Fenómeno de Gibbs*

Consideremos la serie formal de Fourier asociada a la función escalonada

$$x(t) = \begin{cases} -1/2 & \text{si } t \in (-\pi, 0) \\ 1/2 & \text{si } t \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Esta serie ya la habíamos calculado previamente, y es:

$$x(t) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1}$$

La correspondiente suma parcial N-ésima la podemos escribir, pues, como:

$$(S_N x)(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N} \int_0^t \cos((2k+1)u)du = \frac{2}{\pi} \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^{N} \cos((2k+1)u) \right\} du$$

Ahora, podemos calcular la suma $\sum_{k=0}^{N} \cos((2k+1)u)$ utilizando (nuevamente) que

$$\frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2} = \cos a \sin b$$

y, por tanto,

$$\cos((2k+1)u) \sin u = \frac{\sin(2(k+1)u) - \sin(2ku)}{2},$$

lo que nos lleva a la identidad

$$\sum_{k=0}^{N} \cos((2k+1)u) \sin u = \frac{1}{2} \sin(2(N+1)u)$$

y, por tanto,

$$(S_N x)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin u} du.$$

Con esta fórmula podemos fácilmente calcular los extremos relativos de $(S_N x)(t)$.

J. Willard Gibbs fue el primer matemático que dió importancia al siguiente fenómeno (que luego fue bautizado como fenómeno de Gibbs, aunque en realidad éste había sido descubierto previamente

*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto del autor: J.M. Almira, “Matemáticas para la recuperación de señales”, Grupo Editorial Universitario, 2005.

por Michelson, mientras realizaba ciertos experimentos eléctricos, ver [2]): el grafo de las sumas parciales $S_N x$ tiende a exceder el tamaño del salto de discontinuidad de la señal $x(t)$ con una altura que representa aproximadamente el 9 % del salto (independientemente de N).

En nuestro ejemplo, podemos ver que

$$(S_N x)'(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(2(N+1)t)}{\sin t}$$

y, por tanto, el primer máximo de $(S_N x)(t)$ en el intervalo $(0,\pi]$ ocurre para $t = \frac{\pi}{2(N+1)}$, donde $S_N x$ toma el valor

$$(S_N x)(\frac{\pi}{2(N+1)}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(N+1)}} \frac{\sin(2(N+1)u)}{\sin u}du.$$

Hacemos el cambio de variable $v = 2(N+1)u$ para obtener que

$$\begin{aligned}(S_N x)(\frac{\pi}{2(N+1)}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin v}{\sin(v/(2(N+1)))}\frac{dv}{2(N+1)} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v}\frac{v/(2(N+1))}{\sin(v/(2(N+1)))}dv.\end{aligned}$$

Ahora bien, $\frac{\sin v}{v}$ es una función acotada en $[0,\pi]$ y

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\sup_{v\in(0,\pi)} |1 - \frac{v/(2(N+1))}{\sin(v/(2(N+1)))}|\right\} = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v}dv - (S_N x)(\frac{\pi}{2(N+1)})\right) \\ =& \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v}dv - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v}\frac{v/(2(N+1))}{\sin(v/(2(N+1)))}dv\right) \\ =& \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v}\left\{1 - \frac{v/(2(N+1))}{\sin(v/(2(N+1)))}\right\}dv\right) = 0\end{aligned}$$

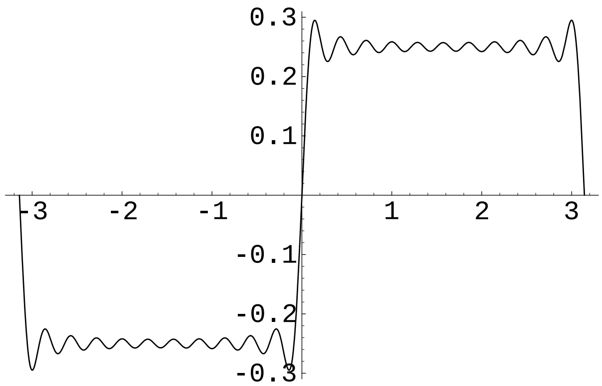
Es decir,

$$\lim_{N\to\infty}(S_N x)(\frac{\pi}{2(N+1)}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin v}{v}dv \approx 0{,}58949 = 0{,}5 + 0{,}08949,$$

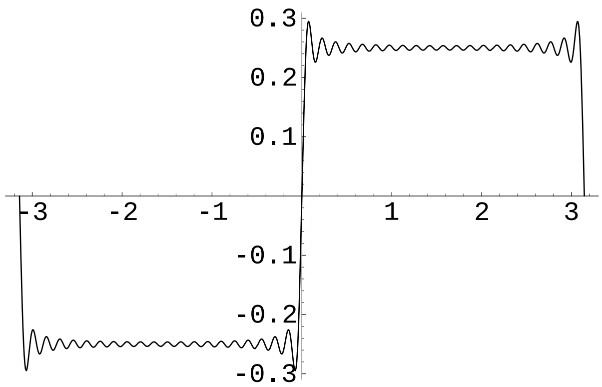
que es lo que queríamos probar.

Nota. Si se realiza una cirugía adecuada sobre la señal, es fácil demostrar que el fenómeno de Gibbs se produce para señales generales en los puntos de discontinuidad. Es un bonito ejercicio que dejamos al lector.

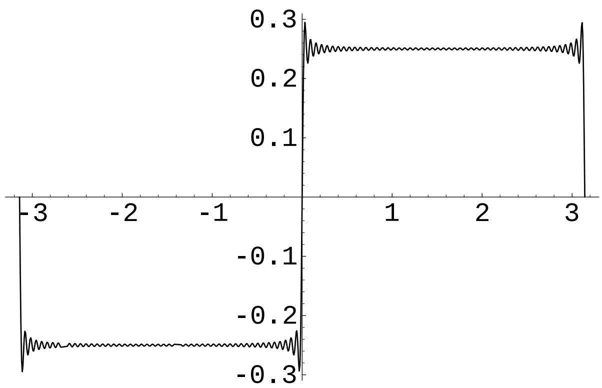
Las siguientes gráficas se corresponden con las sumas parciales $S_3(x), S_{10}(x)$ y $S_{40}(x)$, respectivamente, para la señal con la que hemos hecho los cálculos en esta sección, y muestran claramente el fenómeno de Gibbs:



$\sum_{k=0}^{10} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$



$\sum_{k=0}^{20} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$



$\sum_{k=0}^{50} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$

El fenómeno de Gibbs se produce siempre que truncamos una serie de Fourier, y es de especial importancia para el estudio de sistemas lineales (e.g., filtros digitales).

Referencias

[1] **C. Gasquet and P. Witomski,** *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets* Texts in Applied Mathematics **30** Springer 1999.

[2] **C. Lanczos,** *Discourse on Fourier Series,* Olyver and Boyd, Edinburg, 1966.