinario de la palabra y, por tanto, son susceptibles de ser muestreadas. Esto resuelve (D1).

Comenzamos observando que si  $x \in \mathbb{G}(b)$  y denotamos por  $y$  a la transformada de Fourier  $y = \widehat{x}$  entonces, al ser  $y$  una señal generalizada, existirá una función  $g \in \text{CSG}$  tal que  $y = g^{(n)}$  (donde la derivada se toma en sentido generalizado). De modo que

$$y\{\phi\} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\phi^{(n)}(t)dt \quad (\text{para todo } \phi \in \mathbb{S}).$$

Como  $\text{supp}(y) \subseteq [-b, b]$ , tendremos que  $y = g^{(n)}$  satisface  $g^{(n)}_{|_{(-\infty, b) \cup (b, \infty)}} = 0$ . Por tanto, podemos interpretar nuestra pregunta inicial en los siguientes términos: ¿qué funciones  $g \in \text{CSG}$  satisfacen  $g^{(n)}_{|_{(-\infty, b) \cup (b, \infty)}} = 0$ ? Con el objetivo de responder a esta cuestión, demostramos el siguiente importante resultado:

**Teorema 8 (Solución de la ecuación diferencial generalizada  $g^{(n)} = 0$ )** *Supongamos que  $g \in \text{CSG}$  satisface la ecuación  $(g^{(n)})_{|(a, b)} = 0$ . Entonces  $g(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$  para todo  $t \in (a, b)$  y ciertos escalares  $a_0, \dots, a_{n-1}$ .*

**Demostración.** Estudiamos primero el caso  $n = 1$ . Sea  $g \in \text{CSG}$  tal que  $(g')_{|(a, b)} = 0$  y sean  $\phi, \varphi \in \mathbb{S}$  tales que  $\phi_{|\mathbb{R} \setminus (a, b)} = \varphi_{|\mathbb{R} \setminus (a, b)} = 0$ . Suponemos, sin pérdida de generalidad, que  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1$ .

Sean  $c = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt$  y  $A = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt$ . Definamos, además, la función  $\psi(t) = \int_a^t (\varphi(u) - A\phi(u))du$ . Es fácil comprobar que  $\psi \in \mathbb{S}$  y  $\text{supp}(\psi) \subseteq [a, b]$ . Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)(\varphi(t) - A\phi(t))dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\psi'(t)dt = -g'\{\psi\} = 0$$

y, por tanto,

$$g\{\varphi\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t)dt = A \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\phi(t)dt = Ac = \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(t)dt = c\{\varphi\}$$

Es decir,  $g = c$  en  $(a, b)$ , que es lo que queríamos demostrar. El resto de la prueba se sigue, con argumentos similares, por inducción sobre  $n$ .  $\square$

Se sigue que si  $y = g^{(n)}$  se anula en  $(-\infty, b) \cup (b, \infty)$  entonces podemos escribir

$$g(t) = p_L(t)h(-t - b) + \gamma(t) + p_R(t)h(t - b)$$

donde  $p_L, p_R$  son polinomios de grado  $\leq n - 1$  y  $\gamma \in \mathbf{C}[-b, b]$ ,  $\gamma_{|\mathbb{R} \setminus [-b, b]} = 0$ .

Tomando derivadas generalizadas a ambos lados de la igualdad anterior, obtenemos que

$$y = g^{(n)} = \gamma^{(n)} + \sum_{\mu=0}^{n-1} (c_{\mu}\delta^{(\mu)}(t + b) + d_{\mu}\delta^{(\mu)}(t - b))$$

Tomando ahora la transformada de Fourier (generalizada) a ambos miembros de la igualdad, concluimos que

$$\widehat{y}(s) = (\mathbf{i}s)^n \widehat{\gamma}(s) + \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mathbf{i}s)^\mu (c_\mu \exp(\mathbf{i}bs) + d_\mu \exp(-\mathbf{i}bs))$$

Ahora bien, gracias al teorema de inversión, sabemos que  $\widehat{y}(s) = \widehat{x}(s) = \widetilde{x}(s) = x(-s)$ . Por tanto,

$$x(t) = (-\mathbf{i}t)^n \widehat{\gamma}(-t) + \sum_{\mu=0}^{n-1} (-\mathbf{i}t)^\mu (c_\mu \exp(-\mathbf{i}bt) + d_\mu \exp(\mathbf{i}bt)) \quad (1)$$

y  $x = x(t)$  es una función en el sentido ordinario de la palabra, que es lo que queríamos demostrar. Es más, a la vista de la caracterización de los elementos de  $\mathbb{G}(b)$  que hemos obtenido (ver (1)), se puede probar de forma muy sencilla que dichas funciones satisfacen que tanto ellas como sus derivadas sucesivas (de todos los órdenes) son CSG. Esto es evidente para la parte en la que aparece la suma

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} (-2\pi \mathbf{i}t)^\mu (c_\mu \exp(-\mathbf{i}bt) + d_\mu \exp(\mathbf{i}bt)).$$

Ahora bien, si  $\gamma|_{[-b,b]} \in \mathbf{C}[-b,b]$  y  $\gamma|_{\mathbb{R} \setminus [-b,b]} = 0$ , entonces

$$\rho(t) = \widehat{\gamma}(-t) = \int_{-b}^b \gamma(s) \exp(\mathbf{i}st) ds$$

satisface

$$|\rho^{(n)}(t)| = \left| \int_{-b}^b (\mathbf{i}s)^n \gamma(s) \exp(\mathbf{i}st) ds \right| \leq b^n \int_{-b}^b |\gamma(s)| ds, \quad n = 1, 2, \dots,$$

lo que concluye la demostración.

Ya estamos en condiciones de probar una versión del teorema del muestreo válida para el espacio de señales  $\mathbb{G}(b)$ .

**Teorema 9 (Teorema del muestreo para  $\mathbb{G}(b)$ )** *Supongamos que  $x \in \mathbb{G}(b)$  y  $0 < T \leq \frac{\pi}{b}$ . Entonces  $x$  queda totalmente determinada a partir de sus valores muestrales  $\{x(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . En particular, si tomamos  $T = \frac{\pi}{b}$ , entonces  $x(t)$  se puede recuperar a partir de sus valores muestrales  $\{x(\frac{n\pi}{b})\}_{n \in \mathbb{Z}}$  utilizando la siguiente expresión:*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right) \frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi}.$$

**Demostración.** Como  $x \in \mathbb{G}(b)$ , sabemos que  $x$  es de hecho una señal ordinaria y, por tanto, susceptible de ser muestreada. Ahora, a partir de sus valores muestrales  $\{x(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , podemos construir la señal generalizada

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$



Es fácil comprobar que se satisfacen las siguientes identidades (en sentido generalizado):

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x(t)\mathbf{III}_T(t),$$

donde  $\mathbf{III}_T\{\phi\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT)$  es el tren de impulsos de periodo  $T$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \widehat{x}_s(\xi) &= \frac{1}{2\pi}(\widehat{x} * \widehat{\mathbf{III}}_T)(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \widehat{x} * \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\cdot - \frac{2\pi}{T}n) \right) (\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \widehat{x} * \delta(\cdot - \frac{2\pi}{T}n) \right) (\xi) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\xi - \frac{2\pi}{T}n). \end{aligned}$$

Obviamente, la expresión anterior implica que  $\widehat{x}_s$  es una señal  $\frac{2\pi}{T}$ -periódica. Además, si  $T \leq \frac{\pi}{b}$  entonces  $[-b, b] \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$  y, por tanto, para cada valor  $\xi \in \mathbb{R}$  existe un único valor  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\xi - \frac{2\pi}{T}n \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ . Se sigue que, al ser  $\text{supp}(\widehat{x}) \subset [-b, b]$ , en la expresión

$$\widehat{x}_s(\xi) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\xi - \frac{2\pi}{T}n)$$

todos los sumandos se anulan excepto uno. De modo que  $\widehat{x}_s$  coincide con la extensión  $\frac{2\pi}{T}$ -periódica de la señal  $\frac{1}{T}\widehat{x}$  a lo largo del eje real. En particular,

$$\widehat{x}(\xi) = T\widehat{x}_s(\xi)\chi_{[-b,b]}(\xi), \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}$$

y, por tanto,

$$x(t) = T\mathcal{F}^{-1}(\widehat{x}_s(\xi)\chi_{[-b,b]}(\xi))(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se sigue que  $x$  queda totalmente determinada a partir de  $x_s$  y, por tanto, a partir de los valores muestrales  $\{x(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Además, si  $T = \frac{\pi}{b}$ , entonces

$$\begin{aligned} \widehat{x}(\xi) &= \frac{\pi}{b}\widehat{x}_s(\xi)\chi_{[-b,b]} \\ &= \frac{\pi}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right)\widehat{\delta\left(\cdot - \frac{n\pi}{b}\right)}(\xi)\chi_{[-b,b]}(\xi) \\ &= \frac{\pi}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right)\exp\left(-\frac{n\pi}{b}\mathbf{i}\xi\right)\chi_{[-b,b]}(\xi). \end{aligned}$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Por tanto,

$$x(t) = \frac{\pi}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right)\mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(-\frac{n\pi}{b}\mathbf{i}\xi\right)\chi_{[-b,b]}(\xi)\right)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n\pi}{b}\right)\frac{\sin(bt - n\pi)}{bt - n\pi},$$

que es lo que queríamos demostrar. □

A continuación incluimos un programa de Matlab en el que se ha implementado el teorema del muestreo que acabamos de probar. En particular, dicho programa se ejecuta con la orden **muestreoanalogico(func,N,b,M)**. Y hace lo siguiente: Dada  $x(t)$  una función que hemos implementado en un fichero de Matlab de nombre **func** y supuesto que  $b$  es su ancho de banda, el programa calcula las muestras  $\{x(kT)\}_{k=-N}^N$ , con  $T = \pi/b$ , y las utiliza para calcular la suma parcial enésima de la serie cardinal  $xrec_N(t) = \sum_{k=-N}^N x(kT) \text{sinc}(bt/\pi - k)$  para  $t \in [-M, M]$  y representa los resultados obtenidos.

```
function s = muestreoanalogico(func,N,b,M)
% Esta función calcula los valores muestrales x(kT), k=-N,...,N, con T=pi/b, de la señal
% limitada x(t) (con ancho de banda <=b) y, a partir de dichos valores, la recupera en el
% con un espaciado dt = 0.01.
%
% func = Nombre del fichero que contiene la función x(t) que se va a muestrear. Dicha func
% admitir como entrada un vector (t_1,...,t_N) y producir como salida el vector (x(t_1),..
%
% N = Número de muestras a usar.
%
% Autores: J. M. Almira, A. E. Romero (2005).
%

close all; T=pi/b;
% A continuación obtenemos el manejador de función desde la cadena 'func'
funcion = str2func(func);
% (Esta sentencia no se puede usar en versiones anteriores a Matlab 7.0. A lo largo del pr
% se proponen los cambios adecuados para dichas versiones)

% Definimos los puntos muestrales
xp=(-(N*T)):T:(N*T);
% Evaluamos la función sobre las muestras. Si estamos con una versión de Matlab anterior
% podemos usar la sentencia:
% y=feval(func,xp);
y=funcion(xp);
% Definimos el eje temporal
dt=0.01; t=(-M):dt:M;
% Evaluamos la función en el eje temporal t.
% Si estamos con una versión de Matlab anterior a la 7.0, podemos usar la sentencia:
% z=feval(func,t);
z=funcion(t);
% Comenzamos el cálculo de la señal recuperada.
% Si estamos con una versión de Matlab anterior a la 7.0, podemos usar la sentencia:
% s = feval(func,0).* sinc((b/pi).*t);
s = funcion(0).* sinc((b/pi).*t);
% Realizamos el cálculo de la señal recuperada para todos los valores de t.
for k = 1:N;
    s = s + y(N+1+k).*sinc((b/pi).* (t-k*T))+...
        y(N+1-k).*sinc((b/pi).* (t+k*T));
```

```
end
% Dibujamos los resultados obtenidos.
figure; subplot(3,1,1); plot(t,s,'b', t, z, 'r'); xlabel('Señales original (rojo) y recuperada (azul)');
subplot(3,1,2); stem(xp,y); xlabel('Muestras tomadas');
subplot(3,1,3); plot(t,s-z,'b'); xlabel('error');
```

Utilizamos el programa anterior para exponer un ejemplo:

**Ejemplo 1** Tomamos  $x(t) = 10 \sin^3(t) \cos(t)$ . Si tenemos en cuenta que

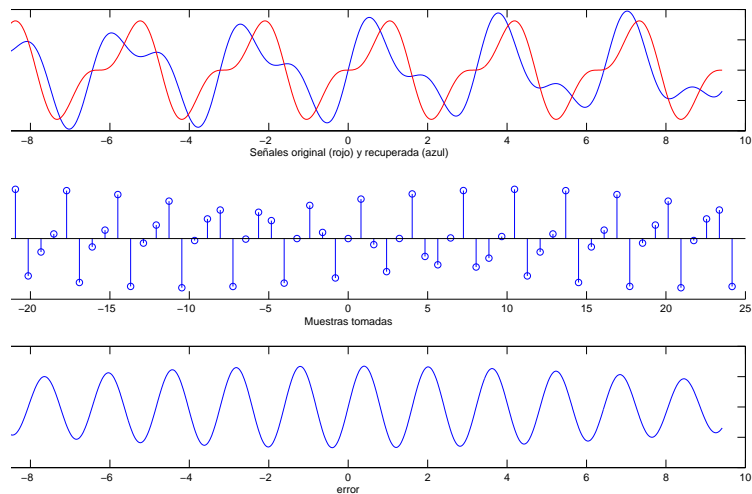
$$x(t) = 10 \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

entonces es fácil comprobar que el ancho de banda de  $x(t)$  es 4, puesto que, al desarrollar las operaciones que aparecen en el segundo miembro de la igualdad anterior, se obtiene que

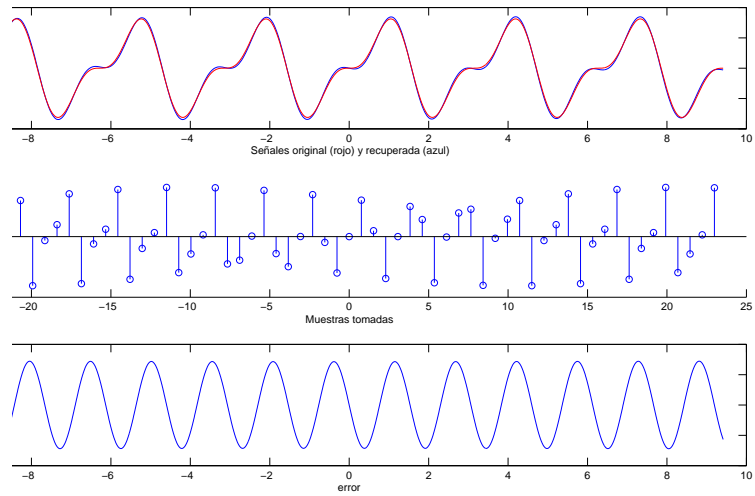
$$x(t) = \frac{10}{16} i (e^{it} - e^{-it})^2 (e^{it} - e^{-it}) (e^{it} + e^{-it}) = \frac{5}{8} i e^{4it} + \dots$$

Ahora, aplicamos a dicha función el programa **muestreoanalogico** para varias elecciones de  $N, b$  y  $M$ .

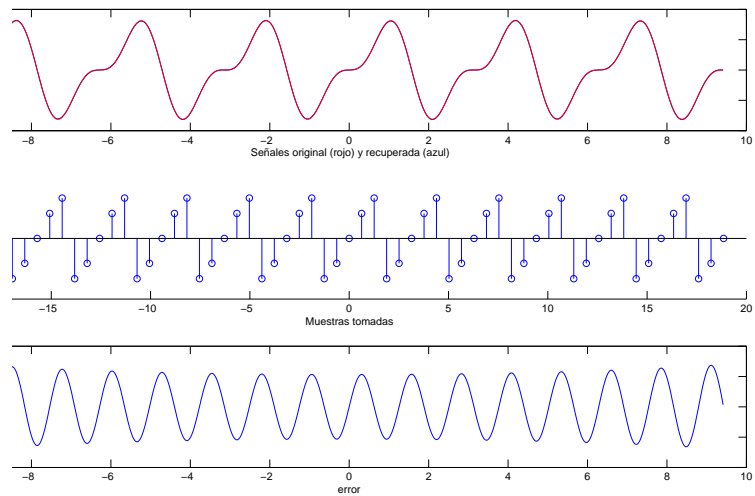
En particular, tomando  $N = 30$  y  $b = 3,9$ ,  $M = 3\pi$ , obtenemos los resultados que se reflejan en la siguiente figura:



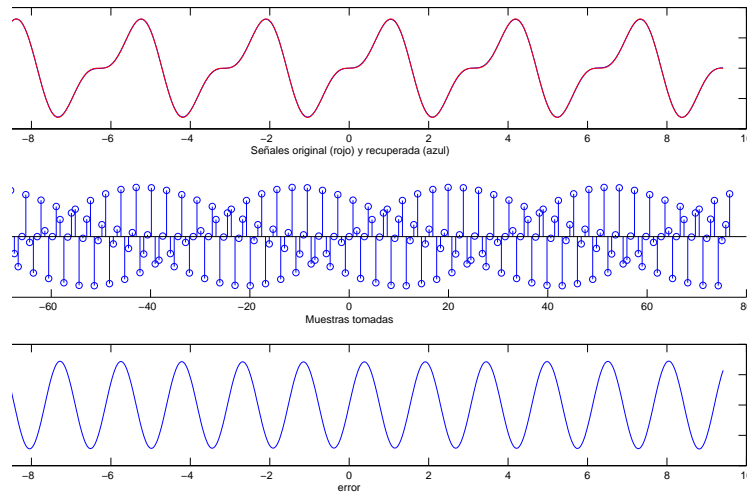
Es evidente que hemos obtenido un alias puesto que el ancho de banda elegido es inferior al ancho de banda de la señal  $x(t)$ . Ahora bien, si tomamos las mismas muestras y el mismo intervalo, pero con ancho de banda  $b = 4,1$  (ligeramente superior al ancho de banda de  $x(t)$ ), obtenemos:



En este caso la recuperación ha sido buena (aunque no excelente). Para mejorar el error podemos optar bien por imponer un ancho de banda aún mayor (en cuyo caso el error disminuye dentro del intervalo  $[-N\frac{\pi}{b}, N\frac{\pi}{b}]$ , aunque dicho intervalo se hace cada vez más pequeño) o bien aumentar el número de muestras. Veamos, por ejemplo, lo que sucede si tomamos  $b = 5$ :



y si tomamos  $b = 4,1$  pero  $N = 100$ :



## Referencias

- [1] **J. M. Almira**, An introduction to Fourier Series and Signal Processing, Technische Universität Chemnitz, Preprint 2001-13 (2001).
- [2] **J. Arias de Reyna**, *Pointwise convergence of Fourier Series*, Springer-Verlag, 2002.
- [3] **N. Aronszajn**, La théorie des noyaux reproduisants et ses applications, Proc. Cambridge Phil. Soc. **39** (1943) 133-153.
- [4] **J. J. Benedetto**, Irregular sampling and frames, in *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (ed.) Academic Press (1992), 445-507.
- [5] **R. P. Boas**, *Entire Functions*, Academic Press, 1954.
- [6] **S. Bochner**, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza Universidad **689**, Alianza Ed. (1991).
- [7] **W. Bolton**, *Laplace and Z-transforms*, Logman (1998).
- [8] **F. Bombal**, Laurent Schwartz: El matemático que quería cambiar el mundo, La Gaceta de la R.S.M.E. **6** 1 (2003)
- [9] **R. M. Bracewell**, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series (1965).
- [10] **J. L. Brown**, On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the band-pass sampling theorem, J. Math. Anal. Appl **18** (1967) 75-84.
- [11] **J. R. Buck, M. M. Daniel, A. C. Singer**, *Computer Explorations in Signals and Systems Using Matlab*, Signal Processing Series, Prentice Hall (1997).

- [12] **P. L. Butzer, R. L. Stens**, Sampling theory for non-necessarily band-limited functions: a historical overview, *SIAM Rev.* **34** (1992) 40-53.
- [13] **A. Cañada Villar**, *Series de Fourier y Aplicaciones. Un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos*, Ed. Pirámide, 2002.
- [14] **D. C. Champeney**, *A handbook of Fourier Theorems*, Cambridge university Press (1987).
- [15] **R. Duffin, A. Shaeffer**, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952) 341-366.
- [16] **P.P.G. Dyke**, *An introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer (2001).
- [17] **J. W. Eaton et al.**, GNU Octave, disponible en [www.octave.org](http://www.octave.org).
- [18] **R. E. Edwards**, *Fourier series (A modern introduction) Vol 1*, Graduate Texts in Mathematics **64**, Springer (1979).
- [19] **K. Fan, O. Taussky, J. Todd**, Discrete analogs of inequalities of Wirtinger, *Monasch. Math.* **59** (1955) 73-90.
- [20] **G. B. Folland**, *Fourier analysis and its applications*, Brooks-Cole Publishing Co. (1992).
- [21] **S. Forcada**, *Introducción a la integral de Lebesgue*, Promociones y Publicaciones Universitarias, Barcelona, 1988.
- [22] Free Software Foundation, The GNU Scientific Library, disponible en <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [23] **R. A. Goldberg**, *Fourier transforms*, Cambridge University Press (1965).
- [24] **E. A. González-Velasco**, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic-Press (1995).
- [25] **H. G. Feichtinger, K. Gröchenig**, Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions, *J. of Math. Anal. Appl.* **167** (1992) 530-556.
- [26] **K. Gröchenig**, Reconstruction algorithms in irregular sampling, *Math. Compt.* **59** (1992) 181-194.
- [27] **K. Gröchenig**, A discrete theory of irregular sampling, *Linear Alg. and its Appl.* **193** (1993) 129-150.
- [28] **K. Gröchenig**, Irregular sampling, Toeplitz matrices and the approximation of entire functions of exponential type, *Math. of Comp.* **68** (1999) 749-765.
- [29] **R. W. Hamming**, *Digital Filters (Third Edition)*, Dover (1998).
- [30] **G. Hardy, W. W. Rogosinski**, *Fourier Series*, Dover (1999).

- [31] **G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya**, *Inequalities*, (2nd Edition) Cambridge University Press, 1952.
- [32] **S. Haykin, B. Van Veen**, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons Inc. (1999).
- [33] **J. R. Higgins**, *Sampling Theory in Fourier Analysis and Signal Analysis*, Oxford University Press (1996).
- [34] **P. Jacklam**, MATLAB array manipulation tips and tricks, disponible en <http://home.online.no/~pjacklam/matlab/doc/mtt/doc/mtt.pdf>.
- [35] **M. I. Kadec**, The exact value of the Paley-Wiener constant, *Soviet. Math. Dokl.* **5** (1964) 559-561.
- [36] **D. W. Kammler**, *A first course in Fourier Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey (2000).
- [37] **Y. Katznelson**, *An introduction to Harmonic Analysis*, Dover (1976).
- [38] **V. A. Kotelnikov**, On the transmission capacity of ether and wire electrocominucations, *Izd. Red. Upr. Svgazi RKKA*, 1933.
- [39] **S. G. Krantz**, *A panorama of Harmonic Analysis*, *The Carus Math. Monographs* **27** Math. Assoc. Amer. (1999)
- [40] **A. Kufner, J. Kadled**, *Fourier Series*, Academia Praha (1971).
- [41] **P. Lancaster, K. Salkauskas**, *Transform Methods in Applied Mathematics*, Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, John-Wiley & Sons (1996).
- [42] **C. Lanczos**, *Discourse on Fourier Series*, Olyver and Boyd, Edinburg, 1966.
- [43] **H. Landau**, Neccesary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, *Acta Math.* **117** (1967) 37-52.
- [44] **R. Lasser**, *Introduction to Fourier Series*, Marcel Dekker, 1996.
- [45] **T. Love**, Matlab vectorisation tricks, disponible en <http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/tpl/programs/Matlab/tricks.html>.
- [46] **S. Mallat**, *A wavelet tour of signal processing*, 2<sup>a</sup> Ed., Academic Press (1999).
- [47] **J. B. Mariño, F. Vallverdú, J. A. Rodríguez, A. Moreno**, *Tratamiento digital de la señal*, Ed. UPC (1999).
- [48] **P. Marziliano, M. Vetterli**, Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations, *IEEE Transactions on Signal Proccesing* **48** 12 (2000) 3462-3471.
- [49] The MathWorks, MATLAB website, [www.mathworks.com](http://www.mathworks.com).

- [50] The MathWorks, Code Vectorization Guide, disponible en <http://www.mathworks.com/support/tech-notes/1100/1109.html>.
- [51] **C. Neumann**, Zur theorie des logarithmischen und des Newtonschen Potentials, Ber. Verh. Math.-Phys. Classe Königl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **32** (1870) 49-56, 264-321.
- [52] **C. Neumann**, *Über die methode des Arithmetischen Mittels*, Hirzel, Leipzig, 1887.
- [53] **A. Papoulis**, *Sistemas digitales y analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación espectral*, Marcombo (1986).
- [54] **J. R. Partington**, *Interpolation, Identification and Sampling*, Oxford University Press (1997).
- [55] **A. Pinkus**, Weierstrass and Approximation Theory, J. Approx. theory **107** (2000) 1-66.
- [56] **A. Pinkus, S. Zafrany**, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge University Press (1997).
- [57] **W. H. Press et al.**, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge Univ. Press, 1986.
- [58] **M. H. Protter, C.B. Morrey**, *Análisis Real*, Editorial AC, 1986.
- [59] **V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn**, *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific Publishing Co., (1999).
- [60] **W. Rudin**, *Análisis real y complejo*, Editorial Alhambra, 1985.
- [61] **D. E. Rutherford**, Some continuant determinants arising in Physics and Chemistry, II. Proc. Royal Soc. Edinburgh **62A** (1947) 229-236.
- [62] **K. Seip**, On the connection between exponential bases and certain related sequences in  $L^2(-\pi, \pi)$ , J. Functional Anal. **130** (1995) 131-160.
- [63] **H. Shapiro**, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Mathematics **187**, Springer-Verlag (1971).
- [64] **I. Stewart, D. Tall**, *Complex Analysis*, Cambridge Univ. Press (1983).
- [65] **O. Steinbach, W. L. Wendland**, On C. Neumann's method for second order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries, J. of Math. Anal. and Appl. **262** (2001) 733-748.
- [66] **G. Strang**, A proposal for Toeplitz matrix calculations, Stud. Appl. Math. **74** (1986) 171-176.
- [67] **T. Strohmer**, Efficient methods for digital signal and image reconstruction from nonuniform samples, Ph. Thesis, Viena, 1993.
- [68] **M. Unser**, Sampling: 50 years after Shannon, Proc. IEEE **88** 4 (2000) 569-587.
- [69] **J. I. Richards, H. K. Youn**, *Theory of Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.



- [70] **D.A. Watt**, "Programming Language Concepts and Paradigms". Prentice Hall International, 1991
- [71] **R. Young**, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, CRC Press, 1993.
- [72] **A. I. Zayed**, *Advances in Shannon's sampling theory*, CRC Press, 1993.