Caracterización de filtros como operadores de convolución.*

Vamos a demostrar que, para una amplia clase de filtros L, éstos están completamente caracterizados como operadores de convolución. Para abordar esta cuestión, será necesario realizar un examen un poco más en profundidad de la estructura interna de las distribuciones. La idea es comprobar que las distribuciones de soporte compacto siempre se pueden interpretar como una combinación lineal de derivadas (generalizadas) de orden finito para cierto entero, de una ciertas funciones continuas. Una vez hecho esto, se procede del siguiente modo:

- Se demuestra que los filtros preservan la derivación de distribuciones. (Es decir, para toda distribución $\Omega \in \mathcal{S}'$ y todo entero $n \geq 0$ se prueba que $L(\Omega^{(n)}) = L(\Omega)^{(n)}$).
- Dada una distribución de soporte compacto Ω, se buscan las funciones continuas $h_1(t), \cdots, h_m(t)$ que se anulen fuera de cierto intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ y tales que $\Omega = \sum_{k=1}^{m} h^{(n_k)}$ para ciertos enteros $n_k \geq 0$. Usamos la linealidad del filtro para suponer simplemente que $\Omega = h^{(n+2)}$ para cierta función continua h, y estudiar solo este caso.
- Aproximamos uniformemente en $[a, b]$ la función h con una sucesión de poligonales.
- Las derivadas $(n + 2)$-ésimas de las poligonales, que son a su vez la derivada n-ésima de una combinación lineal de deltas de Dirac desplazadas, convergen en $\mathcal{D}'$ a Ω
- Como el operador L preserva la derivación, basta que conozcamos su acción sobre la delta de Dirac para saber lo que vale aplicado a Ω.
- Se comprueba que $L(\Omega) = \Omega * L(\delta)$.
- Finalmente, se establece la relación que hay entre $L(\delta)$ y la función de transferencia del filtro, $M(s)$. (Se ve que $M(s) = \mathcal{F}(L(\delta))$)

Evidentemente, para nuestros objetivos necesitamos saber si la caracterización anterior se extiende cuando consideramos filtros definidos en espacios de distribuciones más grandes que $\mathcal{E}'$. En particular, necesitamos saber si ésta se da para todo filtro definido en un espacio de distribuciones Σ_1 siempre que éste verifique $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma$. La idea fundamental para lograr este tipo de extensión es precisar de forma cuidadosa qué entendemos por "continuidad" del sistema L y, a continuación, utilizar que las distribuciones de soporte compacto son un subconjunto denso de $\mathcal{D}'$.

---

*Este documento está basado ampliamente en el libro de texto conjunto de J.C. del Toro Iniesta, J.M. Almira, J. C. Suarez-Yanes, "Fundamentos del procesado de señales, con aplicaciones en física y astrofísica", Manuscrito (2009).

1. Integrales de distribuciones

Si queremos definir la integral indefinida (o primitiva) Γ de la distribución $\Omega \in \mathcal{D}'$, necesitaremos que el nuevo concepto sea coherente con el de derivada generalizada. Así pues, como buscamos que $\Gamma' = \Omega$ y si admitimos que $\Gamma \in \mathcal{D}'$, entonces tendremos que

$$\forall \phi \in \mathcal{D} : (\Gamma', \phi) = (\Omega, \phi),$$

o, lo que es equivalente,

$$\forall \phi \in \mathcal{D} : (\Gamma, \phi') = (-1)(\Omega, \phi).$$

Esto nos da información sobre cómo debe comportarse la nueva distribución Γ sobre el espacio $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}$ dado por

$$\mathcal{H} = \{\phi' : \phi \in \mathcal{D}\}.$$

Sin embargo, esta información no parece ser suficiente para definir una distribución $\Gamma \in \mathcal{D}'$ porque $\mathcal{H}$ es un subespacio propio de $\mathcal{D}$ y debemos saber lo que vale (Γ, ϕ) para toda función $\phi \in \mathcal{D}$. ¿Significa esto que no es posible definir las primitivas de las distribuciones $\Omega \in \mathcal{D}'$? Afortunadamente, no. Vamos a ver cómo toda distribución admite una primitiva, que es a su vez una distribución. La idea principal para abordar esta cuestión es descomponer los elementos de $\mathcal{D}'$ de una forma especial. Este es el contenido del siguiente resultado

Lemma 1 *Sea $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)dt = 1$ y sea $\phi \in \mathcal{D}$. Entonces*

$$\varphi = \phi - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt \right) \varphi_0 \in \mathcal{H}.$$

Es más, $k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt$ es la única constante tal que $\varphi = \phi - k\varphi_0 \in \mathcal{H}$.

Consideremos ahora $\Omega \in \mathcal{D}'$ una distribución arbitraria y tomemos $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t)dt = 1$. Entonces toda $\phi \in \mathcal{D}$ se puede representar de forma única como $\phi = \varphi + k\varphi_0$ con $\varphi = \mu' \in \mathcal{H}$. Si $\Gamma \in \mathcal{D}'$ es una primitiva de Ω, entonces

$$(\Gamma, \phi) = (\Gamma, \varphi + k\varphi_0) = (\Gamma, \varphi) + k(\Gamma, \varphi_0) = -(\Omega, \mu) + k(\Gamma, \varphi_0)$$

Esto significa que, una vez hayamos fijado el valor (Γ, φ_0), la distribución Γ estará completamente definida sobre todo $\mathcal{D}$. Aún así, será necesario demostrar que Γ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{D}$.

Teorema 1 *Para toda $\Omega \in \mathcal{D}'$ existe una distribución $\Gamma \in \mathcal{D}'$ tal que $\Gamma' = \Omega$.*

2. Las distribuciones como derivadas generalizadas de funciones continuas

A lo largo de este libro tendremos que enfrentarnos a algunas cuestiones delicadas cuyo análisis directo es muy difícil. Para poder abordar este tipo de cuestiones, que irán surgiendo en los distintos capítulos del libro, es muy útil conocer cuál es la estructura íntima de las distribuciones. En particular, sabemos que si una función es localmente integrable (por ejemplo, todas las funciones continuas lo son), entonces es una distribución y, por tanto, todas sus derivadas generalizadas son también distribuciones. Una pregunta natural es, por tanto, saber si existen más distribuciones aparte de las que se pueden generar de esta forma.

Antes de enfrentarnos al problema en su completa generalidad, quizás sirva de motivación realizar algunos cálculos sencillos. Pensemos, por ejemplo, en la distribución δ de Dirac. Obviamente, si tomamos

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \end{cases},$$

entonces $\delta = r''$. Pero la función $r(t)$ no es de soporte acotado. ¿Será posible encontrar otra función $h(t)$ continua y de soporte acotado tal que $\delta = h''$? La respuesta a esta cuestión concreta es, evidentemente, negativa. Si tuviéramos que $\delta = h''$ entonces $(h - r)'' = h'' - r'' = 0$ y, por tanto, $h(t) = r(t) + at + b$ para ciertos valores a, b, lo cual, obviamente, es incompatible con que $\mathbf{sop}(h)$ sea un conjunto acotado.

Aún así, quizás podamos hacer algo. Si rebajamos nuestra petición $\delta = h''$ a que, sobre cierto intervalo que contenga al soporte de la delta de Dirac, las distribuciones δ y h'' coincidan, entonces sí va a ser posible encontrar candidatos h continuos de soporte acotado. De hecho, nos interesaría que el soporte de esta función h fuese tan pequeño como queramos. Una buena idea para afrontar esta cuestión es la siguiente: Tomemos

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ -t/2 - 1/2 & -1 \leq t \leq 0 \\ t/2 - 1/2 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases},$$

entonces $h'' = -\frac{1}{2}\delta_{(-1)} + \delta - \frac{1}{2}\delta_{(1)}$, lo cual hace que $(\delta, \phi) = (h'', \phi)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$ que verifique $\mathbf{sop}(\phi) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$. En particular, h'' coincide con δ en todo entorno de 0 que esté contenido en $(-1, 1)$. Este hecho se puede explotar del siguiente modo: Si $0 < \varepsilon < 1$ y $\rho(t)$ es una función de $\mathcal{D}$ con $\mathbf{sop}(\rho) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$ y $\rho(t) = 1$ para todo $t \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, entonces es claro que $\delta = \rho h''$. Si tenemos en cuenta ahora que $\rho h'' = (\rho h')' - \rho h'$ y $\rho h' = (\rho h)' - \rho' h$, es claro que

$$\delta = \rho h'' = ((\rho h)' - \rho' h)' - (\rho h)' + \rho' h = (\rho h)'' - (\rho' h)' - (\rho h)' + \rho' h = f_1'' + f_2' + f_3' + f_4,$$

donde las funciones $f_1 = \rho h$, $f_2 = -\rho' h$, $f_3 = -\rho h$ y $f_4 = \rho' h$ son todas continuas y de soporte acotado, contenido en $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Así, aunque no es posible escribir la delta de Dirac como la derivada segunda de una función continua de soporte acotado, sí podemos ponerla como una suma de derivadas (de órdenes menor o igual a dos) de funciones continuas de soporte compacto. Además, podemos lograr que sus soportes estén contenidos en un entorno arbitrariamente pequeño del soporte de δ. Como veremos, esto es precisamente lo que sucede en el caso general.

Para enfrentarnos al problema general vamos primero a demostrar que las distribuciones $\Omega \in \mathcal{D}'$ satisfacen cierta acotación natural, que luego utilizaremos para probar que toda distribución es localmente la derivada generalizada de orden ≥ 2 de cierta función continua. Para demostrar esto último es para lo que hemos necesitado introducir en la sección anterior el concepto de integral de una distribución. Finalmente, usaremos la misma técnica que hemos expuesto en el ejemplo de la delta de Dirac para probar que toda distribución de soporte compacto es suma de derivadas generalizadas de un número finito de funciones continuas de soporte compacto.

Sea I un intervalo de la recta real. Definimos el espacio $\mathcal{D}_I = \{\phi \in \mathcal{D} : \mathbf{sop}(\phi) \subseteq I\}$. En este espacio consideramos la convergencia de funciones heredada de la convergencia en $\mathcal{D}$.

Teorema 2 *Sea $\Omega \in \mathcal{D}$ y sea $I = [a, b]$, con $a < b$. Entonces existen un entero positivo r y una constante C (ambos dependientes sólo de Ω e I) tales que*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_I : |(\Omega, \phi)| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi^{(r)}(t)|.$$

Demostración. Antes de comenzar con la prueba, vamos a introducir cierta notación. Fijado el intervalo $I = [a, b]$, definimos, para cada $\phi \in \mathcal{D}_I$ los números

$$\gamma_k(\phi) = (b-a)^k \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi^{(k)}(t)|, \quad k = 0, 1, 2, \cdots .$$

Obviamente, como para cada entero $k \geq 0$ y cada función $\phi \in \mathcal{D}_I$ se tiene que $\phi^{(k)}(t) = \int_a^t \phi^{(k+1)}(s)ds$, es evidente que

$$\forall t \in \mathbb{R} : |\phi^{(k)}(t)| \leq (b-a) \sup_{s \in \mathbb{R}} |\phi^{(k+1)}(s)|$$

y, por tanto,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_I : \gamma_0(\phi) \leq \gamma_1(\phi) \leq \gamma_2(\phi) \leq \cdots \leq \gamma_k(\phi) \leq \gamma_{k+1}(\phi) \leq ...$$

Además, la convergencia en $\mathcal{D}_I$ de la sucesión de funciones $\{\phi_n\}$ a la función ϕ es equivalente a la convergencia a cero de todas y cada una de las sucesiones numéricas $\{\gamma_k(\phi_n - \phi)\}_{n=0}^{\infty}$.

Supongamos ahora que no se satisface la desigualdad que queremos probar. En tal caso, para cada entero positivo v existirá una función $\phi_v \in \mathcal{D}_I$ tal que

$$|(\Omega, \phi_v)| \geq v(b-a)^v \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi^{(v)}(t)| = v\gamma_v(\phi_v).$$

Consideremos ahora las funciones $\theta_v = \frac{1}{v\gamma_v(\phi_v)}\phi_v \in \mathcal{D}_I$, $v = 1, 2, \cdots$. Vamos a probar que $\{\theta_v\}_{v=1}^{\infty}$ converge a cero en $\mathcal{D}_I$ y, sin embargo,

$$|(\Omega, \theta_v)| = \frac{|\Omega, \phi_v)|}{v\gamma_v(\phi_v)} \geq 1 \ (v = 1, 2, \cdots),$$

lo cual contradice la continuidad de Ω como funcional.

Así, nuestra prueba terminará en cuanto comprobemos que las sucesiones numéricas $\{\gamma_k(\theta_v)\}_{v=1}^{\infty}$ convergen todas a cero. Ahora bien,

$$\forall v \geq k : \gamma_k(\theta_v) \leq \gamma_v(\theta_v) = \frac{\gamma_v(\phi_v)}{v\gamma_v(\phi_v)} = \frac{1}{v} \to 0 \text{ (para } v \to \infty),$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar que, localmente, las distribuciones $\Omega \in \mathcal{D}'$ se obtienen como una derivada de orden $n+2$ de una función continua, para cierto $n \in \mathbb{N}$ que dependerá del intervalo bajo consideración y de la distribución Ω.

Teorema 3 *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real con $a < b$. Sea $\Omega \in \mathcal{D}'$ una distribución cualquiera. Entonces existe un entero $r \in \mathbb{N}$ y una función continua h tales que*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_I : (\Omega, \phi) = (h^{(r+2)}, \phi) = (-1)^{r+2}(h, \phi^{(r+2)}).$$

La demostración de este teorema se descompone en dos fases. En la primera de ellas asumimos que nuestra distribución Ω vsatisface la desigualdad

$$|(\Omega, \phi)| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t)| \tag{1}$$

para toda función test $\phi \in \mathcal{D}_I$ y, a partir de ésta, demostramos que $\Omega = h''$ para cierta función continua h con soporte contenido en I. En la segunda fase se utilizan las integrales de distribuciones para, a partir de una distribución que satisface la acotación descrita en el Teorema 2 para cierto $r \geq 0$, obtener otra distribución (que resulta de tomar integrales repetidas veces) verificando la desigualdad (1) y, entonces aplicar lo dicho en la primera fase.

Teorema 4 (Caracterización de las distribuciones de soporte compacto) *Si $\Omega \in \mathcal{E}'$ es una distribución de soporte compacto y $\mathbf{sop}(\Omega) \subset (a, b)$, $a < b$, entonces $\Omega = \sum_{k=1}^{m} f_k^{(n_k)}$ para ciertos números $n_1, \ldots, n_m, m \in \mathbb{N}$ y ciertas funciones continuas $f_1, f_2, \ldots, f_m$, todas ellas con soporte contenido en $[a, b]$.*

3. La δ de Dirac como elemento del espacio de las señales

Como no toda función ordinaria se corresponde con una señal física de energía finita, no es posible asignar una energía a todos los elementos de $\mathcal{D}'$. De hecho, no está claro cómo valernos de un concepto de energía aplicable a las distribuciones y que generalize el concepto que ya hemos asignado a la energía para las funciones ordinarias. Efectivamente, por el momento nadie ha logrado definir un concepto de este tipo y parece que el camino hacia él está lleno de escollos, posiblemente porque la energía no se pueda caracterizar axiomáticamente. Ahora bien, lo que sí es claro es que existen varias propiedades que cualquier concepto de energía que se introduzca debería satisfacer. Vamos a mencionar aquí varias de ellas que, conjuntamente, nos permitirán extender la clase de las señales de energía finita desde el mundo analógico al mundo digital, una vez hayamos aceptado incluir dentro de dicha clase a la distribución δ de Dirac. Las propiedades concretas a las que nos referimos son las siguientes (que se pueden verificar de forma sencilla para el caso en que la distribución a la que estamos aplicando el concepto de energía sea una función ordinaria):

- Si Ω es una distribución de energía finita $E(\Omega) < \infty$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\lambda\Omega$ también es una señal de energía finita y, además, $E(\lambda\Omega) = |\lambda|^2 E(\Omega)$.
- Si Ω es una distribución de energía finita $E(\Omega) < \infty$ y $a \in \mathbb{R}$, su traslación $\Omega_{(a)}$ también es una señal de energía finita y, además, $E(\Omega_{(a)}) = E(\Omega)$.
- Si Ω_1, Ω_2 son dos distribuciones cuyos soportes son disjuntos (es decir, $\mathbf{sop}(\Omega_1) \cap \mathbf{sop}(\Omega_2) = \varnothing$) entonces $E(\Omega_1 + \Omega_2) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$.

Si aceptamos estas propiedades como parte integral de cualquier formulación axiomática que se introduzca para la energía y añadimos como postulado que la delta de Dirac es una señal con energía finita, $E(\delta) = 1$, entonces estaremos admitiendo que toda combinación lineal $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{(t_k)}$ (donde los valores t_k son distintos dos a dos) es una señal de energía finita,

$$E(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{(t_k)}) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2.$$

Las combinaciones lineales finitas $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{(t_k)}$ son, por tanto, elementos de nuestro espacio Σ. Si L es un sistema LIC (de hecho, basta con que sea lineal e invariante por traslaciones) que admite a la delta de Dirac como entrada, siendo $\eta = L(\delta)$ la correspondiente salida, entonces L está bien definido sobre estas combinaciones lineales. En efecto: $L(\delta_{(t_k)}) = L(\delta)_{(t_k)} = \eta_{(t_k)}$ y, por tanto,

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{(t_k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_{(t_k)}.$$

Existe otra razón fundamental para considerar a la delta de Dirac como miembro de todo derecho del espacio Σ, y es que ésta es una distribución de soporte compacto. En efecto, aunque existen distribuciones de soporte compacto que no tienen asociada una energía finita, su inclusión en el espacio Σ está justificada por la sencilla razón de que estas distribuciones tienen un inicio y un final temporal, lo cual es una característica esencial para las señales que realmente tienen lugar en el mundo físico. Además, el teorema 4 nos dice que, aunque posiblemente no podamos asociar una energía finita a la distribución $\Omega \in \mathcal{E}'$, ésta si se obtiene como suma de varias derivadas distribucionales de un conjunto finito de señales que sí tienen energía finita. El problema aquí radica en el hecho de que conocer la energía de una señal no nos ayuda a conocer la energía de su derivada. Es más, esta última podría ser infinita aún cuando la señal original sí tenga energía finita. Sin embargo, la física nos obliga a aceptar como señales a estas derivadas. Precisamente el teorema 4 es de gran importancia para la caracterización de los filtros como operadores de convolución.

En el Cap. 4, revisaremos las señales periódicas como distribuciones que sin duda son e introduciremos una señal periódica no asociable a función alguna: el tren de deltas (o peine) de Dirac.

4. Los filtros preservan la derivada generalizada

Definición 1 *Decimos que $\Sigma \subseteq \mathcal{D}'$ es un espacio de distribuciones si es un subespacio vectorial topológico de $\mathcal{D}'$ y $\Omega \in \Sigma \Rightarrow \Omega' \in \Sigma$.*

Teorema 5 *Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathcal{D}'$ dos espacios de distribuciones y supongamos que $L : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ es un filtro . Entonces para toda distribución $\Omega \in \Sigma_1$ tenemos que $L(\Omega') = L(\Omega)'$.*

Demostración. Lo primero que vamos a hacer es probar que la derivada en sentido distribucional coincide con el concepto de derivada usual, es decir, que

$$\Omega' = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(\Omega - \Omega_{(\tau)}\right), \tag{2}$$

donde la convergencia se interpreta en sentido distribucional. Efectivamente, la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{1}{\tau}\left(\Omega-\Omega_{(\tau)}\right),\phi\right) &= \lim_{\tau\to 0}\left(\Omega,\frac{1}{\tau}\left(\phi(t)-\phi(t+\tau)\right)\right)\\
&= \left(\Omega,\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left(\phi(t)-\phi(t+\tau)\right)\right)\\
&= (-1)\left(\Omega,\phi'\right)\\
&= (\Omega',\phi)
\end{aligned}$$

se satisface para toda función $\phi\in\mathcal{D}$.

Ahora aplicamos L (que es un filtro) a ambos lados de la ecuación (2) para obtener que

$$\begin{aligned}
L(\Omega') &= L\left(\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left(\Omega-\Omega_{(\tau)}\right)\right)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left(L(\Omega)-L(\Omega_{(\tau)})\right)\\
&= \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left(L(\Omega)-L(\Omega)_{(\tau)}\right)\\
&= L(\Omega)',
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

5. El teorema del núcleo de Schwartz: Caracterización de filtros como sistemas de convolución

Teorema 6 (Schwartz) *Sea $L:\mathcal{E}'\to\mathcal{D}'$ un filtro y sea $\mu=L(\delta)$ su respuesta al impulso unidad. Entonces $L(\Omega)=\Omega*\mu$ para toda distribución $\Omega\in\mathcal{E}'$.*

Demostración. Sea $\Omega\in\mathcal{E}'$ una distribución de soporte compacto, $\mathbf{sop}(\Omega)\subseteq I=[a,b]$. Entonces, gracias al Teorema de estructura de las distribuciones de soporte compacto, sabemos que Ω'' se pone como suma finita de distribuciones del tipo $h^{(r+2)}$ para ciertas funciones continuas h con $\mathbf{supp}(h)\subseteq[a,b]$ y ciertos enteros $r\geq 0$. Hacemos la prueba para cada uno de los sumandos y luego utilizamos la linealidad.

Es bien sabido que, gracias a un teorema debido al matemático alemán K. Wierstrass, si h es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ entonces es en realidad uniformemente continua en $[a,b]$ y, por tanto, podemos aproximar a h uniformemente en $[a,b]$ utilizando poligonales. Por precisar un poco más, sabemos que para cada $n\in\mathbb{N}$ existe una partición $a=t_{n,0}<t_{n,1}<\cdots<t_{n,m(n)}=b$ tal que, si denotamos por $p_n(t)$ la única función poligonal que vale 0 fuera de $[a,b]$ y, dentro del intervalo $[a,b]$ está dada por $p_n(t)=c_kt+d_k$ (para $t_{n,k}\leq t\leq t_{n,k+1}$), donde

$$c_k=\frac{h(t_{n,k+1})-h(t_{n,k})}{t_{n,k+1}-t_{n,k}};\;\; d_k=\frac{t_{n,k+1}h(t_{n,k})-t_{n,k}h(t_{n,k+1})}{t_{n,k+1}-t_{n,k}};\;\; k=0,1,\cdots,m(n)-1,$$

entonces

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|h(t)-p_n(t)|\leq\frac{1}{n},\;\; n=1,2,\cdots.$$

Se sigue que las poligonales p_n convergen también en el sentido de $\mathcal{E}'$ a la señal h. Ahora bien, no es dificil comprobar que

$$p_n'' = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}\delta_{(t_{n,k})}$$

para ciertos valores $a_{n,k}$ y, por tanto,

$$p_n^{(r+2)} = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}\delta_{(t_{n,k})}^{(r)}.$$

Así pues, las derivadas $(n+2)$-ésimas de las poligonales, que son a su vez la derivada n-ésima de una combinación lineal de deltas de Dirac desplazadas, convergen en $\mathcal{E}'$ a $\Omega = h^{(r+2)}$. Como $L : \mathcal{E}' \to \mathcal{D}'$ es un operador continuo, tendremos entonces que

$$L(\Omega) = L(\lim_{n\to\infty} p_n^{(r+2)}) = \lim_{n\to\infty} L(p_n^{(r+2)}).$$

Ahora bien, sea $\mu = L(\delta)$. Oviamente, $\mu = \delta * \mu$, por lo que también $L(\delta) = \delta * \mu$. Por otra parte, como L es invariante por traslaciones, tenemos que $L(\delta_{(a)}) = \mu_{(a)} = \delta_{(a)} * \mu$. Además, sabemos que los operadores LIC preservan la derivación en sentido generalizado, por lo que también tendremos que $L(\delta_{(a)}^{(r)}) = L(\delta_{(a)})^{(r)} = (\delta_{(a)} * \mu)^{(r)} = \delta_{(a)}^{(r)} * \mu$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
L(p_n^{(r+2)}) &= L\left(\sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}\delta_{(t_{n,k})}^{(r)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}L(\delta_{(t_{n,k})}^{(r)}) \\
&= \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}(\delta_{(t_{n,k})}^{(r)} * \mu) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k}\delta_{(t_{n,k})}^{(r)}\right) * \mu \\
&= p_n^{(r+2)} * \mu
\end{aligned}$$

Tomando límites a ambos lados (para $n \to \infty$) y utilizando la continuidad de L, llegamos a que

$$L(\Omega'') = \Omega'' * \mu$$

donde $\mu = L(\delta)$ y $\Omega \in \mathcal{E}'$ es arbitraria. Por otro lado,

$$L(\Omega)'' = L(\Omega'') = \Omega'' * \mu = (\Omega * \mu)''$$

Luego,

$$L(\Omega) = \Omega * \mu.$$

Esto finaliza la desmostración. □

El resultado que acabamos de probar se puede deducir como corolario de un conocido teorema debido a L. Schwartz que es válido para operadores no necesariamente invariantes por traslaciones (ver el Teorema del Núcleo de Schwartz en [5, Theor. 4.4.1., pag. 85]). Como, evidentemente, las distribuciones de soporte compacto son una clase de señales muy importante puesto que reflejan bastante bien las señales del mundo real, las cuales siempre empiezan y finalizan en tiempo finito, el Teorema de Schwartz representa para nosotros una realidad fundamental: que los sistemas lineales que se dan en Física, cuando se aplican a señales cuyo soporte es acotado, siempre son del tipo $L(\Omega) = \Omega * \mu$, donde $\mu = L(\delta)$ es la respuesta puntual del sistema. Esto significa que, una vez conocemos la distribución μ (que, para que tenga realidad física supondremos siempre una distribución atemperada, $\mu \in \mathcal{S}'$), podemos plantearnos cuál es el espacio de señales más amplio posible Σ_L en el que nuestro sistema se puede aplicar sin perder sus propiedades. Es decir, nos podemos cuestionar quién es

$$\Delta_L = \{\Omega \in \mathcal{D}' : \exists \Omega * \mu \in \mathcal{D}'\}.$$

o, si nos guiamos por la Física, quién es

$$\Sigma_L = \{\Omega \in \mathcal{S}' : \exists \Omega * \mu \in \mathcal{S}'\}.$$

Así, podríamos decir que cada filtro determina de forma natural quién es su dominio de aplicación. Por ejemplo, si $\mu \in \mathcal{E}'$, entonces $\Delta_L = \mathcal{D}'$ y $\Sigma_L = \mathcal{S}'$.

Teorema 7 *Sea Σ_1 un espacio de distribuciones tal que $\mathcal{E}' \subseteq \Sigma_1 \subseteq \mathcal{S}'$ y supongamos además que $\mathcal{E}'$ es un subconjunto denso de Σ_1 desde el punto de vista de su topología. Sea $L : \Sigma_1 \to \mathcal{S}'$ un filtro y sea $\mu = L(\delta)$. Entonces $L(\Omega) = \Omega * \mu$ para toda distribución $\Omega \in \Sigma_1$*

Demostración. Gracias al teorema de Schwartz, sabemos que

$$\forall \Omega \in \mathcal{E}' : L(\Omega) = \Omega * \mu.$$

Tomamos ahora $\Omega \in \Sigma_1$ una distribución arbitraria. Como $\mathcal{E}'$ es un subconjunto denso de Σ_1, sabemos que existe una sucesión $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}'$ tal que $\Omega_n \to \Omega$ en Σ_1. Al ser L continuo, tendremos entonces que

$$L(\Omega) = L(\lim_{n\to\infty} \Omega_n) = \lim_{n\to\infty} L(\Omega_n) = \lim_{n\to\infty} (\Omega_n * \mu).$$

(Es la continuidad de L lo que garantiza la existencia del límite $\lim_{n\to\infty}(\Omega_n * \mu)$ en el sentido de $\mathcal{S}'$). Por otro lado, si aplicamos la transformada de Fourier a la expresión anterior (cosa que podemos hacer porque la transformada de Fourier es continua en $\mathcal{S}'$ y porque, al verificarse que $\Omega_n \in \mathcal{E}'$ y $\mu \in \mathcal{S}'$ podemos decir que $\Omega_n * \mu \in \mathcal{S}'$ y $\mathcal{F}(\Omega_N * \mu) = \mathcal{F}(\Omega_n) \cdot \mathcal{F}(\mu)$) obtenemos que

$$\mathcal{F}(L(\Omega)) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}(\Omega_n) \cdot M = \mathcal{F}(\lim_{n\to\infty} \Omega_n) \cdot M = \Omega \cdot M,$$

donde $M = \mathcal{F}(\mu)$ y la convergencia de las sucesiones es en el sentido de $\mathcal{S}'$. Obsérvese que aquí hemos usado que Σ_1 está contenido (con continuidad) en $\mathcal{S}'$ y, por tanto, la convergencia de Ω_n a Ω en Σ_1 implica convergencia en $\mathcal{S}'$. Aplicando ahora la definición de convolución, hemos probado que

$$L(\Omega) = \Omega * \mu,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Con esto hemos demostrado que todo filtro que tenga algún interés físico es forzosamente un operador de convolución. ¿Qué relación hay entre la respuesta puntual del sistema, $\mu = L(\delta)$, y su función de transferencia? Supongamos que $f_{en}(t) = e^{2\pi i s_0 t}$ es una entrada admisible del sistema y que la respuesta puntual de L, dada por μ, es tal que su transformada de Fourier $\mathcal{F}(\mu)$ es una función continua en s_0. Entonces sabemos que f_{en} es un autovector de Ω y que su autovalor asociado vale $M(s_0)$, donde $M(s)$ denota la función de transferencia del sistema. Por otra parte,

$$L(f_{en}) = f_{en} * \mu = \mathcal{F}^{-1}\left(\delta_{(s_0)} \cdot \mathcal{F}(\mu)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\mu)(s_0)\delta_{(s_0)}\right) = \mathcal{F}(\mu)(s_0) \cdot f_{en},$$

y, por tanto, hemos concluido que, allá donde esté definida, $M = \mathcal{F}(\mu)$.

Lemma 2 *Sean $f \in \mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ y $\Omega \in \mathcal{D}'$. Si $\Omega \neq 0$ y $f \cdot \Omega = 0$ entonces existe un número $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(s_0) = 0$.*

Demostración. Tengase en cuenta que si $\Omega \in \mathcal{D}'$ entonces para cada intervalo $I = [a, b]$ es posible encontrar una función continua h con soporte contenido en I y un número entero positivo r tal que $\Omega = h^{(r+2)}$ en I (es decir, $(\Omega, \phi) = (-1)^r(h, \phi^{(r+2)})$ para toda función test $\phi \in \mathcal{D}_I$). Por tanto, la igualdad $f \cdot \Omega = 0$, se traduce en el hecho de que, para toda función test $\phi \in \mathcal{D}_I$,

$$0 = (f\Omega, \phi) = (fh^{(r+2)}, \phi) = (h^{(r+2)}, f\phi) = (-1)^r \int_a^b h(s)[f\phi]^{(r+2)}(s)ds.$$

Como $f(t)$ es de clase infinito y no se anula, podemos afirmar sin mayor problema que las funciones de la forma $f(s)\phi(s)$ (con $\phi \in \mathcal{D}_I$) recorren todo el espacio $\mathcal{D}_I$. Por tanto, la restricción de Ω a I es la distribución nula. Como esto es así para todo intervalo I, concluimos que $\Omega = 0$. □

Teorema 8 *Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor del filtro $L(\Omega) = \Omega * \mu$, y que $\mathcal{F}(\mu) = M \in \mathbf{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ (Por ejemplo, esto sucede siempre que $\mu \in \mathcal{E}'$). Entonces $\lambda = M(s_0)$ para cierto $s_0 \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Efectivamente, si Ω es un autovector (no nulo) de L asociado a λ entonces $L(\Omega) = \lambda\Omega$ y por tanto $\lambda\Omega = \Omega * \mu$. De aquí se deduce, tomando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad y reagrupando, que $(\lambda - M(s)) \cdot \mathcal{F}(\Omega) = 0$, lo cual implica que existe un cierto valor $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda = M(s_0)$, pues $\mathcal{F}(\Omega) \neq 0$ y, por tanto, podemos aplicar el lema anterior. □

Con los resultados que acabamos de exponer queda claro que todo filtro que tenga sentido físico queda determinado por su respuesta puntual o, lo que es lo mismo, por su función de transferencia. Además, cuando $M(s) = \mathcal{F}(L(\delta))$ es una función de clase infinito definida en toda la recta real, resulta que ésta representa precisamente el conjunto de los autovalores de L. Estas afirmaciones requieren fuertemente de todas las propiedades que definen a un filtro (ie., la linealidad, la continuidad, la invarianza frente a traslaciones), así como del hecho de restringirnos a sistemas que estén definidos sobre espacios de distribuciones con sentido físico. Todo esto nos lleva a plantear el siguiente conjunto de postulados que caracterizan la teoría de la comunicación.

Postulado 1 *El espacio Σ de las señales físicas es el de las distribuciones atemperadas $\Sigma = \mathcal{S}'$*

Postulado 2 *Todo sistema lineal está dado por un operador de convolución $L : \Sigma_L \to \Sigma$, $L(\Omega) = \Omega * \mu$, donde* *(a)* $\mu = L(\delta) \in \Sigma$ *es la respuesta puntual del sistema.*

(b) $\Sigma_L = \{\Omega \in \mathcal{S}' : \exists \Omega * \mu \in \mathcal{S}'\}$

(c) $M = \mathcal{F}(\mu)$ *es una función en el sentido ordinario de la palabra, a la cual llamamos "función de transferencia del sistema".*

Tanto μ *como* M *caracterizan el sistema* L. *En particular, dada la función de transferencia* M, *la acción de* L *sobre una entrada arbitraria* $\Omega \in \Sigma_L$ *está dada por* $L(\Omega) = \mathcal{F}^{-1}(M \cdot \mathcal{F}(\Omega))$.

Referencias

[1] J.C. del Toro Iniesta, J.M. Almira, J. C. Suarez-Yanes, Fundamentos del procesado de señales, con aplicaciones en física y astrofísica, Manuscrito (2009).

[2] A. S. Demidov, Generalized functions in mathematical physics. Main ideas and concepts.

[3] V.S. Vladimirov, Generalized functions in Mathematical Physics, Mir Publishers, 1979.

[4] A. H. Zemanian, Distribution Theory and Transform Analysis, McGraw-Hill, 1965.

[5] A. H. Zemanian, Realizability Theory for Continuous Linear Systems, Academic Press, 1972. (also Published by Dover, 1995).