Señales y sistemas. Causalidad. Estabilidad*

1. Primeros conceptos

Definición 1 *Una **señal** es una cantidad física que varía con el tiempo, el espacio, o cualquier otra variable o variables independientes. Es decir: una señal no es más que una función de una o varias variables,*

$$\mathbf{x} : \Omega \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m; \quad t \to \mathbf{x}(t).$$

Si la dependencia de la señal respecto de sus variables no es determinista, diremos que la señal es aleatoria.[1]

El tratamiento matemático de señales aleatorias requiere principalmente técnicas propias del Cálculo de Probabilidades y de la Estadística. El tratamiento matemático de señales deterministas, requiere fundamentalmente conceptos del Análisis Matemático. Mientras no se diga lo contrario, trabajamos con señales deterministas.

Para fijar conceptos, vamos a pensar en principio que estamos interesados en señales que dependen de una única variable (el tiempo), la cual supondremos real, y que toman valores en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición 2 *Diremos que la señal $x(t)$ es **analógica** si la variable t admite valores en un intervalo (con interior no vacío) de $\mathbb{R}$. Diremos que la señal es **discreta** si t toma valores en $\mathbb{Z}$ (o, de manera más general, si t toma valores únicamente en un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$).*

La notación estándar (que usamos en lo sucesivo) para señales de tiempo continuo (o analógicas) es $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, etc. y para señales discretas es $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{y}(n)$, etc.[2]

Las señales modelizan multitud de procesos físicos (desde la velocidad de una partícula hasta los resultados de un electrocardiograma), y es por ello que su estudio sea interesante para una amplia comunidad científica (ingenieros, matemáticos, físicos, etc.).

*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto del autor: J.M. Almira, "Matemáticas para la recuperación de señales", Grupo Editorial Universitario, 2005.

[1] En realidad, muy pronto vamos a ampliar este concepto, al incluir en el universo de las señales a las llamadas "funciones generalizadas" o "distribuciones atemperadas". Pero por ahora nos conformamos con esta primera aproximación al concepto de señal.

[2] También usaremos, para el caso discreto, la notación $\mathbf{x}[n]$, que es muy usual en contextos ingenieriles.

Definición 3 *Dada una señal analógica $\mathbf{x}(t)$, definida sobre toda la recta real, llamamos* ***energía*** *de la señal a la cantidad*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{x}(t)|^2 dt$$

(diremos que $\mathbf{x}$ es de energía finita si $\mathbf{E}(\mathbf{x}) < \infty$) y llamamos ***potencia media*** *de la señal a la cantidad*

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^{M} |\mathbf{x}(t)|^2 dt$$

(diremos que $\mathbf{x}$ es de potencia media finita si $\mathbf{P}(\mathbf{x}) < \infty$).[3]

Los conceptos anteriores están justificados porque en muchos contextos físicos (en los que los conceptos de energía y potencia poseen significado), se satisfacen las expresiones anteriores. Evidentemente, existen conceptos análogos para el caso de señales discretas ($\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$).

Definición 4 *Definimos la energía y la potencia media de la señal discreta $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mediante el uso de las expresiones:*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathbf{x}(n)|^2 \text{ y } \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |\mathbf{x}(n)|^2.$$

La señal discreta $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ se dice de energía finita si $\mathbf{E}(\mathbf{x}) < \infty$ y de potencia media finita si $\mathbf{P}(\mathbf{x}) < \infty$.

Definición 5 *Entendemos por* ***sistema*** *cualquier proceso que transforma cierta clase de señales (de entrada) en otra clase de señales (de salida). Es decir, en términos matemáticos un sistema es un operador $L : C_1 \to C_2$ ($x \to Lx$), donde C_1 y C_2 son dos clases de señales prefijadas (e.g., $C_1 = C_2 = \{$señales de energía finita$\}$).*

Definición 6 *Diremos que el sistema $L : C_1 \to C_2$ es* ***analógico*** *si tanto C_1 como C_2 son espacios de señales analógicas. De igual modo, diremos que el sistema es* ***discreto*** *si tanto C_1 como C_2 son espacios de señales discretas, y que es un sistema* ***híbrido*** *si uno de los espacios C_1, C_2 contiene solamente señales analógicas y el otro señales discretas.*

Algunas propiedades importantes de los sistemas son las siguientes:

Definición 7 *Decimos que el sistema analógico L es* ***invariante en en el tiempo*** *si la identidad*

$$L(\mathbf{x}(\cdot - s))(t) = (L\mathbf{x})(t - s)$$

se satisface para todo $t, s \in \mathbb{R}$ (como es natural, la correspondiente definición para el caso discreto es: $L(x(\cdot - k))(n) = (Lx)(n - k)$; $\forall n, k \in \mathbb{Z}$).

[3] Las integrales que aparecen a lo largo de este trabajo son siempre en el sentido de Lebesgue.

Definición 8 *Decimos que el sistema analógico L es **causal** si*

$$\mathbf{x}_{(-\infty,t]} = \mathbf{y}_{(-\infty,t]} \Rightarrow (L\mathbf{x})(t) = (L\mathbf{y})(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

*y que el sistema discreto L es **causal** si $\forall n \in \mathbb{Z}$ se tiene que si*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, k \leq n : \mathbf{x}[k] = \mathbf{y}[k]$$

entonces,

$$(L\mathbf{x})[n] = (L\mathbf{y})[n].$$

Definición 9 *Decimos que el sistema analógico L **tiene memoria** si el valor $(Lx)(t)$ depende de los valores de $x(t)$ para algunos $t' < t$ (en otro caso, decimos que el sistema no tiene memoria).[Una definición similar se puede dar para los sistemas discretos]*

Definición 10 *Decimos que el sistema L es **lineal** si $\mathbf{C}_1$= $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{C}_2 = \mathbf{E}_2$ son espacios vectoriales y $L : \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ es un operador lineal. Además, en el caso de que estos espacios vectoriales tengan alguna topología, diremos que el sistema lineal es **estable** si, visto como operador, es una aplicación continua entre estos espacios. [En el caso de que los espacios sean normados, es importante recordar que la continuidad de un operador lineal equivale a la continuidad en el origen y, también, a la acotación del operador]*

De especial interés son los sistemas lineales e invariantes en el tiempo (abreviadamente, sistemas LTI)[4].

Definición 11 *Llamamos **filtro** a todo sistema LTI estable. Si el sistema es discreto decimos que el filtro es discreto. Análogamente, si el sistema es analógico, decimos que el filtro es analógico.*

2. Algunas señales importantes

Existen algunas señales elementales que aparecen frecuentemente en las aplicaciones y, de hecho, sirven para representar otras señales. Algunas de ellas son las siguientes:

Ejemplo 1 *La señal **escalón unidad** (de tiempo continuo) se define como*

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

*y es útil, por ejemplo, para representar las señales **signo***

$$\mathbf{sgn}(t) = -1 + 2u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

[4]La discusión anterior nos lleva inevitablemente a la conclusión de que, desde un punto de vista estrictamente matemático, la teoría de señales y sistemas se puede formular completamente en términos de Análisis Funcional. Está claro que nuestro interés se centrará en el estudio de operadores lineales (normalmente, entre espacios de Hilbert), con propiedades matemáticas que poseen un significado especial en términos de señales.

*y **pulso rectangular***

$$\mathbf{rect}(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t-1)) = \begin{cases} 1 & t \in (-1,1) \\ \frac{1}{4} & t \in \{-1,1\} \\ 0 & t \notin [-1,1] \end{cases}$$

*Otra señal que podemos representar fácilmente utilizando el escalón unidad es la señal **rampa***

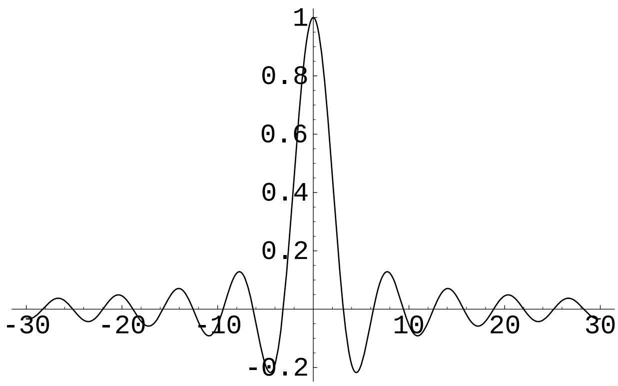
$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(s)ds = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}.$$

*La función escalón unidad es frecuentemente denominada **función de Heaviside** tanto por los matemáticos como por los físicos.*

Ejemplo 2 *La señal **muestreo** (también llamada **seno cardinal**) está dada por*

$$\mathbf{sam}(t) := \textit{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

y será muy útil para la representación de un tipo especial de señales de tiempo continuo (las señales de banda limitada) en términos de sus valores en un conjunto discreto de puntos (por ello llamamos función muestreo a $\mathbf{sam}(t)$). La notación proviene del inglés, donde "muestreo" se dice "sampling". La función muestreo está dibujada en la figura:



Ejemplo 3 *Consideremos la señal*

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\sin(\pi t/\varepsilon)}{\pi t/\varepsilon}\right)^2 & t \neq 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & t = 0 \end{cases}$$

cuya gráfica, para $\varepsilon = 0{,}5$, es de la forma:

Si hacemos $\varepsilon \to 0^+$, entonces se tendrá que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

Ahora bien, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p_\varepsilon(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\sin(\pi t/\varepsilon)}{\pi t/\varepsilon}\right)^2 dt \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin s}{s}\right)^2 ds = 1 \text{ (donde se ha hecho } s = \pi t/\varepsilon)\end{aligned}$$

Esto podría llevarnos a considerar que existe una cierta "función" límite $\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} p_\varepsilon(t)$ tal que $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$ pero, siendo $\delta(0) = \infty$, se tiene que también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} p_\varepsilon(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 1 = 1.$$

*Además, nuestra función límite sería par, pues lo es $p_\varepsilon(t)$ para todo $\varepsilon > 0$. Llamamos a dicha "función límite" la señal **impulso unidad** (también llamada "Delta de Dirac", en honor de P. Dirac[5]). Evidentemente, $\delta(t)$ no es una función en el sentido ordinario de la palabra. En realidad es un funcional $\delta : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ que lleva ciertas funciones especiales ϕ (las funciones de Schwartz $\phi \in \mathbb{S}$) sobre su evaluación en el cero. Es decir: $\delta(\phi) = \phi(0)$ para toda $\phi \in \mathbb{S}$.*

3. Funciones generalizadas. Transformaciones elementales de las señales

Las **transformaciones elementales** de señales a las que hace referencia el título de esta sección son: el desplazamiento de una señal en el tiempo $x(t) \to y(t) = x(t-a)$, el cambio de escala $x(t) \to y(t) = x(at)$, y la derivación $x(t) \to x'(t)$. En el caso de señales que se correspondan con funciones en el sentido ordinario de la palabra, se trata efectivamente de cambios sencillos. Sin embargo, para señales como la delta de Dirac, es necesario interpretar las cosas adecuadamente, y, de hecho, hay que ser cauteloso con los cálculos. Para abordar estas cuestiones es, pues, necesario introducir cierto formalismo.

Las funciones ordinarias llevan puntos a puntos (i.e., van de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ o de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$). Nosotros, para introducir nuestras "funciones generalizadas", lo que haremos será tratar como funciones (y, de hecho, también lo son) a ciertos funcionales $L : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, donde $\mathbb{S}$ denota el espacio de las **funciones rápidamente decrecientes** de Schwartz,

$$\mathbb{S} = \left\{\phi \in \mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}) : \lim_{t\to\pm\infty} t^n \phi^{(m)}(t) = 0, n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

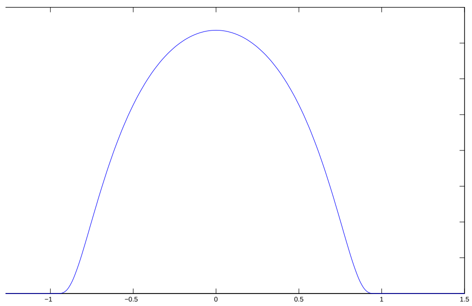
Para empezar, veamos que $\mathbb{S}$ contiene funciones no triviales (es claro que $0 \in \mathbb{S}$). esto se consige simplemente observando que $x(t) = e^{-t^2} \in \mathbb{S}$ (lo que se deja como ejercicio). Otra función interesante

[5] P. Dirac (1902-1984). Físico inglés cuyos cálculos apuntaban hacia la existencia de partículas con energías negativas, lo que le llevó a sugerir la existencia de antipartículas asociadas al electrón. Estas partículas fueron descubiertas posteriormente por Carl Anderson en 1932, y reciben el nombre de positrones. Dirac también desarrolló una versión tensorial de la ecuación de Schrödinger, conocida como la ecuación de Dirac, que es correcta desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad. Recibió el premio Nobel de Física en 1933 por sus trabajos sobre antipartículas y mecánica de ondas. Por otra parte, se le considera precursor de la Teoría de Distribuciones, que fue desarrollada posteriormente por L Schwartz

que pertenece a la clase de Schwartz es

$$v(t) = \begin{cases} 0 & |t| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \end{cases},$$

cuya gráfica está representada en la siguiente figura:



De hecho, $\mathbb{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{C}(\mathbb{R})$ (i.e., si $x(t), y(t) \in \mathbb{S}$ y $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $ax(t)+by(t) \in \mathbb{S}$). Es más: la clase de Schwartz es cerrada para otras muchas operaciones como: cambio de escala, desplazamiento, multiplicación por potencias t^n y por exponeciales $e^{\mathbf{i}\theta t}$, derivaciones sucesivas, etc.

Por otra parte, decimos que la función $x(t)$ es de crecimiento lento si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(t)}{t^n} = 0$$

para alguna elección de $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, los polinomios son funciones de crecimiento lento.

Denotamos por **CSG** a la clase de las **funciones continuas y de crecimiento lento** ("continuous slowly growing", en inglés). El siguiente resultado técnico es sencillo de demostrar:

Proposición 1 *Supongamos que $x(t) \in$ **CSG** y $\phi(t) \in \mathbb{S}$. Entonces $h(t) = x(t)\phi(t)$ es una señal continua acotada absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y se anula en $\pm\infty$.*

En vista del anterior resultado, para cada $x(t) \in$ **CSG** podemos considerar el funcional $L_x : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$,

$$L_x(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t)dt$$

Además, si $x(t)$ fuese derivable y se tuviese que $x(t) \in$ **CSG**, entonces podríamos realizar la siguiente integración por partes:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\phi(t)dt &= \lim_{b\to\infty,\ a\to-\infty} \int_a^b x'(t)\phi(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty,\ a\to-\infty} \left(x(t)\phi(t)]_a^b - \int_a^b x(t)\phi'(t)dt \right) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi'(t)dt \ \text{ (para toda } \phi \in \mathbb{S}). \end{aligned}$$

De esta forma, podríamos representar $x'(t)$ mediante el funcional $L_{x'} : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$,

$$L_{x'}(\phi) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi'(t)dt.$$

Ahora bien, el segundo miembro de la última igualdad tiene completo sentido para toda elección de $x(t) \in \mathbf{CSG}$ y $\phi(t) \in \mathbb{S}$, sin necesidad de asumir la deribabilidad ordinaria de la señal $x(t)$. Ahora, la idea clave para definir funciones generalizadas es: identificar la función x con el funcional L_x. De esta forma, podemos introducir los siguientes conceptos[6]:

Definición 12 *Llamamos **derivada generalizada** de la función $x(t) \in \mathbf{CSG}$ al funcional*

$$x'\{\phi\} = L_{x'}(\phi) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi'(t)dt.$$

Definición 13 *La derivada generalizada n-ésima de $x(t) \in \mathbf{CSG}$ está dada por:*

$$x^{(n)}\{\phi\} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi^{(n)}(t)dt.$$

Definición 14 *Decimos que h es una **función generalizada** si es la derivada n-ésima de alguna función $x(t) \in \mathbf{CSG}$. Denotamos por $\mathbb{G}$ el espacio de las funciones generalizadas.*

Ejemplo 4 (Funciones de Heaviside y delta de Dirac como funciones generalizadas) *A continuación, pasamos a construir formalmente las funciones de Heaviside y delta de Dirac, como funciones generalizadas. Para ello, comenzamos observando que la función rampa*

$$\mathbf{r}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(s)ds = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

satisface obviamente $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{CSG}$ y, por tanto, admite una representación como función generalizada:

$$\mathbf{r}\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t)\phi(t)dt = \int_{0}^{\infty} t\phi(t)dt.$$

Su derivada generalizada es, pues,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'\{\phi\} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t)\phi'(t)dt = -\int_{0}^{\infty} t\phi'(t)dt \\
&= -\, t\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \phi(t)dt \\
&= \int_{0}^{\infty} \phi(t)dt.
\end{aligned}$$

[6] Estos formalismos, que dieron lugar a la llamada Teoría de Distribuciones, fueron introducidos en 1948 por el matemático francés L. Schwartz (1915-2002). Precisamente por esta importante contribución, se le concedió en 1950 la medalla Fields. Schwartz se graduó en la École Normale Supérieure de París en 1937, y se doctoró posteriormente en la Universidad de Strasburgo con un trabajo sobre el Teorema de Müntz. La Teoría de Distribuciones es una importante generalización del Cálculo Diferencial e Integral, basada en la introducción de un concepto muy general de función, que permite extender los procesos de derivación e integración a clases muy amplias de objetos matemáticos, logrando de esta forma una nueva interpretación de las ecuaciones diferenciales e integrales del Análisis Matemático, de sus soluciones. En La Gaceta de la R.S.M.E., el profesor Bombal ha publicado recientemente un interesante trabajo sobre la vida y obra de Schwartz (ver [8]).

Esto significa que $\mathbf{r}'\{\phi\} = \mathbf{u}\{\phi\}$ *para todo* $\phi \in \mathbb{S}$*, donde* $\mathbf{u}(t)$ *denota la función de Heaviside. Si tomamos ahora la segunda derivada generalizada de* $\mathbf{r}$*, obtenemos que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''\{\phi\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t)\phi''(t)dt = \int_{0}^{\infty} t\phi''(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty} (t\phi' - \phi)'(t)dt = \lim_{t\to\infty} (t\phi' - \phi)(t) + \phi(0) \\ &= \phi(0) \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathbb{S}$ *(donde se ha utilizado que se satisface la relación*

$$(t\phi' - \phi)'(t) = \phi'(t) + t\phi''(t) - \phi'(t) = t\phi''(t)$$

para toda función $\phi \in \mathbb{S}$*). Evidentemente, acabamos de dar sentido (de función generalizada) a la función delta de Dirac, que es:* $\delta = \mathbf{r}''$ *(la segunda derivada generalizada de la función rampa).*

Ejemplo 5 ***(Derivadas sucesivas (generalizadas) de la delta de Dirac).*** *Como* $\delta = \mathbf{r}''$*, ahora podemos calcular formalmente las derivadas sucesivas (generalizadas) de la función delta de Dirac:*

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}\{\phi\} &= \mathbf{r}^{(n+2)}\{\phi\} = (-1)^{n+2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r}(t)\phi^{(n+2)}(t)dt \\ &= (-1)^n \int_{0}^{\infty} t\phi^{(n+2)}(t)dt \\ &= (-1)^n \int_{0}^{\infty} (t\phi^{(n+1)} - \phi^{(n+1)})'(t)dt \\ &= (-1)^n \left(\lim_{t\to\infty} (t\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)})'(t) + \phi^{(n)}(0) \right) \\ &= (-1)^n \phi^{(n)}(0), \end{aligned}$$

para toda función $\phi \in \mathbb{S}$.

Ejemplo 6 ***(El Tren de impulsos -o función peine- III).*** *Un ejemplo importante de señal generalizada es el tren de impulsos* $\mathbf{III}$*, que, a cada* $\phi \in \mathbb{S}$ *le hace corresponder el número:*

$$\mathbf{III}\{\phi\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n).$$

Ahora, veamos que $\mathbf{III}$ *es, efectivamente, una función generalizada. Para ello, consideramos la función parte entera de t,* $[t] = m$*, si* $t \in [m, m+1)$ *y* $m \in \mathbb{Z}$*, y tomamos*

$$q(t) = \int_0^t [s]ds \ (t \in \mathbb{R}).$$

Es claro que $q(t) \in \mathbf{CSG}$*, y, por tanto,* $q(t)$ *es una función generalizada,*

$$q\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\phi(t)dt$$

Veamos ahora que $\mathbf{III} = q''$*, donde tomamos la derivada en sentido generalizado. Por definición,*

$$\begin{aligned}
q''\{\phi\} &= (-1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} q(t)\phi''(t)dt \\
&= q(t)\phi'(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} q'(t)\phi'(t)dt \textit{ (la derivada ordinaria de } q, \textit{ existe)} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} q'(t)\phi'(t)dt \\
&= -\sum_{m=-\infty}^{\infty} m \int_{m}^{m+1} \phi'(t)dt \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} m\left\{\phi(m+1) - \phi(m)\right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi(m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{(m-1)\phi(m) - m\phi(m+1)\right\} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi(m) = \mathbf{III}\{\phi\}.
\end{aligned}$$

3.1. Transformaciones elementales de funciones generalizadas

Aunque ya hemos tratado como un ”espacio” a la clase $\mathbb{G}$ de las funciones generalizadas, lo cierto es que aún no hemos demostrado que tal clase forme de hecho un espacio vectorial. Puesto que los elementos de $\mathbb{G}$ son funcionales $x : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$, lo natural es que definamos su suma, y la multiplicación por escalares mediante las fórmulas:

$$(x+y)\{\phi\} = x\{\phi\} + y\{\phi\} \text{ y, } (ax)\{\phi\} = a(x\{\phi\}),$$

respectivamente. Ahora bien, si $x, y \in \mathbb{G}$ y $a \in \mathbb{C}$, ¿por qué $x+y, ax \in \mathbb{G}$?. (Dejamos como ejercicio (simple) la respuesta a esta pregunta).

Ahora bien, otras transformaciones sencillas de las funciones ordinarias, tal como los desplazamientos y las dilataciones, requieren una definición nueva para el contexto de las funciones generalizadas[7]. Las correspondientes definiciones son, por fortuna, fáciles de obtener mediante un cambio de variable adecuado en la representación integral de cada función generalizada. Así, podemos tener en cuenta las identidades

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t+a)\phi(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\phi(t-a)dt = x\{\phi(t-a)\}, \text{ y} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\phi(t)dt &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\phi(s/a)ds = \frac{1}{|a|}x\{\phi(t/a)\} \text{ (para } a \neq 0)
\end{aligned}$$

[7]Las funciones generalizadas son de gran utilidad en teoría de señales. En particular, todas las operaciones elementales del Análisis de Fourier poseen una versión adecuada para trabajar con funciones generalizadas, y algunas de las funciones que hemos introducido poseen propiedades importantes. Por ejemplo, se puede demostrar (ver [36], [9] o la sección sobre la transformada de Fourier generalizada de este texto) que, para cada $T > 0$, si denotamos como $\mathbf{III}_T$ al tren de impulsos $\mathbf{III}_T\{\phi\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT)$, entonces la transformada de Fourier generalizada $\mathcal{F}$ satisface $\mathcal{F}(\mathbf{III}_T) = \frac{2\pi}{T}\mathbf{III}_{\frac{2\pi}{T}}$ y, como veremos, esta propiedad es básica para la demostración de un teorema del muestreo para funciones generalizadas.

para definir las operaciones de desplazamiento y dilatación de la función generalizada x mediante las fórmulas

$$x(\cdot + a)\{\phi\} = x\{\phi(t-a)\};\, x \in \mathbb{G},\, a \in \mathbb{R} \text{ y } \phi \in \mathbb{S}$$

y

$$x(\cdot a)\{\phi\} = \frac{1}{|a|}x\{\phi(t/a)\};\, x \in \mathbb{G},\, a \in \mathbb{R} \text{ y } \phi \in \mathbb{S}$$

Ejemplo 7 (Propiedad de desplazamiento de la delta de Dirac) *Vamos a calcular el funcional que corresponde al desplazamiento $\delta(\cdot - a)$ de la delta de Dirac:*

$$\delta(\cdot - a)\{\phi\} = \delta\{\phi(t+a)\} = \phi(a)$$

Esto, en la notación integral, se escribe como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\phi(t)dt = \phi(a),$$

y se suele llamar "propiedad de desplazamiento de la delta de Dirac".

Ejemplo 8 (Propiedad de dilatación de la delta de Dirac) *Vamos a calcular el funcional que corresponde a la dilatación $\delta(a\cdot)$ de la delta de Dirac:*

$$\delta(\cdot a)\{\phi\} = \frac{1}{|a|}\delta\{\phi(t/a)\} = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

3.2. Límites de sucesiones (y series) de funciones generalizadas

Si queremos tratar el problema de la representación de una señal (que, en principio, es una función generalizada arbitraria) como superposición de un conjunto (posiblemente infinito) de ciertas señales más sencillas, es claro que debemos explicar en qué sentido se entiende dicha superposición. Esto nos lleva directamente a la necesidad de definir límites de sucesiones y de series de funciones generalizadas.

Definición 15 *Sea $\{h_i\}_{i=0}^{N} \subset \mathbb{G}$ una sucesión de funciones generalizadas y sea $h \in \mathbb{G}$ otra función generalizada. Decimos que $\lim_{N\to\infty} h_i = h$ en sentido débil (i.e., en sentido generalizado) si $\lim_{N\to\infty} h_i\{\phi\} = h\{\phi\}$ para toda señal de decrecimiento rápido $\phi \in \mathbb{S}$. Análogamente, decimos que $h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i$ en sentido débil si $h\{\phi\} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i\{\phi\}$ para toda señal $\phi \in \mathbb{S}$. Finalmente, si $\{h_t\}_{t\in\Delta}$ es una familia de funciones generalizadas (donde (Δ, d) es un espacio métrico[8]) entonces decimos que $\lim_{t\to t_0} h_t = h$ si para toda $\phi \in \mathbb{S}$ se tiene que $\lim_{t\to t_0} h_t\{\phi\} = h\{\phi\}$.*

Veamos algunos ejemplos sencillos.

[8] Evidentemente, basta que $(\Delta, \leq)$ sea un conjunto dirigido, lo que basta para dar sentido a la expresión $t \to t_0$ para valores $t_0 \in \Delta$.

Ejemplo 9 *La función delta de Dirac se puede expresar como el siguiente límite débil:*

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} n\mathbf{rect}(2nt)$$

Veámoslo. Si $h_n(t) = n\mathbf{rect}(2nt)$ *entonces podemos interpretar* h_n *como la siguiente función generalizada:*

$$h_n\{\phi\} = \int_{-\infty}^{\infty} n\mathbf{rect}(2nt)\phi(t)dt = n\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \phi(t)dt = \phi(\xi_n) \text{ donde } |\xi_n| \leq 1/2n,$$

y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} h_n\{\phi\} = \lim_{n\to\infty} \phi(\xi_n) = \phi(0) = \delta\{\phi\}$*, que es lo que buscábamos.*

Ejemplo 10 *Como se ha introducido un concepto general de límite para las funciones generalizadas y como, por otra parte, habíamos introducido también un concepto de derivada para dichas funciones, es importante que probemos que ambos conceptos son compatibles desde el punto de vista de que generalizan el concepto clásico de derivada. Así pues, vamos a demostrar que si* $h \in \mathbb{G}$*, entonces*

$$h' = \lim_{t\to 0} \frac{h(\cdot + t) - h(\cdot)}{t}.$$

Veámoslo. Tomamos $h_t(u) = (h(u+t) - h(u))/t$*. Tenemos que ver que* $\lim_{t\to 0} h_t\{\phi\} = h'\{\phi\} = -h\{\phi'\}$ *para todo* $\phi \in \mathbb{S}$*. Ahora bien, utilizando la propiedad de traslación de las funciones generalizadas, se ve claramente que*

$$h_t\{\phi\} + h\{\phi'\} = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\left(\phi(u-t) - \phi(u) + t\phi'(u)\right) du.$$

Si $g \in \mathbf{CSG}$ *es tal que* $h = g^{(n)}$ *(donde la derivada es en el sentido generalizado), entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\phi(u)du = h\{\phi\} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\phi^{(n)}(u)du,$$

de modo que

$$\begin{aligned} h_t\{\phi\} + h\{\phi'\} &= (-1)^n \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\left(\phi^{(n)}(u-t) - \phi^{(n)}(u) + t\phi^{(n+1)}(u)\right) du \\ &= (-1)^n \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\left(\int_0^t (t-s)\phi^{(n+2)}(u-s)ds\right) du \end{aligned}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(u)|}{(1+u^2)^m} du = M < \infty$ *y definimos, para cada* $H > 0$*,*

$$C(H) = \max_{u\in\mathbb{R}} (1 + (|u| + H)^2)^m |\phi^{(n+2)}(u)|.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)||\phi^{(n+2)}(u-s)|du \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(u)|}{(1+u^2)^m}(1+u^2)^m|\phi^{(n+2)}(u-s)|du \leq M \cdot C(H),$$

para $|u| \leq H$. *Se sigue que*

$$\begin{aligned} |h_t\{\phi\} + h\{\phi'\}| &\leq \frac{1}{|t|}\int_0^{|t|}(|t|-s)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)\phi^{(n+2)}(u-s)du\right)ds \\ &\leq M \cdot C(H)\frac{|t|}{2}, \text{ para } 0 < |t| \leq H, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\lim_{t\to 0}|h_t\{\phi\} + h\{\phi'\}| = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejemplo 11 *La función peine* $\mathbf{III}\{\phi\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi(n)$ *satisface* $\mathbf{III} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_n$ *en sentido débil, donde* $\delta_n = \delta(\cdot - n)$. *Para verlo, basta observar que, para toda señal* $\phi \in \mathbb{S}$ *se tiene que*

$$\lim_{n,m\to\infty}\sum_{k=-m}^{n}\delta_n\{\phi\} = \lim_{n,m\to\infty}\sum_{k=-m}^{n}\phi(k) = \mathbf{III}\{\phi\}.$$

3.3. Otros enfoques para tratar con funciones generalizadas

En este texto hemos seguido, para trabajar con funciones generalizadas, el enfoque expuesto en la excelente monografía de Kammler [36], pero (como el mismo autor reconoce en [36, p.450]) hay otros posibles caminos a seguir para la descripción de las funciones generalizadas. Esencialmente, hay tres formas de describir los funcionales de $\mathbb{S}$:

- El funcional $h \in \mathbb{G}$ se puede representar como

  $$h\{\phi\} = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\phi^{(n)}(t)dt, \text{ para } \phi \in \mathbb{S},$$

  donde $g \in \mathbf{CSG}$ y $n \in \mathbb{N}$ se han fijado. (Esta es nuestra elección)

- El funcional h se representa como un límite,

  $$h\{\phi\} = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_n(t)\phi(t)dt, \text{ para } \phi \in \mathbb{S},$$

  donde la sucesión $\{g_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{S}$ se ha fijado de modo que el límite anterior exista para toda $\phi \in \mathbb{S}$.

- El funcional $h : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ es lineal y continuo, donde la continuidad se especifica mediante la siguiente propiedad: Si

  $$\lim_{N\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|t^n\phi_N^{(m)}(t)| = 0$$

  para todo $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{N\to\infty} h\{\phi_N\} = 0$.

La equivalencia de estos enfoques no es en absoluto un problema sencillo de resolver, por lo que no vamos a intentarlo aquí (de todas formas, el lector interesado en el tema puede consultar [69]).

El enfoque utilizado por L. Schwartz, el creador de la teoría de distribuciones, es el tercero. De hecho, Schwartz también utilizó, además del conjunto de señales rápidamente decrecientes, $\mathbb{S}$, otros conjuntos de funciones test. En particular, estudió los funcionales continuos definidos sobre los siguientes espacios de funciones test:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \{\phi : \phi^{(n)}(t) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \\
\mathbb{K} &= \{\phi \in \mathbb{E} : \exists M > 0 : \mathbf{supp}(\phi) := \overline{\{t : \phi(t) \neq 0\}} \subset [-M, M]\}.
\end{aligned}$$

Es evidente que $\mathbb{K} \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{E}$ y, en consecuencia, las correspondientes clases de funciones generalizadas satisfacen $\mathbb{G}_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{G}_{\mathbb{S}} = \mathbb{G} \subset \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$[9].

Como $\mathbb{K}, \mathbb{E}$ son espacios cerrados para la derivación (i.e., la derivada de un elemento de $\mathbb{K}$ vuelve a estar en $\mathbb{K}$ y la derivada de un elemento de $\mathbb{E}$ vuelve a pertenecer a $\mathbb{E}$), entonces podemos definir la derivada generalizada para los correspondientes espacios de funciones generalizadas. Sin embargo, se sabe que para las clases $\mathbb{G}_{\mathbb{E}}$ y $\mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ no sucede lo mismo con la transformada de Fourier. Esta es la razón por la que, si estamos interesados en el Análisis de Fourier, tomamos los elementos de $\mathbb{G}$ como concepto de función generalizada. Sin embargo, para introducir ciertos conceptos (como la transformada de Fourier de una señal generalizada) es necesario hacer uso de la equivalencia entre los tres enfoques mencionados. En particular, haremos uso del siguiente importante resultado:

Teorema 1

$$\mathbb{G} = \left\{ h : \mathbb{S} \to \mathbb{C} : \textit{ h es lineal y } \forall n, m \in \mathbb{N} : \lim_{N\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |t^n \phi_N^{(m)}(t)| = 0 \right\}$$

4. Sistemas LTI y convolución

4.1. El caso discreto

Dada $\mathbf{x} = \{x(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ una señal discreta arbitraria, podemos escribir

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k), \, n \in \mathbb{Z}$$

(pues la suma anterior en realidad siempre es finita: sólo contiene el sumando $k = n$, ya que para $k \neq n$, $n - k \neq 0$ y por tanto $\delta(n-k) = 0$). Por tanto, la señal discreta $\mathbf{x}$ admite la representación

$$\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta_k,$$

[9] La notación empleada por nosotros no es la más usual. Lo habitual es lo siguiente: Los elementos de $\mathcal{D}' := \mathbb{G}_{\mathbb{K}}$ se llaman "distribuciones" y los de $\mathcal{S}' := \mathbb{G}_{\mathbb{S}}$ se llaman "distribuciones atemperadas". Al intentar extender el análisis de Fourier a las distribuciones, es necesario restringir la atención sobre las distribuciones atemperadas porque ellas permiten una definición adecuada de transformada de Fourier. También, cuando nos interesemos por la teoría del muestreo, aparecerá un importante espacio de distribuciones: las de soporte compacto.

donde $\delta_k = \{\delta(n-k)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, ¿Qué podemos decir sobre la convergencia de la representación anterior? Hemos probado que hay convergencia puntual de $\mathbf{x}_N = \sum_{k=-N}^{N} x(k)\delta_k$ a $\mathbf{x}$ para $N \to \infty$ y elecciones arbitrarias de la señal $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{x} \in l_p(\mathbb{Z})$ para cierto $p < \infty$, entonces[10]

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x} - \sum_{k=-N}^{N} x(k)\delta_k \right\|_{l_p(\mathbb{Z})} &= \|\{\cdots, x(-N-1), 0, \cdots, 0, x(N+1), \cdots\}\|_{l_p(\mathbb{Z})} \\ &= \left\{ \sum_{|k|>N} |x(k)|^p \right\}^{1/p} \to 0 \text{ para } N \to \infty. \end{aligned}$$

La misma propiedad se satisface si cambiamos[11] $l_p(\mathbb{Z})$ por $c_0(\mathbb{Z})$.

Esta propiedad de las señales discretas se puede utilizar para caracterizar completamente los sistemas LTI discretos como sigue: Sea $L : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un filtro discreto, donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ se supone que son alguno de los espacios $l_p(\mathbb{Z})$ o $c_0(\mathbb{Z})$, y sea

$$\{h(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty} = L(\{\delta(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty})$$

la imagen del impulso unidad a través de nuestro sistema L. Sea $\mathbf{x} = \{x(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \in \mathbf{X}$. Entonces[12]

$$\begin{aligned} y(n) &= L(\mathbf{x})(n) = L\left(\mathbf{X}\text{-} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} x(k)\delta_k\right)(n) \\ &= \left(\mathbf{Y}\text{-} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} x(k)L(\delta_k)\right)(n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} x(k)L(\delta)(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

Esto significa que, una vez conocida $\{h(n)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, la salida del impulso unidad, si el sistema es LTI entonces conocemos la salida $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$ de cualquier señal $\mathbf{x}$, y ésta viene dada por la fórmula

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k),$$

lo que nos lleva directamente a introducir el siguiente concepto:

Definición 16 *Dadas las señales discretas* $\mathbf{x} \in l_1(\mathbb{Z}), \mathbf{y} \in l_\infty(\mathbb{Z})$*, definimos la convolución* $\mathbf{x} * \mathbf{y} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ *como* $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \{(x*y)(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$*, donde*

$$(x*y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2 *Sea* $L : l_1(\mathbb{Z}) \to l_\infty(\mathbb{Z})$ *un filtro discreto. Entonces* $L\mathbf{x} = \mathbf{x} * L\delta$ *para toda señal* $\mathbf{x} \in l_1(\mathbb{Z})$*. Además, si* $h \in l_1(\mathbb{Z})$ *entonces* $L\mathbf{x} = \mathbf{x} * h$ *es un filtro* $L : l_1(\mathbb{Z}) \to l_\infty(\mathbb{Z})$ *con* $L(\delta) = h$*.*

[10]Recuérdese que $l_p(\mathbb{Z}) = \{\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$ y $\|\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\|_{l_p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

[11]Recuérdese que $c_0(\mathbb{Z}) = \{\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} : \text{lím}_{|n|\to\infty} |a_n| = 0\}$ y $\|\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}\|_{c_0(\mathbb{Z})} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$.

[12]Recuérdese que los filtros son aplicaciones continuas

4.2. El caso analógico

En el caso analógico, es también posible demostrar que los filtros son esencialmente operadores de convolución. No hacemos aquí la demostración del resultado, pues requiere herramientas sofisticadas que quedan por encima del nivel del curso que queremos dar. Pero vamos a realizar un boceto de la demostración, con argumentos de tipo heurístico que ayudan a comprender qué sucede realmente. Por supuesto, necesitamos antes introducir el concepto de convolución para el caso analógico:

Definición 17 *Sean* $\mathbf{x} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\mathbf{y} \in L^1(\mathbb{R})$ *arbitrariamente elegidas. La señal de convolución* $\mathbf{x} * \mathbf{y} \in L^\infty(\mathbb{R})$ *se define por la fórmula:*

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(s)\mathbf{y}(t-s)ds$$

Supongamos ahora que nuestra señal $x(t)$ pertenece a la clase de Schwartz $\mathbb{S}$. Entonces podemos usar la propiedad de desplazamiento de la función delta de Dirac para afirmar que

$$x(t) = (x * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(t-s)ds$$

Utilizando la continuidad del filtro L, podemos garantizar (éste es precisamente el paso difícil de la demostración) que se pueden intercambiar el operador integral y el filtro L, de modo que:

$$\begin{aligned} y(t) &= (Lx)(t) = L\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(s)\delta(.-s)ds\right)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s)(L\delta(.-s))(t)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(s)(L\delta)(t-s)ds \\ &= (x * L\delta)(t) \end{aligned}$$

Esto debe motivarnos para creer que los filtros analógicos son de la forma $L\mathbf{x} = \mathbf{x} * L\delta$. De hecho, tal es el caso (prácticamente), pero debemos expresar con cierto cuidado el resultado[13]:

Teorema 3 *Supongamos que* $L : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ *es un filtro. Entonces existe una señal de variación*

[13] Aparte de lo que se expone en esta sección, en otro manuscrito de LAFA incorporamos otros enfoques y resultados relacionados con la convolución como la operación adecuada para describir filtros. En particular, se pueden demostrar los siguientes hechos: a) Tanto para filtros analógicos como discretos, si éstos envían señales de energía finita en señales acotadas, entonces son necesariamente filtros de convolución -y, de hecho, forman un espacio de Hilbert en el que el producto escalar está dado por el producto escalar de las respuestas al impulso unidad- y b)Si un filtro está definido sobre el espacio de las distribuciones de soporte compacto y toma valores en $\mathcal{D}'$, entonces es necesariamente un filtro de convolución. (Este último resultado es bastante complicado de probar, pues requiere de una versión del Teorema del Núcleo de Schwartz, pero la idea que hay detrás del mismo es muy sencilla y atractiva).

acotada[14] $H \in \mathbf{BV}(\mathbb{R})$ *tal que la relación*

$$(L\mathbf{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t-s)dH(s)$$

se satisface para toda señal $\mathbf{x} \in L^1(\mathbb{R})$. *Por supuesto, si* H *es diferenciable, con derivada* $H' = h$, *obtenemos que*

$$(L\mathbf{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t-s)h(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(s)h(t-s)ds = (\mathbf{x} * h)(t)$$

(Ver [23] para la demostración).

Definición 18 *Decimos que* $L : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ *es un* ***filtro de convolución*** *si existe una señal* h *tal que* $L\mathbf{x} = \mathbf{x} * h$ *para toda entrada* $\mathbf{x}$ *(del dominio del filtro)*[15]

El teorema anterior garantiza que una clase muy amplia de filtros son filtros de convolución. Además, estos filtros poseen propiedades muy interesantes. Por ejemplo, la siguiente proposición se satisface:

Proposición 2 *La acción de un filtro de convolución* L *sobre una señal de entrada arbitraria depende exclusivamente de (la señal de entrada y de) la señal* $h = L\delta$ *de respuesta al impulso unidad.*

Demostración. Es trivial $\Box$.

Si L es un filtro de convolución, tiene sentido entonces estudiar las propiedades de L en términos de las propiedades de $h = L\delta$. Por ejemplo: ¿Bajo qué condiciones sobre h podemos afirmar que el filtro es causal, no tiene memoria, envía señales de energía finita a señales de energía finita, o señales de potencia a señales de potencia, etc.? De hecho, este tipo de problemas son también de interés para operadores de convolución en general, $L_h(x) = x * h$ (i.e., pensamos que es interesante estudiar estos problemas incluso para sistemas LTI que no son necesariamente continuos). En particular, los siguientes resultados son sencillos de enunciar (y demostrar!):

Proposición 3 *El sistema LTI dado por* $L_h(x) = x * h$ *es causal si y sólo si* $h(t) = 0$ *para todo* $t < 0$.

Proposición 4 *El sistema LTI dado por* $L_h(x) = x * h$ *es un filtro* $L_h : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ *si y sólo si* $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

[14] Recordemos que $\mathbf{BV}(\mathbb{R}) = \{f : V(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} V_f(x) < \infty\}$, donde

$$V_f(x) = \sup_{-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_N = x,\ N\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{N} |f(x_j) - f(x_{j-1})|;\ \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Las propiedades básicas de las funciones de variación acotada se pueden consultar en el excelente texto de Rudin [60, págs. 149-157]. Otro texto más elemental podría ser el de Protter y Morrey [58, Cap. 12]

[15] Hemos tomado, en esta definición, como dominio del filtro el espacio $L^1(\mathbb{R})$, aunque evidentemente existen otras posibilidades, como $L^2(\mathbb{R})$ o $L^\infty(\mathbb{R})$. Diremos, por tanto, que tenemos un filtro de convolución siempre que la operación que realiza el filtro sea justo esa: convolucionar contra una señal fija $h(t)$.

Ejercicio: Demostrar las proposiciones anteriores.

Los ingenieros utilizan las conexiones que hemos establecido entre filtros y señales, para establecer un doble lenguaje para las señales, llevando al contexto de las señales conceptos cuyo significado natural pertenece al dominio de los filtros. Así, decimos que la señal h es causal si el filtro de convolución que genera es causal (lo que, para la señal se traduce en $h(t) = 0$ para $t < 0$), etc.

5. Filtros y señales exponenciales complejas: una motivación para el estudio de las señales periódicas

Supongamos que $L_a : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ es un filtro analógico y que $L_d : l_\infty(\mathbb{Z}) \to l_\infty(\mathbb{Z})$ es un filtro digital. Al ser ambos operadores invariantes respecto del tiempo, es claro que fijados los periodos $T \in \mathbb{R}^+$ (para el caso analógico) y $N \in \mathbb{N}$ (para el caso digital) se tiene que si $x_a \in \mathbb{P}_a(T) := \{x \in L^\infty(\mathbb{R}) : x(\cdot) = x(\cdot + T)\}$ y $x_d \in \mathbb{P}_d(N) := \{x \in l_\infty(\mathbb{Z}) : x(\cdot) = x(\cdot + N)\}$ entonces $y_a = Lx_a \in \mathbb{P}_a(T)$ y $y_d = Lx_d \in \mathbb{P}_d(N)$. Veamos por qué. Para ello basta comprobar que (al ser L_a y L_d invariantes respecto del tiempo)

$$y_a(t+T) = (L_a x_a)(t+T) = L_a(x_a(\cdot + T))(t) = L_a(x_a(\cdot))(t) = y_a(t)$$

y, en el caso discreto,

$$y_d(n+N) = (L_d x_d)(n+N) = L_d(x_d(\cdot + N))(n) = L_d(x_d(\cdot))(n) = y_d(n).$$

En términos matemáticos esta propiedad se expresa diciendo que el espacio $\mathbb{P}_a(T)$ es invariante para L_a y el espacio $\mathbb{P}_d(N)$ es invariante para L_d. En otras palabras: en el estudio de sistemas LTI los espacios de seññales periódicas (independientemente del periodo que se considere) son "especiales", pues quedan fijos a través de dichos operadores.

Ahora bien: cuando se conoce, para un operador lineal $L : X \to X$, un espacio invariante por L (i.e., un $V \subset X$ tal que $L(V) \subset V$), es razonable preguntarse si de alguna forma es posible entontrar una base de V formada por autovectores (i.e., vectores $v \in V$ que satisfacen $Lv = \lambda v$ para cierto escalar λ), pues si existiese dicha base entonces la matriz asociada a $L_{|V} : V \to V$ respecto de dicha base será una matriz diagonal.

En realidad lo que acabamos de afirmar es excesivamente ambigüo y requiere algunas aclaraciones. Si el espacio V es de dimensión finita entonces todo lo afirmado es verdad y muy sencillo de comprobar, puesto que si $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es la base de V y $Lv_k = \lambda_k v_k$ para $k = 1, 2, \cdots, n$; entonces

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} a_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k v_k.$$

Es decir, L tiene como matriz asociada a $D = \mathbf{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$, que es la expresión matricial más sencilla posible.

Estas ideas se pueden aplicar de manera sencilla en el espacio de señales discretas N-periódicas $\mathbb{P}_d(N)$ puesto que los elementos $x \in \mathbb{P}_d(N)$ se pueden identificar con vectores complejos de N componentes mediante la relación $x \leftrightarrow (x_0, x_1, \cdots, x_{N-1})$, donde $x_k = x(k)$ para $k = 0, 1, \cdots, N-1$ (de modo que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}_d(N) = N < \infty$).

Proposición 5 *Las funciones exponenciales complejas* $\exp_{N,k}(n) = e^{\frac{2\pi \mathbf{i} kn}{N}}$*,* $k = 0, \cdots, N-1$ *forman una base de* $\mathbb{P}_d(N)$*. Además, para todo filtro digital* $L_d : l_\infty(\mathbb{Z}) \to l_\infty(\mathbb{Z})$ *y todo* $k, N \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $\exp_{N,k}$ *es un autovector de* L_d*.*

Demostración. Efectivamente, las señales $\exp_{N,k}$ son elementos de $\mathbb{P}_d(N)$ puesto que

$$\exp_{N,k}(n+N) = e^{\frac{2\pi \mathbf{i} k(n+N)}{N}} = e^{\frac{2\pi \mathbf{i} kn}{N}} e^{2\pi \mathbf{i} k} = e^{\frac{2\pi \mathbf{i} kn}{N}} = \exp_{N,k}(n).$$

Que estas señales forman una base de $\mathbb{P}_d(N)$ se deduce de que son linealmente independientes (lo que dejamos como ejercicio al lector) y $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}_d(N) = N$. Veamos que son autovectores de cualquier filtro digital $L_d : l_\infty(\mathbb{Z}) \to l_\infty(\mathbb{Z})$. Si L_d es uno de tales filtros entonces

$$L_d x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

para toda señal x y cierta señal h (la respuesta al impulso unidad). Por tanto,

$$\begin{aligned} L_d \exp_{N,k}(n) &= \sum_{t=-infty}^{\infty} \exp_{N,k}(t)h(n-t) \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp_{N,k}(n-s)h(s) \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp_{N,k}(n)\exp_{N,k}(-s)h(s) \\ &= \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp_{N,k}(-s)h(s)\right)\exp_{N,k}(n), \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

¿Qué sucede si V es un espacio vectorial infinito dimensional? (y téngase en cuenta que tal es el caso para el espacio de señales periódicas $\mathbb{P}_a(T)$). Para empezar, el concepto de base que se necesita en el contexto infinito dimensional es diferente del concepto de base clásico, que es el de base de Hamel (i.e., sistema libre y generador)[16].

Definición 19 *Diremos que* $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ *es una base de Schauder para el espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *si todo elemento* $x \in X$ *se puede expresar de forma única como* $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k$*, donde la serie converge en la norma de* X*.*

Imaginemos que $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una base de Schauder para un espacio de Banach X y que, para cierto operador acotado $L : X \to X$ se tiene que $L\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ para todo k y cierta sucesión de escalares $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$. Entonces, si $x \in X$ está dado por $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\varphi_k$, se tendrá que $Lx = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k$.

[16]Se puede demostrar que si X es un espacio vectorial normado y completo, entonces o bien es de dimensión finita o bien su base de Hamel posee cardinal estrictamente superior al cardinal de $\mathbb{N}$

Teorema 4 *Las exponenciales complejas* $\exp(\mathbf{i}wt)$ *son autofunciones de todo filtro de convolución analógico. En consecuencia, Dados* L *un filtro de convolución analógico y* $T > 0$*, el conjunto* $\{\exp(\frac{2\pi\mathbf{i}kt}{T})\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *forma un sistema libre (infinito) de autofunciones (T-periódicas) de* L*.*

Demostración. Por definición, $L(\mathbf{x}) = \mathbf{x} * \mathbf{h}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} L(\exp(\mathbf{i}wt)) &= \exp(\mathbf{i}wt)*\mathbf{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\mathbf{i}ws)\mathbf{h}(t-s)ds \\ &= -\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mathbf{i}w\zeta)\mathbf{h}(\zeta)d\zeta\right)\exp(\mathbf{i}wt) \end{aligned}$$

Que las funciones exponenciales $\{\exp(\frac{2\pi\mathbf{i}kt}{T})\}_{k=-\infty}^{\infty}$ forman un sistema libre se puede comprobar fácilmente. □

Una pregunta natural, una vez hemos probado el teorema anterior, es bajo qué circunstancias las funciones $\{\exp(\frac{2\pi\mathbf{i}kt}{T})\}_{k=-\infty}^{\infty}$ forman una base de Schauder del espacio que generan. En particular, el problema de la representación de señales T-periódicas como superposición de exponenciales complejas del tipo $\exp(\frac{2\pi\mathbf{i}kt}{T})$ es una cuestión interesante para la teoría de señales y sistemas.

Referencias

[1] **J. M. Almira,** An introduction to Fourier Series and Signal Processing, Technische Universität Chemnitz, Preprint 2001-13 (2001).

[2] **J. Arias de Reyna,** *Pointwise convergence of Fourier Series*, Springer-Verlag, 2002.

[3] **N. Aronszajn,** La théorie des noyaux reproduisants et ses applications, Proc. Cambridge Phil. Soc. ºtextbf39 (1943) 133-153.

[4] **J. J. Benedetto,** Irregular sampling and frames, in *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (ed.) Academic Press (1992), 445-507.

[5] **R. P. Boas,** *Entire Functions,* Academic Press, 1954.

[6] **S. Bochner,** *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza Universidad **689**, Alianza Ed. (1991).

[7] **W. Bolton,** *Laplace and Z-transforms,* Logman (1998).

[8] **F. Bombal,** Laurent Schwartz: El matemático que quería cambiar el mundo, La Gaceta de la R.S.M.E. **6** 1 (2003)

[9] **R. M. Bracewell,** *The Fourier transform and its applications,* McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series (1965).

[10] **J. L. Brown,** On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the bandpass sampling theorem, J. Math. Anal. Appl **18** (1967) 75-84.

[11] **J. R. Buck, M. M. Daniel, A. C. Singer,** *Computer Explorations in Signals and Systems Using Matlab,* Signal Processing Series, Prentice Hall (1997).

[12] **P. L. Butzer, R. L. Stens,** Sampling theory for non-neccesarily band-limited functions: a historical overview, SIAM Rev. **34** (1992) 40-53.

[13] **A. Cañada Villar,** *Series de Fourier y Aplicaciones. Un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos,* Ed. Pirámide, 2002.

[14] **D. C. Champeney,** *A handbook of Fourier Theorems,* Cambridge university Press (1987).

[15] **R. Duffin, A. Shaeffer,** A class of nonharmonic Fourier series, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952) 341-366.

[16] **P.P.G. Dyke,** *An introduction to Laplace Transforms and Fourier Series,* Springer UnderGraduate Mathematics Series, Springer (2001).

[17] **J. W. Eaton et al.,** GNU Octave, disponible en `www.octave.org`.

[18] **R. E. Edwards,** *Fourier series (A modern introduction) Vol 1,* Graduate Texts in Mathematics **64***,* Springer (1979).

[19] **K. Fan, O. Taussky, J. Todd,** Discrete analogs of inequalities of Wirtinger, Monasch. Math. **59** (1955) 73-90.

[20] **G. B. Folland,** *Fourier analysis and its applications,* Brooks-Cole Publishing Co. (1992).

[21] **S. Forcada,** *Introducción a la integral de Lebesgue,* Promociones y Publicaciones Universitarias, Barcelona, 1988.

[22] Free Software Foundation, The GNU Scientific Library, disponible en `http://www.gnu.org/software/gsl/`.

[23] **R. A. Goldberg,** *Fourier transforms*, Cambridge University Press (1965).

[24] **E. A. González-Velasco,** *Fourier Analysis and Boundary Value Problems,* Academic-Press (1995).

[25] **H. G. Feichtinger, K. Gröchenig,** Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions, J. of Math. Anal. Appl. **167** (1992) 530-556.

[26] **K. Gröchenig,** Reconstruction algorithms in irregular sampling, Math. Compt. **59** (1992) 181-194.

[27] **K. Gröchenig,** A discrete theory of irregular sampling, Linear Alg. and its Appl. **193** (1993) 129-150.

[28] **K. Gröchenig,** Irregular sampling, Toeplitz matrices and the approximation of entire functions of exponential type, Math. of Comp. **68** (1999) 749-765.

[29] **R. W. Hamming,** *Digital Filters (Third Edition),* Dover (1998).

[30] **G. Hardy, W. W. Rogosinski,** *Fourier Series,* Dover (1999).

[31] **G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya,** Inequalities, (2nd Edition) Cambridge University Press, 1952.

[32] **S. Haykin, B. Van Veen,** *Signals and Systems,* John Wiley & Sons Inc. (1999).

[33] **J. R. Higgins,** *Sampling Theory in Fourier Analysis and Signal Analysis,* Oxford University Press (1996).

[34] **P. Jacklam,** MATLAB array manipulation tips and tricks, disponible en `http://home.online.no/~pjacklam/matlab/doc/mtt/doc/mtt.pdf`.

[35] **M. I. Kadec,** The exact value of the Paley-Wiener constant, Soviet. Math. Dokl. **5** (1964) 559-561.

[36] **D. W. Kammler,** *A first course in Fourier Analysis,* Prentice-Hall, New Jersey (2000).

[37] **Y. Katznelson,** *An introduction to Harmonic Analysis,* Dover (1976).

[38] **V. A. Kotelnikov,** On the transmission capacity of ether and wire electrocominucations, Izd. Red. Upr. Svgazi RKKA, 1933.

[39] **S. G. Krantz,** *A panorama of Harmonic Analysis, The* Carus Math. Monographs **27** Math. Asoc. Amer. (1999)

[40] **A. Kufner, J. Kadled,** *Fourier Series,* Academia Praha (1971).

[41] **P. Lancaster, K. Salkauskas,** *Transform Methods in Applied Mathematics,* Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, John-Wiley & Sons (1996).

[42] **C. Lanczos,** *Discourse on Fourier Series,* Olyver and Boyd, Edinburg, 1966.

[43] **H. Landau,** Neccesary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, Acta Math. **117** (1967) 37-52.

[44] **R. Lasser,** *Introduction to Fourier Series,* Marcel Dekker, 1996.

[45] **T. Love,** Matlab vectorisation tricks, disponible en `http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/tpl/programs/Matlab/tricks.html`.

[46] **S. Mallat,** *A wavelet tour of signal processing,* 2^a Ed., Academic Press (1999).

[47] **J. B. Mariño, F. Vallverdú, J. A. Rodríguez, A. Moreno,** *Tratamiento digital de la señal*, Ed. UPC (1999).

[48] **P. Marziliano, M. Vetterli,** Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations, IEEE Transactions on Signal Proccesing **48** 12 (2000) 3462-3471.

[49] The MathWorks, MATLAB website, `www.mathworks.com`.

[50] The MathWorks, Code Vectorization Guide, disponible en `http://www.mathworks.com/support/tech-notes/1100/1109.html`.

[51] **C. Neumann,** Zur theorie des logarithmischen und des Newtonschen Potentials, Ber. Verh. Math.-Phys. Classe Königgl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **32** (1870) 49-56, 264-321.

[52] **C. Neumann,** *Über die methode des Arithmetischen Mittels,* Hirzel, Leipzig, 1887.

[53] **A. Papoulis,** *Sistemas digitales y analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación espectral*, Marcombo (1986).

[54] **J. R. Partington,** *Interpolation, Identification and Sampling,* Oxford University Press (1997).

[55] **A. Pinkus,** Weierstrass and Approximation Theory, J. Approx. theory **107** (2000) 1-66.

[56] **A. Pinkus, S. Zafrany,** *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge University Press (1997).

[57] **W. H. Press et al.,** Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. New York: Cambridge Univ. Press, 1986.

[58] **M. H. Protter, C.B. Morrey,** *Análisis Real*, Editorial AC, 1986.

[59] **V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn,** *Lectures on Functional Analysis and Applications,* World Scientific Publishing Co., (1999).

[60] **W. Rudin,** *Análisis real y complejo,* Editorial Alhambra, 1985.

[61] **D. E. Rutherford,** Some continuant determinants arising in Physics and Chemistry, II. Proc. Royal Soc. Edinburgh **62A** (1947) 229-236.

[62] **K. Seip,** On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2(-\pi,\pi)$, J. Functional Anal. **130** (1995) 131-160.

[63] **H. Shapiro,** *Topics in Approximation Theory,* Lecture Notes in Mathematics **187**, Springer-Verlag (1971).

[64] **I. Stewart, D. Tall,** *Complex Analysis,* Cambridge Univ. Press (1983).

[65] **O. Steinbach, W. L. Wendland,** On C. Neumann's method for second order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries, J. of Math. Anal. and Appl. **262** (2001) 733-748.

[66] **G. Strang,** A proposal for Toeplitz matrix calculations, Stud. Appl. Math. **74** (1986) 171-176.

[67] **T. Strohmer,** Efficient methods for digital signal and image reconstruction from nonuniform samples, Ph. Thesis, Viena, 1993.

[68] **M. Unser,** Sampling: 50 years after Shannon, Proc. IEEE **88** 4 (2000) 569-587.

[69] **J. I. Richards, H. K. Youn,** *Theory of Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[70] **D.A. Watt,** ”Programming Language Concepts and Paradigms”. Prentice Hall International, 1991

[71] **R. Young,** *An introduction to nonharmonic Fourier series*, CRC Press, 1993.

[72] **A. I. Zayed,** *Advances in Shannon’s sampling theory*, CRC Press, 1993.