

Series de Fourier: Aspectos formales*

1. Funciones Ortogonales en intervalos

Si los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ son ortogonales (i.e. perpendiculares) en el espacio Euclídeo entonces, por el teorema de Pitágoras, resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (u_i^2 + v_i^2) &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 = \sum_{i=1}^n (u_i^2 + v_i^2) + 2 \sum_{i=1}^n u_i v_i \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i = 0.$$

Esto podría dar lugar a varias interpretaciones -generalizaciones. Por ejemplo, si estamos interesados en un concepto de ortogonalidad no para vectores sino para funciones en general, podríamos interpretar los vectores como muestras de funciones (i.e., podemos pensar que $\mathbf{u}(t)$ es cierta función y nuestro vector $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ está dado por $u_k = \mathbf{u}(t_k)$, para cierta elección de nodos equiespaciados en un intervalo $[a, b]$ (análogamente con el vector \mathbf{v}) y, por tanto, podríamos interpretar $h \sum_{i=1}^n u_i v_i$ como una suma de Riemann (espaciada uniformemente) de la integral $\int_a^b \mathbf{u} \mathbf{v}$. De esta forma, llegaríamos al siguiente concepto:

Definición 1 *Dos funciones \mathbf{u}, \mathbf{v} son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ si*

$$\int_a^b \mathbf{u}(t) \mathbf{v}(t) dt = 0.$$

Podemos conseguir una interesante generalización si consideramos señales que puedan tomar valores complejos e introducimos una función peso $\mathbf{w}(t)$:

*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto del autor: J.M. Almira, "Matemáticas para la recuperación de señales", Grupo Editorial Universitario, 2005.

Definición 2 Dos funciones u, v son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función peso $w(t)$ si

$$\int_a^b u(t)\overline{v(t)}w(t)dt = 0.$$

Definición 3 El conjunto de funciones \mathbf{W} se dice ortogonal en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función peso $w(t)$ si para cada par de elementos distintos $u, v \in \mathbf{W}$, se tiene que

$$\int_a^b u(t)\overline{v(t)}w(t)dt = 0.$$

Un ejemplo de sistema de funciones ortogonales especialmente importante es el formado por las exponenciales complejas $\{\exp(int)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, las cuales forman un sistema ortogonal en $[-\pi, \pi]$ (esto es muy fácil de comprobar).

Otro ejemplo importante son los senos y cosenos

$$\{1, \cos t, \cos 2t, \dots, \sin t, \sin 2t, \dots\},$$

que también forman un sistema ortogonal en $[-\pi, \pi]$. De hecho, las siguientes identidades se satisfacen:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt &= \begin{cases} \pi & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \cos(mt) dt &= 0 \text{ para } n, m \text{ arbitrarios.} \end{aligned}$$

Para ver cómo se derivan estas identidades, hacemos el cálculo de la integral $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt$ en todos los casos. Empezamos suponiendo que $n \neq m$. Teniendo en cuenta la conocida identidad trigonométrica

$$\cos(nt) \cos(mt) = \frac{1}{2}(\cos((n+m)t) + \cos((m-n)t))$$

se puede calcular una primitiva de $\cos(nt) \cos(mt)$, que es la función:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} \right)$$

y, por tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Si $n = m \neq 0$ hacemos uso de la identidad

$$\cos^2(nt) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2nt))$$

para realizar el cálculo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin(2nt)}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Finalmente, si $n = m = 0$ entonces estamos integrando la constante 1 entre $-\pi$ y π y, por tanto, el valor de la integral es 2π .

Definición 4 Decimos que el sistema \mathbf{W} ortogonal respecto de la función peso $\mathbf{w}(t)$ en el intervalo $[a, b]$ es completo si la única función ortogonal a \mathbf{W} en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función peso $\mathbf{w}(t)$, es $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ (i.e., si $\int_a^b \mathbf{x}(t) \overline{\mathbf{v}(t)} \mathbf{w}(t) dt = 0$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ implica que $\mathbf{x}(t) \equiv 0$). Si tratamos con señales $x \in L^p(a, b)$, bastará exigir que $x(t) = 0$ en casi todo punto de $[a, b]$.

2. Desarrollos formales

En esta sección vamos a buscar, utilizando argumentos heurísticos, la expresión de los coeficientes de Fourier¹ de una señal analógica $x(t)$, $t \in (-\pi, \pi]$ (equivalentemente, de una señal analógica 2π -periódica $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$). Así, supongamos que se satisface la relación

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

(luego veremos porqué el término a_0 queda dividido por 2). Queremos obtener una expresión para cada uno de los coeficientes a_k y b_k . Para ello, multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $\cos(mt)$ (con m fijo) e integramos entre $-\pi$ y π . Si la convergencia de la serie trigonométrica del segundo miembro fuese lo bastante buena (e.g., si fuese uniforme en $[-\pi, \pi]$), y eso es lo que supondremos por ahora, entonces tendríamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(mt) dt &= \\ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt &+ \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \cos(kt) dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) \sin(kt) dt \right) & \\ = \pi a_m & \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(mt) dt$$

¹J. B. J. Fourier (1768-1830). Matemático francés. Fue alumno de Lagrange, Laplace y Monge en la École Normal de París, donde ingresó en 1794. En 1798, se unió a la campaña de Egipto de Napoleón, como asesor científico. Posteriormente, ocupó un puesto administrativo en Grenoble, bajo el encargo directo de Napoleón. Fue durante este período que escribió sus contribuciones matemáticas más importantes. En particular, entre 1804 y 1807 redactó su famosa memoria sobre la propagación del calor en cuerpos sólidos, que es el trabajo en el que introduce los desarrollos en series de Fourier.

para $m = 0, 1, 2, \dots$. (Es claro que dividimos a_0 por dos para obtener la misma fórmula para todos los a_m). De igual forma, si hubiésemos multiplicado ambos miembros del desarrollo de Fourier de $x(t)$ por $\sin(mt)$ y hubiésemos integrado entre $-\pi$ y π , habríamos llegado a la conclusión de que

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(mt) dt$$

para $m = 1, 2, \dots$

Definición 5 En lo que sigue, la expresión

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

indica que los coeficientes a_k, b_h están dados por $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(kt) dt$ y $b_h = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(ht) dt$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. En tal caso decimos que la suma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

es la serie de Fourier de la señal analógica (2π -periódica) $x(t)$, y que a_k, b_h son sus coeficientes de Fourier.

NOTACIÓN. Sea $x(t)$ una señal 2π -periódica y consideremos sobre la recta real \mathbb{R} la relación de equivalencia:

$$x \sim_{2\pi} y \Leftrightarrow x - y \in 2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Entonces es claro que podemos considerar que nuestra señal $x(t)$ está definida en el conjunto cociente $\mathbb{R} / \sim_{2\pi} = \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$ (al cual se suele denotar también como \mathbb{T}) mediante la relación $x(t + 2\pi\mathbb{Z}) := x(t)$. Además, toda función definida sobre \mathbb{T} se puede tratar como una señal 2π -periódica definida sobre la recta real. Para ello, basta definir $x(t) := x(t + 2\pi\mathbb{Z})$.

Es por esta razón que muchos espacios de funciones cuyos elementos son señales periódicas se tratan como espacios de funciones definidas sobre \mathbb{T} . Así pues, las señales con las que se trabaja en este capítulo son precisamente los elementos de $L^1(\mathbb{T})$, el espacio de las señales 2π periódicas integrables (en el sentido de Lebesgue) en $[-\pi, \pi]$ dotado de la norma² $\|x\|_{L^1} = \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)| dt$.

Obsérvese que en la definición de la serie de Fourier de una señal, no se ha supuesto ningún tipo especial de convergencia. Bien pudiera suceder que una serie de Fourier no es sumable.

Ejemplo 1 Sea $x(t)$ la extensión 2π -periódica de la función

$$g(t) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq t < \pi \\ -1/2 & -\pi \leq t < 0 \end{cases} ,$$

²A veces se considera la norma $\|x\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)| dt$.

¿cuál es su serie de Fourier?. Como $g(-t) = -g(t)$ y $\cos(kt) = \cos(-kt)$, los productos $g(t) \cos(kt)$ ($k \geq 0$) son funciones impares y, por tanto, $a_k = 0$ para todo k . Con respecto a los coeficientes b_k , podemos comprobar que

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \frac{\sin(kt)}{2} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{2} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{2} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{2} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi k} & \text{si } k \text{ impar} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la conclusión de que la serie de Fourier de nuestra señal es

$$x(t) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t)$$

2.1. Señales pares e impares

Las señales pares e impares aparecen con tanta frecuencia que el estudio de sus series de Fourier quizás merece especial atención. Una razón para convencernos de ello es que toda señal $x(t)$ se descompone como suma de una señal par $x^+(t)$ y otra impar $x^-(t)$, de la siguiente forma:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(x(t) + x(-t))}_{x^+(t)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x(t) - x(-t))}_{x^-(t)}$$

Para las señales impares se tiene que $a_k = 0$ ($k \geq 0$) y

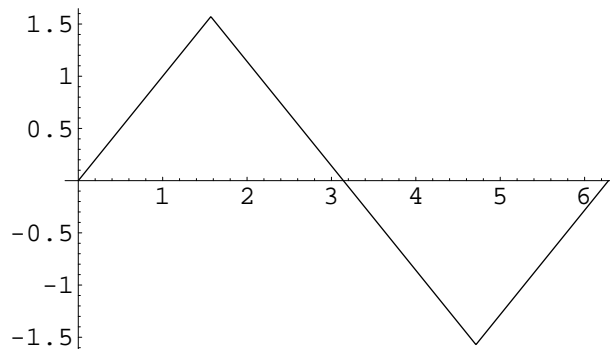
$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \sin(kt) dt$$

para todo $k \geq 1$. Por otra parte, si $x(t)$ es impar, se tiene que $b_k = 0$ ($k \geq 1$) y

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(t) \cos(kt) dt$$

para todo $k \geq 0$. Mediante el uso de ciertas simetrías respecto de $t = \pi/2$, podemos obtener series de Fourier que sólo contengan coeficientes indexados con un número par (impar, resp.) Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2 Consideramos la serie de Fourier de la función (2π -periódica) diente de sierra que aparece en la figura.



Al ser una función impar, su serie de Fourier sólo contiene senos. Además, al integrar contra $\sin(kt)$ se tiene que

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \sin(kt) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin(kt) dt$$

Haciendo el cambio de variable $s = \pi - t$ para la segunda integral que aparece en el segundo miembro de la igualdad, obtenemos

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \sin(kt) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} s \sin(k(\pi - s)) ds.$$

Ahora bien,

$$\sin(k(\pi - s)) = \sin(k\pi) \cos(ks) - \cos(k\pi) \sin(ks) = (-1)^{k+1} \sin(ks)$$

y, por tanto, para k par, las integrales se cancelan y para k impar, $k = 2m + 1$, se tiene que

$$b_{2m+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \sin((2m + 1)t) dt.$$

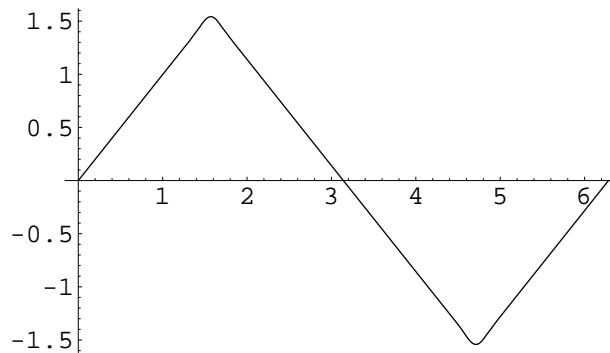
Integrando por partes,

$$\begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{4}{\pi} \left\{ t \frac{-\cos((2m + 1)t)}{2m + 1} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos((2m + 1)t)}{2m + 1} dt \right\} \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{(2m + 1)^2} \Big|_0^{\pi/2} \right\} = (-1)^m \frac{4}{\pi(2m + 1)^2} \end{aligned}$$

La correspondiente serie de Fourier es, pues,

$$g(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{4}{\pi(2m + 1)^2} \sin((2m + 1)t).$$

La siguiente gráfica muestra cómo utilizando pocos términos, la serie de Fourier truncada se aproxima bastante rápido a la señal de partida.



Evidentemente, añadiendo simetrías podemos cancelar más términos en la correspondiente serie de Fourier. Además, mirando una serie de Fourier es también posible deducir simetrías de la correspondiente función periódica asociada.

2.2. La serie de Fourier compleja

Comenzamos recordando la fórmula de Euler³: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Si tenemos en cuenta las paridades de las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$, entonces resulta que podemos invertir la relación de Euler de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{i}{2}(e^{-i\theta} - e^{i\theta})\end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Como las funciones $\sin \theta$ y $\cos \theta$ son linealmente independientes y

$$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{pmatrix} = i/2 \neq 0$$

entonces las funciones $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ también forman un sistema libre. En realidad, la sucesión de funciones $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no sólo forma un sistema libre sino que es además un sistema ortogonal de funciones respecto del producto interior de

$$L^2(-\pi, \pi) = \{x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty\},$$

³Un modo sencillo de demostrar la fórmula de Euler es el siguiente. Se escribe $e^{i\theta} = u(\theta) + iv(\theta)$. Entonces, derivando dos veces en ambos miembros de la igualdad se obtiene que $-e^{i\theta} = u''(\theta) + iv''(\theta)$ y, por tanto, $u'' + u = v'' + v = 0$. Ahora, teniendo en cuenta que $e^0 = 1$ y $ie^0 = i$, se ve que $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ y $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$, de modo que $u(\theta) = \cos \theta$ y $v(\theta) = \sin \theta$.

dado por

$$(x(t), y(t))_{L^2(-\pi, \pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \overline{y(t)} dt.$$

De hecho, es fácil comprobar que

$$(e^{in\theta}, e^{im\theta})_{L^2(-\pi, \pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \overline{e^{im\theta}} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 2\pi & \text{si } n = m \end{cases}$$

Ahora, dada una señal arbitraria $x(t) \in L^2(-\pi, \pi)$, podemos asociarle su serie (formal) de Fourier compleja:

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

mediante la asignación de sus coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(x(t), e^{int})_{L^2(-\pi, \pi)}}{(e^{int}, e^{int})_{L^2(-\pi, \pi)}} = \frac{(x(t), e^{int})_{L^2(-\pi, \pi)}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \overline{e^{int}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt \quad (\text{para } n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

3. La serie de Fourier como operador $\mathcal{F} : L^1(-\pi, \pi) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$

Para cada señal $x(t) \in L^1(-\pi, \pi)$, en vez de considerar la serie (formal) de Fourier compleja asociada

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

podemos interesarnos directamente por los coeficientes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como $x(t) \in L^1(-\pi, \pi)$, se sigue de la expresión anterior que la correspondiente sucesión de coeficientes de Fourier, satisface $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_{\infty}(\mathbb{Z})$. De hecho, es claro que $|c_n| \leq \|x(t)\|_{L^1(-\pi, \pi)}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Un resultado mucho más potente es el siguiente:

Teorema 1 (Lema de Riemann-Lebesgue) ⁴ *Supongamos que $x(t) \in L^1(-\pi, \pi)$. Entonces los coeficientes de Fourier de la señal $x(t)$ satisfacen $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in c_0(\mathbb{Z})$.*

⁴G. F. B. Riemann (1826-1866). Matemático alemán. Realizó su tesis doctoral en la universidad de Göttinga bajo la dirección de Gauss. Sus contribuciones son importantes en varias ramas de las matemáticas (desde los fundamentos de la Geometría, hasta el problema de la distribución de los números primos, pasando por la teoría de funciones de variable compleja, la topología, etc.) Uno de los problemas abiertos más importantes de la actualidad es la llamada conjetura de Riemann (sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemann $\xi(z) = \sum_n \frac{1}{n^z}$).

H. L. Lebesgue (1875-1941). Matemático francés. Fundador de la teoría de la medida. Su concepto de integral ha sido muy importante para el desarrollo del Análisis de Fourier y del Análisis Funcional (muchos de los espacios de funciones más importantes se definen utilizando la integral de Lebesgue).

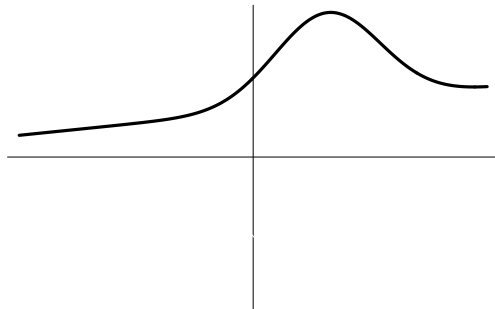
Demostración. Tenemos que demostrar que si $x(t) \in L^1(-\pi, \pi)$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-int} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) (\cos nt - i \sin nt) dt = 0.$$

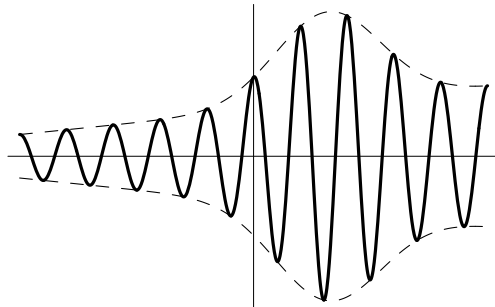
Para ello, bastará ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos ntdt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin ntdt = 0.$$

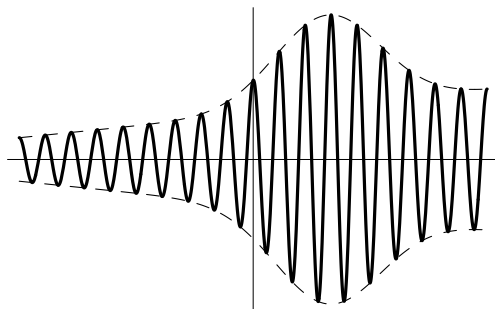
$x(t)$



$x(t) \cos(nt)$



$x(t) \cos(Nt), N > n$



Si nos fijamos en los dibujos anteriores, nos damos cuenta de que el lema es intuitivamente cierto, ya que el efecto de multiplicar la señal $x(t)$ por $\cos(nt)$ es el de oscilar entre los gráficos de $|x(t)|$ y $-|x(t)|$ más veces a mayores valores de n y, por tanto, el área encerrada por el eje de abscisas y las funciones $x(t) \cos nt$, $n = 1, 2, \dots$, resulta de ir comiéndose cada vez más trozos del área encerrada entre las graficas de $|x(t)|$ y $-|x(t)|$ (que era un área finita, por hipótesis). Aún así, hay que realizar una demostración rigurosa del resultado. Ahora bien, para evitar un exceso de abstracción vamos a suponer que trabajamos con funciones integrables de Riemann.⁵

Dada una partición del intervalo $[-\pi, \pi]$, $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$ tomamos $m_i = \inf_{t \in (t_{i-1}, t_i)} x(t)$ y definimos la función escalonada

$$g(t) = \sum_{i=1}^n m_i \chi_{(t_{i-1}, t_i)}(t) + \sum_{i=1}^n x(t_i) \chi_{\{t_i\}}(t).$$

Es claro que $g(t) \leq x(t)$ para todo $t \in (-\pi, \pi)$. Por otra parte, se tiene que, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, entonces (usamos la definición de integral de Riemann)

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(Nt) dt - \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(Nt) dt \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |(x(t) - g(t)) \sin(Nt)| dt \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} [x(t) - g(t)] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt - \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(Nt) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(Nt) dt \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(Nt) dt - \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(Nt) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(Nt) dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(Nt) dt \right| &= \left| \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin(Nt) dt \right| \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^n m_i (\cos(Nt_i) - \cos(Nt_{i-1})) \right| \\ &\leq \frac{2}{N} \left| \sum_{i=1}^n m_i \right| \end{aligned}$$

⁵Por supuesto, el resultado es cierto también en el contexto más general de las funciones integrables según Lebesgue (ver [13], [37]).

Como n está fijo, tomando N suficientemente grande, podemos concluir que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(Nt) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

y, por tanto,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(Nt) dt \right| \leq \varepsilon$$

para N suficientemente grande. Esto concluye la demostración, ya que para la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(Nt) dt$$

los cálculos son análogos. \square

Para resaltar la dependencia que existe entre una señal y sus coeficientes de Fourier, es muy usual denotar el coeficiente c_n como $c_n = \widehat{x}(n)$ (ver, por ejemplo, [37]). De esta forma, se define un operador $\mathcal{F} : L^1(-\pi, \pi) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$, $\mathcal{F}(x) = \{\widehat{x}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. En esta sección vamos a estudiar algunas de las propiedades elementales de \mathcal{F} .

Para empezar, es obvio que \mathcal{F} es un operador lineal (i.e., $\widehat{ax + by}(n) = a\widehat{x}(n) + b\widehat{y}(n)$ para $a, b \in \mathbb{C}$ y $x(t), y(t) \in L^1(-\pi, \pi)$) y continuo, pues

$$\|\mathcal{F}(x)\|_{c_0(\mathbb{Z})} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{x}(n)| \leq \|x(t)\|_{L^1(-\pi, \pi)}$$

para toda señal $x(t) \in L^1(-\pi, \pi)$. Además, las siguientes propiedades elementales también se verifican:

- Si $\overline{x}(t) := \overline{x(t)}$ para todo $t \in (-\pi, \pi)$, entonces $\widehat{\overline{x}}(n) = \overline{\widehat{x}(-n)}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- Si extendemos $x(t)$ como función 2π -periódica a todo \mathbb{R} y, posteriormente, definimos, dado $\delta \in \mathbb{R}$ fijo, la función $x_\delta(t) := x(t - \delta)$, entonces $\widehat{x}_\delta(n) = \widehat{x}(n)e^{-in\delta}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- Si $x(t) \in L^1(-\pi, \pi)$ es tal que $\widehat{x}(0) = 0$ (i.e., su valor medio $\int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt$ es igual a cero) y definimos $X(t) = \int_0^t x(s) ds$, entonces $X(t)$ se puede extender con continuidad como función 2π -periódica y se satisface la relación $\widehat{X}(n) = \frac{1}{in} \widehat{x}(n)$ para todo $n \neq 0$.

Demostración. Sólo demostramos la última afirmación pues, aunque la prueba es sencilla (las otras son también simples ejercicios), conlleva una integración por partes: método que emplearemos con frecuencia para realizar múltiples cálculos.

Que $X(t)$ se puede extender con continuidad como función 2π -periódica se deduce de lo siguiente: primero extendemos $x(t)$ como función 2π -periódica (aunque probablemente, sin continuidad). A continuación, definimos $X(t) = \int_0^t x(s) ds$, ahora para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. La señal así definida es continua claramente. Además,

$$X(t + 2\pi) - X(t) = \int_t^{t+2\pi} x(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} x(\eta) d\eta = 0 \text{ (donde } \eta = s - t - \pi),$$

y por tanto, $X(t)$ es 2π -periódica. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\widehat{X}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(X(t) \frac{e^{-int}}{-in} \right)_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} X'(t)e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{in} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-int} dt = \frac{1}{in} \widehat{x}(n); n = \pm 1, \pm 2, \dots,\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

Evidentemente, si pasamos de considerar una señal arbitraria $x(t)$ (con valor medio cero) a considerar su integral $X(t) = \int_0^t x(s)ds$, es claro que ésta última es más suave. El efecto que se produce en los coeficientes de Fourier es una mayor velocidad de convergencia a cero (de hecho, es posible que los coeficientes de la señal de partida no converjan a cero, pero los de la señal suavizada convergen a cero forzosamente). En realidad existe una estrecha relación entre la suavidad de una señal y la velocidad de convergencia a cero de sus coeficientes de Fourier, pudiendo afirmarse en general, que a mayor velocidad de convergencia de los coeficientes de Fourier, más suave será la señal, y viceversa.

4. Coeficientes de Fourier y convolución de señales periódicas

Ya hemos explicado en el capítulo anterior que la convolución es una operación muy importante en teoría de señales, de modo que sería interesante conocer qué efecto tiene sobre los coeficientes de Fourier de una señal periódica.

Para empezar, es importante observar que se puede definir una operación de convolución que transforma señales periódicas en señales periódicas. Esto se hace de la siguiente forma: Supongamos que $x(t), y(t)$ son funciones 2π -periódicas⁶. Entonces su convolución está dada por la expresión

$$(x * y)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)y(t-s)ds.$$

Es fácil comprobar que $(x * y)(t + 2\pi) = (x * y)(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2 (Convolución y coeficientes de Fourier) *Supongamos que $x(t), y(t) \in L^1(-\pi, \pi)$ se extienden como funciones 2π -periódicas a todo \mathbb{R} . Entonces la convolución*

$$h(t) = (x * y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)y(t-s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t-s)y(s)ds$$

satisface $h(t) \in L^1(-\pi, \pi)$ y $\|h\|_{L^1(-\pi, \pi)} \leq \frac{1}{2\pi} \|x\|_{L^1(-\pi, \pi)} \|y\|_{L^1(-\pi, \pi)}$. Además, la relación

$$\widehat{h}(n) = \widehat{x}(n)\widehat{y}(n)$$

⁶Es evidente que este concepto admite una generalización obvia para el estudio de señales T -periódicas con $T > 0$ arbitrario. Basta tomar $(x * y)(t) := \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(s)y(t-s)ds$.

se satisface para todo $n \in \mathbb{Z}$. Finalmente, la relación:

$$\widehat{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(k)\widehat{y}(n-k)$$

se satisface para todo $n \in \mathbb{Z}$ (i.e., $\mathcal{F}(xy) = \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y)$).

Demostración. Realizamos un breve esbozo de la prueba (no la completamos con todos los detalles, pues ello conlleva un poco de teoría de la medida, y no es el caso para un curso del nivel que pretendemos. Para una prueba completamente rigurosa, ver [37, pg. 5]). Empezamos esbozando la prueba de que $h(t) \in L^1(-\pi, \pi)$ y $\|h\|_{L^1(-\pi, \pi)} \leq \frac{1}{2\pi} \|x\|_{L^1(-\pi, \pi)} \|y\|_{L^1(-\pi, \pi)}$, para lo que hacemos la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^1(-\pi, \pi)} &= \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| \int_{-\pi}^{\pi} x(s)y(t-s) ds \right| \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |x(s)y(t-s)| ds \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |x(s)y(t-s)| dt \right) ds \text{ (por el Teor. Fubini)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(s)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |y(t-s)| dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \|y\|_{L^1(-\pi, \pi)} \int_{-\pi}^{\pi} |x(s)| ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \|y\|_{L^1(-\pi, \pi)} \|x\|_{L^1(-\pi, \pi)}. \end{aligned}$$

Veamos ahora qué sucede con los coeficientes de Fourier de h :

$$\begin{aligned} \widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)y(t-s) ds \right) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)y(t-s)e^{-int} dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s)e^{-ins}y(t-s)e^{-in(t-s)} dt \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t-s)e^{-in(t-s)} dt \right) x(s)e^{-ins} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{y}(n)x(s)e^{-ins} ds = \widehat{y}(n)\widehat{x}(n). \end{aligned}$$

Finalmente, la propiedad $\mathcal{F}(xy) = \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y)$ se sigue esencialmente de que

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(n)e^{int} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{y}(n)e^{int} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(k)\widehat{y}(n-k) \right) e^{int}. \square$$

Teniendo en cuenta que para señales arbitrarias $x(t), y(t) \in L^1(-\pi, \pi)$ se verifican las identidades $\widehat{x * y}(n) = \widehat{x}(n)\widehat{y}(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$), podemos deducir la siguiente consecuencia: si convolucionamos una señal $x(t)$ contra otra señal $y(t)$ que es suave hasta un orden prefijado (i.e., los coeficientes de Fourier de y se van a cero con cierta velocidad prefijada), entonces la señal resultante es al menos tan suave como la señal de partida y (i.e., se tiene que $|\widehat{x * y}(n)| = |\widehat{x}(n)||\widehat{y}(n)| \leq \|\mathcal{F}(x)\|_{l_\infty(\mathbb{Z})}|\widehat{y}(n)| = C|\widehat{y}(n)|$, $n \in \mathbb{Z}$). Esto significa que, en general, la convolución de señales se puede interpretar que produce un efecto de suavizado de la señal con la que se trabaja.

5. Aproximación por mínimos cuadrados

Dada una señal 2π -periódica $x(t)$, podemos plantear como medida de aproximación a la señal x mediante otra señal y el error cuadrático medio: $\int_{-\pi}^{\pi} |x(t) - y(t)|^2 dt$. Como veremos a continuación, esta forma de medir posee ventajas sustanciales en comparación con la norma uniforme $\|x - y\|_\infty = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |x(t) - y(t)|$.

Si queremos aproximar nuestra señal con combinaciones lineales de senos y cosenos, de la forma

$$g_N(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)),$$

entonces buscaremos los coeficientes A_k, B_h ($k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $h \in \{1, \dots, N\}$) de modo que la función error

$$E(A_0, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[x(t) - \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^N (A_k \cos(kt) + B_k \sin(kt)) \right) \right]^2 dt$$

alcance su valor mínimo. Como E es derivable y consideramos que sus variables toman valores arbitrarios en todo \mathbb{R} , su valor mínimo global debe ser también un extremo relativo, y por tanto, se calcula mediante la búsqueda de los puntos críticos (i.e., anulando todas las derivadas parciales). Ahora bien,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial A_m} &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial A_m} \left(\frac{A_0^2}{2} \pi - A_0 \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt \right) & \text{si } m = 0 \\ \frac{\partial}{\partial A_m} \left(A_m^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mt) dt - 2A_m \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(mt) dt \right) & \text{si } m > 0 \end{cases} \\ &= 2 \left(\pi A_m - \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos(mt) dt \right) \\ \frac{\partial E}{\partial B_h} &= \frac{\partial}{\partial B_h} \left(B_h^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(ht) dt - 2B_h \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(ht) dt \right) \\ &= 2 \left(\pi B_h - \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(ht) dt \right) \end{aligned}$$

Por tanto, el único punto crítico de E proporciona como solución los coeficientes de la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de la señal $x(t)$. Ahora bien, si tenemos en cuenta que E debe poseer un mínimo global, por el Teorema de Weierstrass (sobre la existencia de extremos absolutos para funciones continuas definidas sobre conjuntos cerrados y acotados de \mathbb{R}^n), ya que basta tomar el

mínimo absoluto que se alcanza en la bola cerrada de centro el origen de coordenadas de \mathbb{R}^{2N+1} y radio $R = 2 \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt$, entonces dicho mínimo se alcanza exactamente en el punto crítico que hemos calculado. Esto demuestra que, en el sentido de $L^2(-\pi, \pi)$, la suma parcial N -ésima $S_N x$ de la serie de Fourier de la señal $x \in L^2(-\pi, \pi)$ es su mejor aproximación por polinomios trigonométricos de grado $\leq N$.

5.1. Algunas observaciones complementarias

Algunas observaciones son necesarias. Por ejemplo, es claro que la demostración que hemos esbozado funciona para cualquier sistema ortogonal de funciones $\mathbf{W} = \{u_k\}_{k=0}^N$ en un intervalo $[a, b]$ respecto de una función peso $w(t)$, ya que en tal caso podemos definir

$$E(A_0, \dots, A_N) = \int_a^b \left[x(t) - \sum_{k=1}^N A_k u_k(t) \right]^2 w(t) dt$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial A_m} &= \frac{\partial}{\partial A_m} \left(A_m^2 \int_a^b u_m^2(t) w(t) dt - 2A_m \int_a^b x(t) u_m(t) w(t) dt \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\int_a^b u_m^2(t) w(t) dt \right) A_m - \int_a^b x(t) u_m(t) w(t) dt \right\}, \end{aligned}$$

lo que nos lleva a la conclusión de que el correspondiente punto crítico está dado por

$$A_m = \frac{\int_a^b x(t) u_m(t) w(t) dt}{\int_a^b u_m^2(t) w(t) dt}, \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

Este resultado fue probado por Gram⁷ en 1883 y posee algunas consecuencias importantes. Entre ellas, cabe destacar las siguientes (cuya demostración se propondrá posteriormente como ejercicio guiado, y en un contexto un poco más general):

Corolario 1 Si $x(t) \in L^2_w(a, b)$ y $\mathbf{W} = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de funciones en (a, b) respecto de la función peso $w(t)$, entonces son equivalentes:

- i) La sumas parciales $S_N^{\mathbf{W}}(x)(t) = \sum_{k=0}^N c_k u_k(t)$ del desarrollo de Fourier de $x(t)$ respecto del sistema \mathbf{W} convergen a $x(t)$ en $L^2_w(a, b)$.

⁷J. P. Gram (1850-1916). Matemático danés. Su primer trabajo importante apareció publicado en Math. Annalen bajo el título *Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algebre moderne* y proporcionó un fundamento sólido para la teoría de los invariantes algebraicos. Trabajó para una compañía de seguros, lo que motivó su interés por el Análisis Numérico y la Teoría de la Probabilidad. En 1879 publicó un artículo titulado *On series expansions determined by the method of least squares*, logrando de esta forma obtener su título de Doctor en Ciencias. Este trabajo se publicó en el Journal für Mathematik y fue de capital importancia para el desarrollo posterior de la Teoría de Ecuaciones Integrales. Normalmente, se le recuerda por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, que calcula, a partir de un conjunto de vectores libres, otro conjunto de vectores libres que genera el mismo espacio pero forma un sistema ortogonal. Este resultado, sin embargo, parece que se debe originalmente a Laplace y que ya Cauchy lo utilizaba de forma no trivial en 1836.

ii) Se satisface la identidad de Parseval:

$$\|x(t)\|_{L^2_{\mathbf{w}}(a,b)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|u_k\|_{L^2_{\mathbf{w}}(a,b)}^2$$

Corolario 2 (Desigualdad de Bessel) ⁸ Supongamos que $x(t) \in L^2_{\mathbf{w}}(a,b)$ y que $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal de funciones en (a,b) respecto de la función peso $\mathbf{w}(t)$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \|u_k\|_{L^2_{\mathbf{w}}(a,b)}^2 \leq \|x(t)\|_{L^2_{\mathbf{w}}(a,b)}^2.$$

Corolario 3 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $\mathbf{W} = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ es un sistema ortogonal completo de funciones en (a,b) respecto de $\mathbf{w}(t)$.
- ii) Para todo $x(t) \in L^2_{\mathbf{w}}(a,b)$ se satisface la identidad de Parseval.
- iii) El espacio vectorial $\text{span}\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$ es denso en $L^2_{\mathbf{w}}(a,b)$.

5.2. La serie de Fourier compleja como una isometría $\mathcal{F} : L^2(-\pi, \pi) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$

La desigualdad de Bessel implica que $\mathcal{F}(L^2(-\pi, \pi)) \subseteq l_2(\mathbb{Z})$. Ahora bien, podemos preguntarnos entonces si es cierto además que $\mathcal{F}(L^2(-\pi, \pi)) = l_2(\mathbb{Z})$. Si esto fuera así, entonces tendríamos claramente que $\mathcal{F} : L^2(-\pi, \pi) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ es una isometría de espacios de Hilbert. Pues bien: efectivamente, tal es el caso. Esto fue demostrado por Riesz y, de forma independiente, por Fischer, en 1907.

Teorema 3 (Riesz-Fischer, 1907) ⁹ $\mathcal{F} : L^2(-\pi, \pi) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ es una isometría de espacios de Hilbert.

Debido al nivel de este curso, no queremos entrar en la demostración de este teorema, ya que ésta requiere introducir el concepto de integral de Lebesgue.

El teorema de Riesz-Fischer no es cierto si cambiamos $L^2(-\pi, \pi)$ por el espacio de las señales de cuadrado integrable según Riemann. [**Dem.** Podemos justificar esta afirmación de la siguiente forma: El conjunto de las señales de cuadrado integrable según Riemann, no es un espacio de Hilbert, ya

⁸F. W. Bessel (1784-1846). Alemán. Su trabajo para una firma comercial de Bremen, con intereses internacionales, le hizo estudiar español e inglés. Pronto se interesó por la navegación y, en particular, por el problema de determinar la posición de un barco en el mar. Esto le llevó a la astronomía y a las matemáticas. A partir de ahí, dedicó toda su vida a la investigación, llegando a ser nombrado director del laboratorio de astronomía de Königsberg.

⁹F. Riesz (1880-1956). Matemático húngaro. Se doctoró en Budapest en 1902 con un trabajo sobre Geometría. Se le considera uno de los fundadores del Análisis Funcional. Basándose en las ideas de Frechet, logró conectar las contribuciones de Lebesgue sobre funciones de variable real, con el trabajo de Hilbert y de Schmidt en Ecuaciones Integrales. En 1907 y 1909 demostró sus famosos teoremas de representación para los funcionales sobre el espacio de las funciones de cuadrado integrable (según Lebesgue, en el primero de los trabajos, y según Stieljes en el segundo). Fue el primero en estudiar los espacios L^p . Podemos, además, atribuir a un trabajo suyo de 1910 el comienzo de la Teoría de Operadores.

E. S. Fischer (1875-1954). Matemático austriaco. Demostró de forma independiente (en el mismo año que F. Riesz), que la condición necesaria y suficiente para que una sucesión esté formada por los coeficientes de Fourier de una función de $L^2(0, 2\pi)$, es que ésta pertenezca al espacio $l^2(\mathbb{Z})$.

que no es completo, mientras que $l_2(\mathbb{Z})$ sí lo es]. Este hecho proporcionó a Lebesgue un argumento verdaderamente poderoso en favor de su nuevo concepto de integral.

Desde el punto de vista de la Teoría de señales, podemos entender que el operador $\mathcal{F} : L^2(-\pi, \pi) \rightarrow l_2(\mathbb{Z})$ transforma una señal analógica de energía finita $x(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ en una señal discreta de energía finita, $\mathcal{F}(x) = \{\hat{x}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_2(\mathbb{Z})$ y, de hecho, la identidad de Parseval establece que \mathcal{F} conserva la energía de la señal y el teorema de Riesz-Fischer garantiza la invertibilidad del proceso. De esta forma, somos capaces de conservar toda la información de la señal (que es un continuo de valores $\{x(t) : t \in (-\pi, \pi)\}$) en términos de los coeficientes de Fourier. Decimos que $\{\hat{x}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ representa a la señal en el dominio de la frecuencia, mientras que $\{x(t) : t \in (-\pi, \pi)\}$ la describe en el dominio del tiempo.

También desde el punto de vista matemático el teorema de Riesz-Fischer es un resultado sorprendente. Significa que ciertos espacios de funciones se pueden interpretar en realidad como espacios de sucesiones (¡y los espacios de sucesiones son mucho más sencillos, para trabajar con ellos, que los espacios de funciones!). De hecho, demuestra que sólo hay un prototipo de espacio de Hilbert (separable), y es $l_2(\mathbb{Z})$. Se trata, pues, de uno de los primeros teoremas importantes del Análisis Funcional.

Otra interpretación: Si $x(t)$ es 2π -periódica no nula, entonces es obvio que $x \notin L^2(\mathbb{R})$ y, por tanto, no es una señal de energía finita. Ahora bien, si $x(t) \in L^2(-\pi, \pi)$ y $M = 2k\pi + T \in [2k\pi, 2(k+1)\pi)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ entonces se tendrá que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2M} \int_{-M}^M |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2M} \left\{ \int_{-2k\pi-T}^{-2k\pi} |x(t)|^2 dt + 2 \sum_{h=0}^{k-1} \int_{2h\pi}^{2(h+1)\pi} |x(t)|^2 dt + \int_{2k\pi}^{2k\pi+T} |x(t)|^2 dt \right\} \\ &= \frac{1}{4k\pi + 2T} \left\{ \int_{-T}^0 |x(t)|^2 dt + \int_0^T |x(t)|^2 dt + 2k \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \right\} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M} \int_{-M}^M |x(t)|^2 dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4k\pi + 2T} \left\{ \int_{-T}^0 |x(t)|^2 dt + \int_0^T |x(t)|^2 dt + 2k \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{4k\pi + 2T} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Es decir, podemos interpretar $\|x(t)\|_{L^2(-\pi, \pi)}$ en términos de la potencia media de la señal (y, por tanto, la señal es de potencia media finita). Ahora bien, en tal caso podemos interpretar la igualdad de Parseval de la siguiente forma: Si

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n)e^{nit}$$

entonces

$$\mathbf{P}(x) = \frac{1}{2\pi} \|x(t)\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = \|\{\widehat{x}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}\|_{l_2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{x}(n)|^2$$

Como, por otra parte,

$$\frac{1}{2\pi} \|\widehat{x}(n)e^{nit}\|_{L^2(-\pi, \pi)}^2 = |\widehat{x}(n)|^2,$$

podemos interpretar que los coeficientes de Fourier de la señal sirven para describir la aportación a la potencia media de la señal de cada una de sus componentes de frecuencia. Por esta razón, la sucesión $\{|\widehat{x}(n)|^2\}_{n=-\infty}^{\infty}$ recibe el nombre de **densidad espectral de potencia** de la señal.

Referencias

- [1] **J. M. Almira**, An introduction to Fourier Series and Signal Processing, Technische Universität Chemnitz, Preprint 2001-13 (2001).
- [2] **J. Arias de Reyna**, *Pointwise convergence of Fourier Series*, Springer-Verlag, 2002.
- [3] **N. Aronszajn**, La théorie des noyaux reproduisants et ses applications, Proc. Cambridge Phil. Soc. 39 (1943) 133-153.
- [4] **J. J. Benedetto**, Irregular sampling and frames, in *Wavelets: A tutorial in Theory and Applications*, C. K. Chui (ed.) Academic Press (1992), 445-507.
- [5] **R. P. Boas**, *Entire Functions*, Academic Press, 1954.
- [6] **S. Bochner**, *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza Universidad **689**, Alianza Ed. (1991).
- [7] **W. Bolton**, *Laplace and Z-transforms*, Logman (1998).
- [8] **F. Bombal**, Laurent Schwartz: El matemático que quería cambiar el mundo, La Gaceta de la R.S.M.E. **6** 1 (2003)
- [9] **R. M. Bracewell**, *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series (1965).
- [10] **J. L. Brown**, On the error in reconstructing a non-bandlimited function by means of the band-pass sampling theorem, J. Math. Anal. Appl **18** (1967) 75-84.
- [11] **J. R. Buck, M. M. Daniel, A. C. Singer**, *Computer Explorations in Signals and Systems Using Matlab*, Signal Processing Series, Prentice Hall (1997).
- [12] **P. L. Butzer, R. L. Stens**, Sampling theory for non-necessarily band-limited functions: a historical overview, SIAM Rev. **34** (1992) 40-53.
- [13] **A. Cañada Villar**, *Series de Fourier y Aplicaciones. Un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos*, Ed. Pirámide, 2002.

- [14] **D. C. Champeney**, *A handbook of Fourier Theorems*, Cambridge university Press (1987).
- [15] **R. Duffin, A. Shaeffer**, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952) 341-366.
- [16] **P.P.G. Dyke**, *An introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer (2001).
- [17] **J. W. Eaton et al.**, GNU Octave, disponible en www.octave.org.
- [18] **R. E. Edwards**, *Fourier series (A modern introduction) Vol 1*, Graduate Texts in Mathematics **64**, Springer (1979).
- [19] **K. Fan, O. Taussky, J. Todd**, Discrete analogs of inequalities of Wirtinger, *Monasch. Math.* **59** (1955) 73-90.
- [20] **G. B. Folland**, *Fourier analysis and its applications*, Brooks-Cole Publishing Co. (1992).
- [21] **S. Forcada**, *Introducción a la integral de Lebesgue*, Promociones y Publicaciones Universitarias, Barcelona, 1988.
- [22] Free Software Foundation, The GNU Scientific Library, disponible en <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [23] **R. A. Goldberg**, *Fourier transforms*, Cambridge University Press (1965).
- [24] **E. A. González-Velasco**, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic-Press (1995).
- [25] **H. G. Feichtinger, K. Gröchenig**, Irregular sampling theorems and series expansions of band-limited functions, *J. of Math. Anal. Appl.* **167** (1992) 530-556.
- [26] **K. Gröchenig**, Reconstruction algorithms in irregular sampling, *Math. Comput.* **59** (1992) 181-194.
- [27] **K. Gröchenig**, A discrete theory of irregular sampling, *Linear Alg. and its Appl.* **193** (1993) 129-150.
- [28] **K. Gröchenig**, Irregular sampling, Toeplitz matrices and the approximation of entire functions of exponential type, *Math. of Comp.* **68** (1999) 749-765.
- [29] **R. W. Hamming**, *Digital Filters (Third Edition)*, Dover (1998).
- [30] **G. Hardy, W. W. Rogosinski**, *Fourier Series*, Dover (1999).
- [31] **G. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya**, *Inequalities*, (2nd Edition) Cambridge University Press, 1952.
- [32] **S. Haykin, B. Van Veen**, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons Inc. (1999).

- [33] **J. R. Higgins**, *Sampling Theory in Fourier Analysis and Signal Analysis*, Oxford University Press (1996).
- [34] **P. Jacklam**, MATLAB array manipulation tips and tricks, disponible en <http://home.online.no/~pjacklam/matlab/doc/mtt/doc/mtt.pdf>.
- [35] **M. I. Kadec**, The exact value of the Paley-Wiener constant, *Soviet. Math. Dokl.* **5** (1964) 559-561.
- [36] **D. W. Kammler**, *A first course in Fourier Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey (2000).
- [37] **Y. Katznelson**, *An introduction to Harmonic Analysis*, Dover (1976).
- [38] **V. A. Kotelnikov**, On the transmission capacity of ether and wire electrocominucations, *Izd. Red. Upr. Svgazi RKKA*, 1933.
- [39] **S. G. Krantz**, *A panorama of Harmonic Analysis*, *The Carus Math. Monographs* **27** Math. Assoc. Amer. (1999)
- [40] **A. Kufner, J. Kadled**, *Fourier Series*, Academia Praha (1971).
- [41] **P. Lancaster, K. Salkauskas**, *Transform Methods in Applied Mathematics*, Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, John-Wiley & Sons (1996).
- [42] **C. Lanczos**, *Discourse on Fourier Series*, Olyver and Boyd, Edinburg, 1966.
- [43] **H. Landau**, Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions, *Acta Math.* **117** (1967) 37-52.
- [44] **R. Lasser**, *Introduction to Fourier Series*, Marcel Dekker, 1996.
- [45] **T. Love**, Matlab vectorisation tricks, disponible en <http://www-h.eng.cam.ac.uk/help/tpl/programs/Matlab/tricks.html>.
- [46] **S. Mallat**, *A wavelet tour of signal processing*, 2^a Ed., Academic Press (1999).
- [47] **J. B. Mariño, F. Vallverdú, J. A. Rodríguez, A. Moreno**, *Tratamiento digital de la señal*, Ed. UPC (1999).
- [48] **P. Marziliano, M. Vetterli**, Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations, *IEEE Transactions on Signal Proccesing* **48** 12 (2000) 3462-3471.
- [49] The MathWorks, MATLAB website, www.mathworks.com.
- [50] The MathWorks, Code Vectorization Guide, disponible en <http://www.mathworks.com/support/tech-notes/1100/1109.html>.
- [51] **C. Neumann**, Zur theorie des logarithmischen und des Newtonschen Potentials, *Ber. Verh. Math.-Phys. Classe Königl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* **32** (1870) 49-56, 264-321.

- [52] **C. Neumann**, *Über die methode des Arithmetischen Mittels*, Hirzel, Leipzig, 1887.
- [53] **A. Papoulis**, *Sistemas digitales y analógicos, Transformadas de Fourier, Estimación espectral*, Marcombo (1986).
- [54] **J. R. Partington**, *Interpolation, Identification and Sampling*, Oxford University Press (1997).
- [55] **A. Pinkus**, Weierstrass and Approximation Theory, *J. Approx. theory* **107** (2000) 1-66.
- [56] **A. Pinkus, S. Zafrany**, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge University Press (1997).
- [57] **W. H. Press et al.**, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge Univ. Press, 1986.
- [58] **M. H. Protter, C.B. Morrey**, *Análisis Real*, Editorial AC, 1986.
- [59] **V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn**, *Lectures on Functional Analysis and Applications*, World Scientific Publishing Co., (1999).
- [60] **W. Rudin**, *Análisis real y complejo*, Editorial Alhambra, 1985.
- [61] **D. E. Rutherford**, Some continuant determinants arising in Physics and Chemistry, II. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **62A** (1947) 229-236.
- [62] **K. Seip**, On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2(-\pi, \pi)$, *J. Functional Anal.* **130** (1995) 131-160.
- [63] **H. Shapiro**, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Mathematics **187**, Springer-Verlag (1971).
- [64] **I. Stewart, D. Tall**, *Complex Analysis*, Cambridge Univ. Press (1983).
- [65] **O. Steinbach, W. L. Wendland**, On C. Neumann's method for second order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries, *J. of Math. Anal. and Appl.* **262** (2001) 733-748.
- [66] **G. Strang**, A proposal for Toeplitz matrix calculations, *Stud. Appl. Math.* **74** (1986) 171-176.
- [67] **T. Strohmer**, Efficient methods for digital signal and image reconstruction from nonuniform samples, Ph. Thesis, Viena, 1993.
- [68] **M. Unser**, Sampling: 50 years after Shannon, *Proc. IEEE* **88** 4 (2000) 569-587.
- [69] **J. I. Richards, H. K. Youn**, *Theory of Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [70] **D.A. Watt**, "Programming Language Concepts and Paradigms". Prentice Hall International, 1991
- [71] **R. Young**, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, CRC Press, 1993.
- [72] **A. I. Zayed**, *Advances in Shannon's sampling theory*, CRC Press, 1993.