Examen para evaluar la asistencia y participación

Miércoles 17 de mayo de 12:30-13:00

Aula 14 del edificio A4

Tema 9

CORRIENTE ALTERNA

Resumen de lo visto hasta el momento respecto a circuitos eléctricos

- **Elementos de los circuitos**
  - **Resistencias**
  - **Condensadores**
  - **Autoinducciones**
  - **Fuentes de potencial**
- **Análisis de los circuitos**
  - **Estacionario**
  - **Transitorio**

¿ Cuál va a ser el objetivo principal de este tema ?

Sentar las bases teóricas para analizar la respuesta de un circuito a cualquier tipo de señal.

Más del 99 por ciento de la energía eléctrica utilizada hoy en día se produce mediante generadores eléctricos de corriente alterna, la cual tiene la gran ventaja sobre la corriente continua de que la energía eléctrica puede transportarse a grandes distancias a tensiones muy elevadas y corrientes bajas para reducir las perdidas de energía en forma de calor por efecto Joule. Luego puede transformarse, con perdidas mínimas de energía, en tensiones más bajas y seguras, con las correspondientes corrientes más altas para su empleo ordinario. El funcionamiento de los transformadores que realizan estos cambios de tensión y de corriente se basa en la inducción magnética. En Norteamérica, la potencia eléctrica se suministra mediante una corriente sinusoidal de 60 Hz, mientras que en prácticamente todo el resto del mundo la frecuencia es de 50 Hz. Hay muchos aparatos, como las radios, los equipos de televisión y los hornos de microondas que detectan o generan corrientes alternas de frecuencias mucho mas altas. La corriente alterna se genera fácilmente mediante inducción magnética en los generadores de ac, diseñados para producir una fem sinusoidal.

Además el análisis de la respuesta de un circuito en corriente alterna es importante porque si la señal es periódica en el tiempo, según el teorema de Fourier, esta puede escribirse como función de una suma de funciones de tipo sinusoidal de diferentes frecuencias.

Finalmente, en el caso general de una función que depende del tiempo de cualquier forma, la transformada de Laplace nos proporciona una herramienta que permite analizar la respuesta temporal de un sistema a partir de su espectro en frecuencia. Por lo tanto, conocer la respuesta de un circuito a una señal alterna de cualquier frecuencia es equivalente a conocer su comportamiento a cualquier señal temporal.

ESQUEMA DE DESARROLLO

~~1.- Introducción.~~

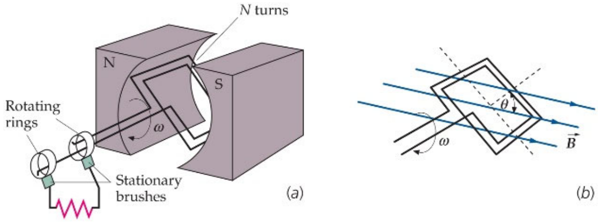
2.- Corriente alterna en una resistencia.

3.- Circuitos de corriente alterna.

4.- Circuitos LCR en corriente alterna.

Corriente alterna en una resistencia

Como vimos en el anterior tema un generador simple de corriente alterna, como el de la figura, genera una fuerza electromotriz (fem) que viene dada por:

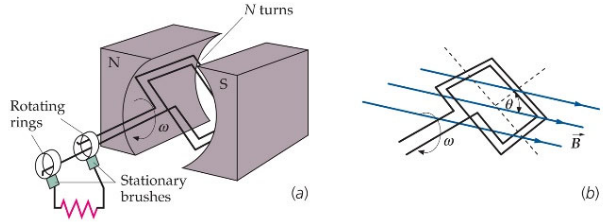


$$\varepsilon = \varepsilon_{max} \cos(\omega t)$$

donde ω es la velocidad angular de la bobina. Si la bobina de N vueltas tiene área A, y el campo magnético es uniforme y su módulo es B, el valor máximo de la fem viene dado por ωNBA, es decir, $\varepsilon_{max}=\omega NBA$. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, todos ellos producen fem sinusoidales, bien por inducción o por movimiento de los circuitos (fem en movimiento). En los diagramas de circuitos, un generador de corriente alterna se representa por el símbolo ~.

Corriente alterna en una resistencia

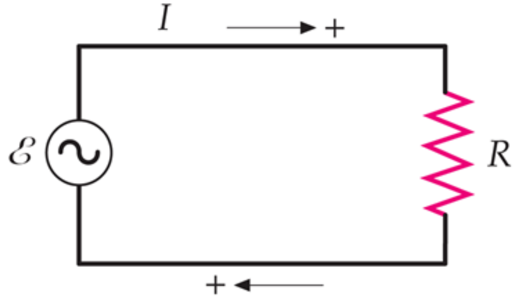
Como vimos en el anterior tema un generador simple de corriente alterna, como el de la figura, genera una fuerza electromotriz (fem) que viene dada por:



$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \cos(\omega t)$$

donde ω es la velocidad angular de la bobina. Si la bobina de N vueltas tiene área A, y el campo magnético es uniforme y su módulo es B, el valor máximo de la fem viene dado por ωNBA, es decir, $\varepsilon_{max}=\omega NBA$. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, todos ellos producen fem sinusoidales, bien por inducción o por movimiento de los circuitos (fem en movimiento). En los diagramas de circuitos, un generador de corriente alterna se representa por el símbolo $\sim$.

El circuito más simple de corriente alterna consiste en un generador ideal y una resistencia (como vimos anteriormente, un generador es ideal si su resistencia interna, su autoinducción y capacitancia o impedancia capacitiva son despreciables). La caída de potencial a través de la resistencia V_R es igual a la fem ε del generador. Por lo tanto, si el generador produce una fem dada por la ecuación anterior, se tiene que

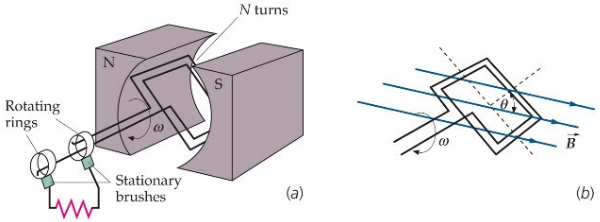


$$V_R = V_{R\max} \cos(\omega t) = \varepsilon_{\max} \cos(\omega t)$$

Utilizando la ley de Ohm llegamos a: $\left.\begin{array}{l} V_R = IR \\ V_R = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t) \end{array}\right| \Rightarrow I = \dfrac{\varepsilon_{\max}}{R}\cos(\omega t) = I_{\max}\cos(\omega t)$ que nos da la intensidad de corriente instantánea del circuito.

Corriente alterna en una resistencia

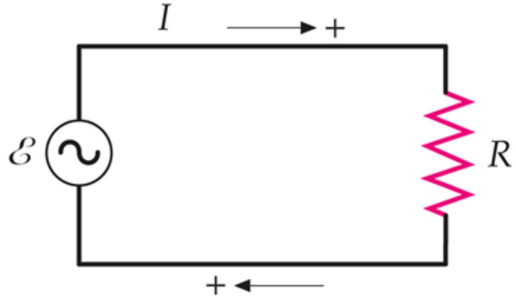
Como vimos en el anterior tema un generador simple de corriente alterna, como el de la figura, genera una fuerza electromotriz (fem) que viene dada por:



$$\varepsilon = \varepsilon_{max}\cos(\omega t)$$

donde ω es la velocidad angular de la bobina. Si la bobina de N vueltas tiene área A, y el campo magnético es uniforme y su módulo es B, el valor máximo de la fem viene dado por ωNBA, es decir, $\varepsilon_{max}=\omega NBA$. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, todos ellos producen fem sinusoidales, bien por inducción o por movimiento de los circuitos (fem en movimiento). En los diagramas de circuitos, un generador de corriente alterna se representa por el símbolo ⓪.

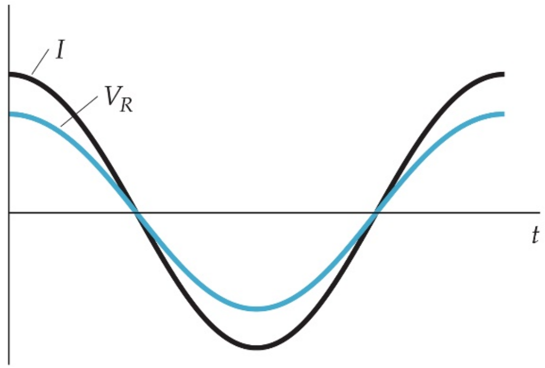
El circuito más simple de corriente alterna consiste en un generador ideal y una resistencia (como vimos anteriormente, un generador es ideal si su resistencia interna, su autoinducción y capacitancia o impedancia capacitiva son despreciables). La caída de potencial a través de la resistencia V_R es igual a la fem ε del generador. Por lo tanto, si el generador produce una fem dada por la ecuación anterior, se tiene que



$$V_R = V_{R\,max}\cos(\omega t) = \varepsilon_{max}\cos(\omega t)$$

Utilizando la ley de Ohm llegamos a: $\left.\begin{array}{l} V_R = IR \\ V_R = \varepsilon_{max}\cos(\omega t) \end{array}\right| \Rightarrow I = \dfrac{\varepsilon_{max}}{R}\cos(\omega t) = I_{max}\cos(\omega t)$ que nos da la intensidad de corriente instantánea del circuito.

Obsérvese que la corriente que circula por la resistencia esta en fase con la tensión aplicada a la misma, como puede verse en la figura.



La potencia instantánea disipada en la resistencia viene dada por:

$$P = V_R I = V_{R\max} I_{\max}\cos^2(\omega t) = \frac{V_{R\max}^2}{R}\cos^2(\omega t) = I_{\max}^2 R\cos^2(\omega t)$$

Por lo tanto, en un circuito de corriente alterna, la potencia, como el resto de las variables es una función periódica en el tiempo. Para hacernos una idea más precisa de la energía que se disipa en un circuito de corriente alterna se suele hablar de la potencia media consumida que es el promedio de la potencia instantánea en un periodo.

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{\omega V_{R\max}^2}{2\pi R}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{P_{\max}}{2} = \frac{V_{R\max}^2}{2R} = \frac{I_{\max}^2 R}{2}$$

Donde se ha tenido en cuenta que $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t)\cos(\omega t)\,dt = \left[-\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[1-\cos^2(\omega t)\right]dt$$

$$2\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t)\,dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{\pi}{\omega}$$

La potencia instantánea disipada en la resistencia viene dada por:

$$P = V_R I = V_{R\max} I_{\max} \cos^2(\omega t) = \frac{V_{R\max}^2}{R}\cos^2(\omega t) = I_{\max}^2 R \cos^2(\omega t)$$

Por lo tanto, en un circuito de corriente alterna, la potencia, como el resto de las variables es una función periódica en el tiempo. Para hacernos una idea más precisa de la energía que se disipa en un circuito de corriente alterna se suele hablar de la potencia media consumida que es el promedio de la potencia instantánea en un periodo.

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{\omega V_{R\max}^2}{2\pi R}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt = \frac{P_{\max}}{2} = \frac{V_{R\max}^2}{2R} = \frac{I_{\max}^2 R}{2}$$

Donde se ha tenido en cuenta que $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t)dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t)\cos(\omega t)dt = \left[-\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2(\omega t)dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[1-\cos^2(\omega t)\right]dt$$

$$2\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t)dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t)dt = \frac{\pi}{\omega}$$

Valores eficaces

La mayoría de los amperímetros y voltímetros de ac están diseñados para medir valores eficaces de la corriente o de la tensión en lugar de los valores máximos o de pico. Su valor es la raíz cuadrada del valor cuadrático medio respectivo. Así, el valor eficaz de una corriente es

$$I_{ef} = \sqrt{(I^2)_m}$$

Para una corriente sinusoidal, el valor cuadrático medio de la intensidad, I^2, es:

$$(I^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{\max}^2 \cos^2(\omega t)dt = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

Valores eficaces

$$(I^2)_m = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

Por lo tanto el valor eficaz de la corriente será igual a:

$$I_{\mathrm{ef}} = \sqrt{(I^2)_m} = \sqrt{\frac{I_{\max}^2}{2}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

De igual forma se define el valor eficaz del potencial como:

$$V_{\mathrm{ef}} = \sqrt{(V^2)_m}$$

Para un potencial sinusoidal, el valor medio es:

$$(V^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_{\max}^2 \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

Por lo tanto el valor eficaz del potencial es igual a:

$$V_{\mathrm{ef}} = \sqrt{(V^2)_m} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Valores eficaces

$$(I^2)_m = \frac{I_{\max}^2}{2}$$

Por lo tanto el valor eficaz de la corriente será igual a:

$$I_{\text{ef}} = \sqrt{(I^2)_m} = \sqrt{\frac{I_{\max}^2}{2}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

De igual forma se define el valor eficaz del potencial como:

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{(V^2)_m}$$

Para un potencial sinusoidal, el valor medio es:

$$(V^2)_m = \frac{1}{T}\int_0^T V^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T V_{\max}^2 \cos^2(\omega t)\, dt = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

Por lo tanto el valor eficaz del potencial es igual a:

$$V_{\text{ef}} = \sqrt{(V^2)_m} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Los valores eficaces de la corriente y el potencial están directamente relacionados con la potencia media que se consume por efecto Joule.

$$P_m = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} = \varepsilon_{\text{ef}} I_{\text{ef}}$$

Así pues, si utilizamos valores eficaces para la corriente y la caída de potencial, podemos calcular la potencia y el calor generado empleando las mismas ecuaciones obtenidas en corriente continua.

ESQUEMA DE DESARROLLO

~~1.- Introducción.~~

~~2.- Corriente alterna en una resistencia.~~

3.- Circuitos de corriente alterna.

4.- Circuitos LCR en corriente alterna.

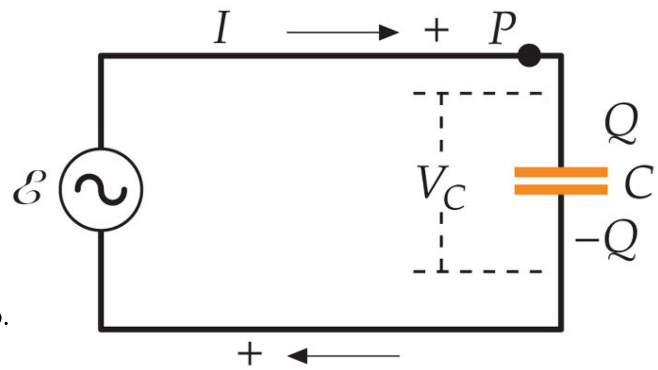
Examen para evaluar la asistencia y participación

Miércoles 17 de mayo de 12:30-13:00

Aula 14 del edificio A4

Circuitos de corriente alterna

Condensadores en circuitos de corriente alterna



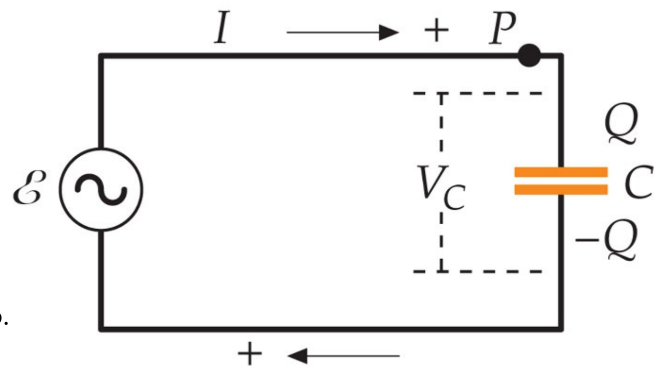
Cuando un condensador se conecta entre los terminales de una fuente AC la caída de potencial a través del condensador es:

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

donde Q es la carga de la placa con carga positiva del condensador y C es la capacidad del mismo.

Circuitos de corriente alterna

Condensadores en circuitos de corriente alterna



Cuando un condensador se conecta entre los terminales de una fuente AC la caída de potencial a través del condensador es:

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

donde Q es la carga de la placa con carga positiva del condensador y C es la capacidad del mismo.

En este circuito, la diferencia de potencial a través del condensador es igual a la fuerza electromotriz del generador por lo tanto:

$$V_C = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t) = V_{C\max}\cos(\omega t)$$

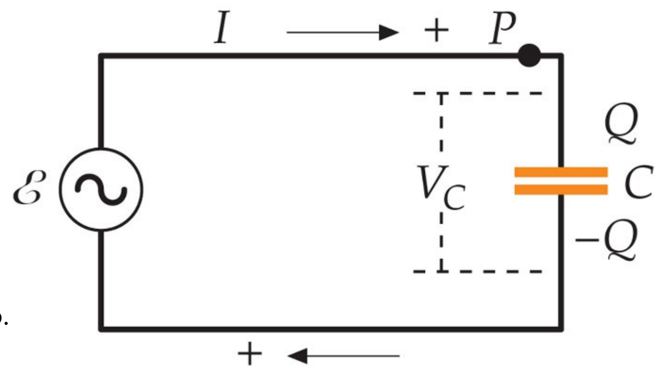
Sustituyendo en la definición de la capacidad nos queda:

$$V_{C\max}\cos(\omega t) = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = CV_{C\max}\cos(\omega t)$$

Así, la caída de potencial V_C a través de un condensador esta en fase con la carga Q del mismo.

Circuitos de corriente alterna

Condensadores en circuitos de corriente alterna



Cuando un condensador se conecta entre los terminales de una fuente AC la caída de potencial a través del condensador es:

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

donde Q es la carga de la placa con carga positiva del condensador y C es la capacidad del mismo.

En este circuito, la diferencia de potencial a través del condensador es igual a la fuerza electromotriz del generador por lo tanto:

$$V_C = \varepsilon_{\max} \cos(\omega t) = V_{C\max} \cos(\omega t)$$

Sustituyendo en la definición de la capacidad nos queda:

$$V_{C\max} \cos(\omega t) = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = CV_{C\max} \cos(\omega t)$$

Así, la caída de potencial V_C a través de un condensador esta en fase con la carga Q del mismo.

Derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCV_{C\max} \cos(\omega t)}{dt} = Q_{\max} \frac{d\cos(\omega t)}{dt} = -\omega Q_{\max} \sin(\omega t) = I_{\max} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

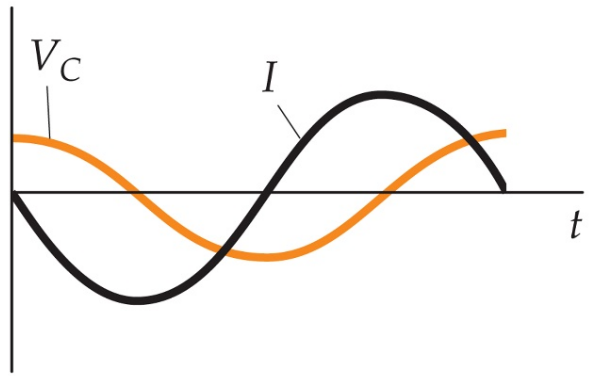
Circuitos de corriente alterna

Condensadores en circuitos de corriente alterna

La caída de potencial V_C a través de un condensador está desfasado 90º respecto a la corriente del circuito. En la figura puede verse que el valor máximo del voltaje se presenta 90º o un cuarto de periodo después de aparecer el valor máximo de la corriente.

$$V_C = V_{C\max}\cos(\omega t)$$

$$I = I_{\max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Así pues, la caída de tensión en un condensador esta retrasada respecto a la corriente en 90º. La explicación física es sencilla. La carga Q es proporcional a la caída de potencial V_C. La máxima variación del crecimiento de la carga $I=dQ/dt$ debe ocurrir cuando la carga Q sea nula y, por lo tanto, V_C sea cero. Al aumentar la carga sobre la placa del condensador, la corriente disminuye hasta que, un cuarto de periodo después, la carga es máxima y la corriente es cero. Entonces, la corriente se hace negativa cuando la carga Q disminuye.

La relación entre la intensidad y la caída de potencial máximas en el condensador podemos expresarlas mediante la ecuación:

$$I_{\max} = \omega Q_{\max} = \omega C V_{C\max} = \frac{V_{C\max}}{\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{V_{C\max}}{X_C} \Rightarrow V_{C\max} = X_C I_{\max}$$

equivalente a una generalización de la ley de Ohm, donde a X_C se le denomina reactancia o impedancia capacitiva.

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador de ac que proporciona una caída de potencial de amplitud (valor máximo) de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y (b) 6000 Hz.

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador de ac que proporciona una caída de potencial de amplitud (valor máximo) de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y (b) 6000 Hz.

1. Calculamos la reactancia capacitiva o impedancia del condensador mediante la expresión que acabamos de obtener:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot 60\ \text{s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 132.63\ \Omega \\ X'_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot 6000\ \text{s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 1.33\ \Omega \end{array} \right.$$

Un condensador de 20 μF se conecta a un generador de ac que proporciona una caída de potencial de amplitud (valor máximo) de 100 V. Hallar la reactancia capacitiva y la corriente máxima cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y (b) 6000 Hz.

1. Calculamos la reactancia capacitiva o impedancia del condensador mediante la expresión que acabamos de obtener:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot 60\ \text{s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 132.63\ \Omega \\ X'_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot 6000\ \text{s}^{-1} \cdot 20 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 1.33\ \Omega \end{array} \right.$$

2. La máxima corriente la podemos calcular utilizando la generalización de la ley de Ohm para condensadores en corriente alterna:

$$I_{\max} = \frac{V_{C\max}}{X_C} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_{\max} = \dfrac{100\ \text{V}}{132.63\ \Omega} = 0.754\ \text{A} \\ I'_{\max} = \dfrac{100\ \text{V}}{1.33\ \Omega} = 75.2\ \text{A} \end{array} \right.$$

Circuitos de corriente alterna

Condensadores en circuitos de corriente alterna

Finalmente, podemos calcular la potencia media consumida en la capacitancia para ello utilizamos las expresiones obtenidas para el potencial y la corriente y la definición de potencial media.

$$\left.\begin{array}{l} V_C = V_{C\max}\cos(\omega t) \\ I = I_{\max}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) = -I_{\max}\sin(\omega t) \\ P_m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)dt \end{array}\right| \Rightarrow P_m = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_{\max}\sin(\omega t)V_{C\max}\cos(\omega t)dt = -\frac{\omega I_{\max}V_{C\max}}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt$$

Circuitos de corriente alterna

Condensadores en circuitos de corriente alterna

Finalmente, podemos calcular la potencia media consumida en la capacitancia para ello utilizamos las expresiones obtenidas para el potencial y la corriente y la definición de potencial media.

$$V_C = V_{C\max}\cos(\omega t)$$
$$I = I_{\max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -I_{\max}\sin(\omega t)$$
$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$\Rightarrow P_m = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_{\max}\sin(\omega t)V_{C\max}\cos(\omega t)dt = -\frac{\omega I_{\max}V_{C\max}}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt$$

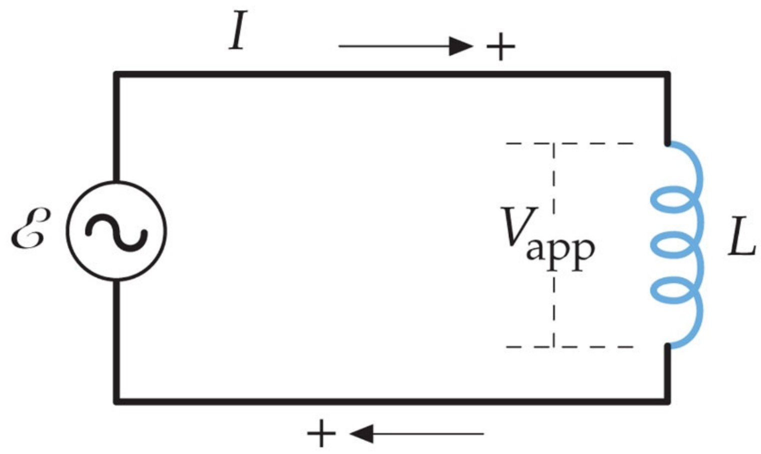
Por lo tanto, finalmente obtenemos:

$$P_m = -\frac{\omega I_{\max}V_{C\max}}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = -\frac{\omega I_{\max}V_{C\max}}{4\pi}\left[\sin^2(\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

Es decir, las capacitancias no consumen energía sólo almacenan durante cierta parte del ciclo energía y después la devuelven al circuito.

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna

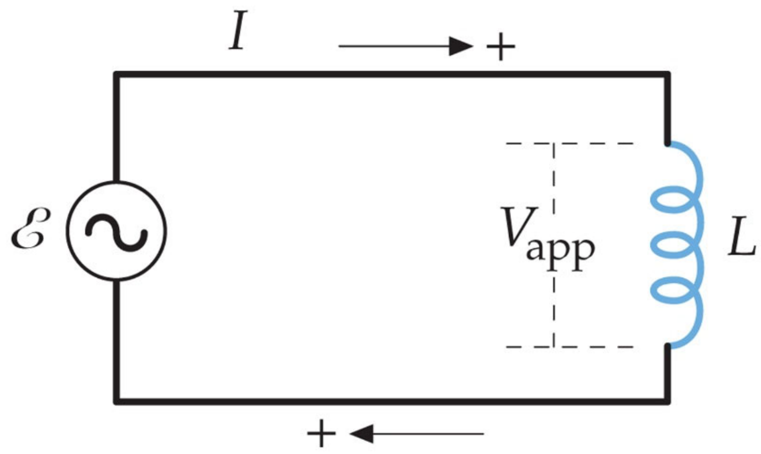


La figura muestra una bobina inductora en serie con un generador de corriente alterna. Cuando la corriente crece en el inductor, se crea en este una fuerza contra-electromotriz de valor $L \cdot dI/dt$ debido a la variación de flujo magnético. Normalmente esta fem es mucho mayor que la caída $I \cdot R$ debida a la resistencia de la bobina y, por lo tanto, podemos despreciar esta resistencia. La caída de voltaje a través del inductor V_L viene dada entonces por:

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna



La figura muestra una bobina inductora en serie con un generador de corriente alterna. Cuando la corriente crece en el inductor, se crea en este una fuerza contra-electromotriz de valor $L \cdot dI/dt$ debido a la variación de flujo magnético. Normalmente esta fem es mucho mayor que la caída $I \cdot R$ debida a la resistencia de la bobina y, por lo tanto, podemos despreciar esta resistencia. La caída de voltaje a través del inductor V_L viene dada entonces por:

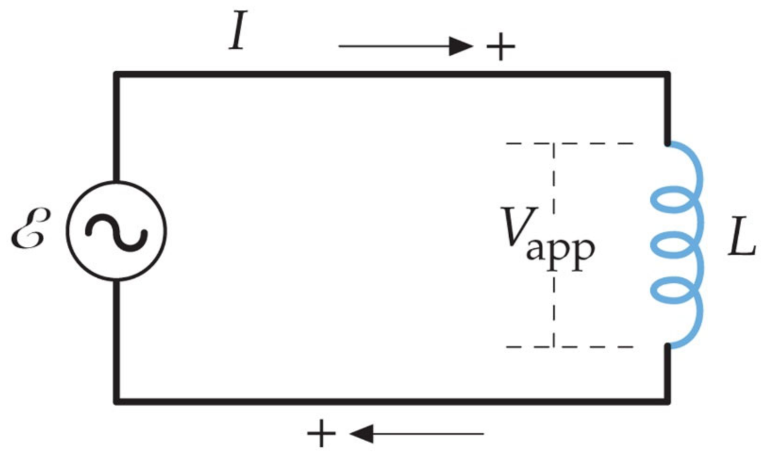
$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

En este circuito la caída de potencial a través del inductor tiene que ser igual a la fem del generador AC y, por lo tanto:

$$V_L = \varepsilon = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t)$$

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna



La figura muestra una bobina inductora en serie con un generador de corriente alterna. Cuando la corriente crece en el inductor, se crea en este una fuerza contra-electromotriz de valor $L \cdot dI/dt$ debido a la variación de flujo magnético. Normalmente esta fem es mucho mayor que la caída $I \cdot R$ debida a la resistencia de la bobina y, por lo tanto, podemos despreciar esta resistencia. La caída de voltaje a través del inductor V_L viene dada entonces por:

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

En este circuito la caída de potencial a través del inductor tiene que ser igual a la fem del generador AC y, por lo tanto:

$$V_L = \varepsilon = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t)$$

Teniendo ambas expresiones en cuenta llegamos a:

$$V_{L\max}\cos(\omega t) = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \int V_{L\max}\cos(\omega t)\,dt = \int L\frac{dI}{dt}dt + cte \Rightarrow \frac{V_{L\max}}{\omega}\sin(\omega t) = LI + cte$$

donde la constante de integración es la componente continua de la corriente. Escogiendo dicha componente igual a cero, resulta

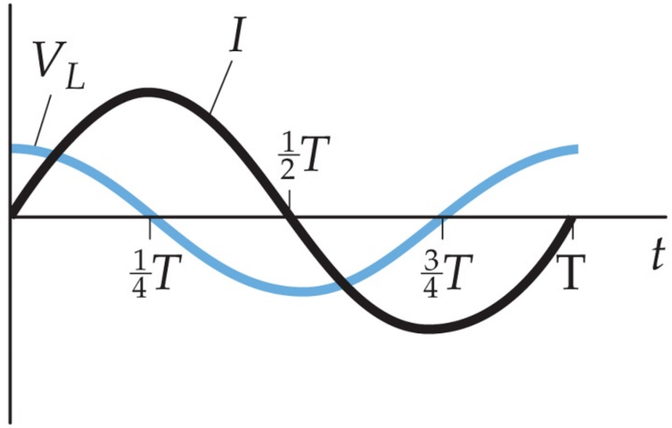
$$I = \frac{V_{L\max}}{\omega L}\sin(\omega t) = I_{\max}\sin(\omega t) = I_{\max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna

$$V_L = \varepsilon_{max}\cos(\omega t)$$

$$I = I_{max}\sin(\omega t) = I_{max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



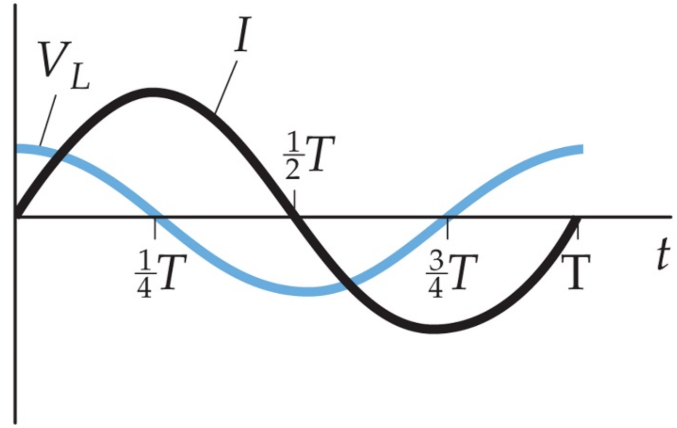
La corriente esta desfasada 90º respecto al voltaje que cae a través del inductor. En la figura que muestra I y V_L como función del tiempo, podemos ver que el valor máximo del voltaje ocurre 90º (o sea, un cuarto de periodo) antes que el correspondiente valor máximo de la corriente. Se dice que la caída de voltaje a través del inductor adelanta a la corriente en 90º. Podemos comprender esto físicamente. Cuando I es cero, pero esta decreciendo, dI/dt es mínimo, de modo que la fem inducida por la bobina V_L pasa por un valor máximo. Un cuarto de ciclo después, I es máximo. En ese momento, dI/dt es cero, de modo que V_L es cero.

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna

$$V_L = \varepsilon_{max} \cos(\omega t)$$

$$I = I_{max} \sin(\omega t) = I_{max} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



La corriente esta desfasada 90º respecto al voltaje que cae a través del inductor. En la figura que muestra I y V_L como función del tiempo, podemos ver que el valor máximo del voltaje ocurre 90º (o sea, un cuarto de periodo) antes que el correspondiente valor máximo de la corriente. Se dice que la caída de voltaje a través del inductor adelanta a la corriente en 90º. Podemos comprender esto físicamente. Cuando I es cero, pero esta decreciendo, *dI/dt* es mínimo, de modo que la fem inducida por la bobina V_L pasa por un valor máximo. Un cuarto de ciclo después, I es máximo. En ese momento, *dI/dt* es cero, de modo que V_L es cero.

La relación entre la intensidad y la caída de potencial máximas en la autoinducción puede expresarse de forma semejante a la relación en una resistencia:

$$I_{max} = \frac{V_{L\,max}}{\omega L} = \frac{V_{L\,max}}{X_L} \Rightarrow V_{L\,max} = X_L I_{max}$$

donde a X_L se le denomina reactancia o impedancia inductiva.

La caída de potencial entre los extremos de una bobina de 40 mH es sinusoidal, con caída de potencial eficaz de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente eficaz cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y (b) 2000 Hz.

La caída de potencial entre los extremos de una bobina de 40 mH es sinusoidal, con caída de potencial eficaz de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente eficaz cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y (b) 2000 Hz.

1. Calculamos la reactancia inductiva o impedancia de la inductancia mediante la expresión que acabamos de obtener:

$$X_L = \omega L \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X_L = 2\pi \cdot 60 \text{ s}^{-1} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 15.1 \ \Omega \\ X'_L = 2\pi \cdot 2000 \text{ s}^{-1} \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 502.7 \ \Omega \end{array} \right.$$

La caída de potencial entre los extremos de una bobina de 40 mH es sinusoidal, con caída de potencial eficaz de 120 V. Hallar la reactancia inductiva y la corriente eficaz cuando la frecuencia es (a) 60 Hz y (b) 2000 Hz.

1. Calculamos la reactancia inductiva o impedancia de la inductancia mediante la expresión que acabamos de obtener:

$$X_L = \omega L \Rightarrow \left| \begin{array}{l} X_L = 2\pi{\cdot}60\ \mathrm{s}^{-1}{\cdot}40{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{H} = 15.1\ \Omega \\ X'_L = 2\pi{\cdot}2000\ \mathrm{s}^{-1}{\cdot}40{\cdot}10^{-3}\ \mathrm{H} = 502.7\ \Omega \end{array} \right.$$

2. La máxima corriente la podemos calcular utilizando la generalización de la ley de Ohm para condensadores en corriente alterna:

$$I_{\mathrm{ef}} = \frac{V_{L\mathrm{ef}}}{X_L} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_{\mathrm{ef}} = \dfrac{120\ \mathrm{V}}{15.1\ \Omega} = 7.95\ \mathrm{A} \\ I'_{\mathrm{ef}} = \dfrac{120\ \mathrm{V}}{502.7\ \Omega} = 0.239\ \mathrm{A} \end{array} \right.$$

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna

Finalmente, podemos calcular la potencia media consumida en la inductancia para ello utilizamos las expresiones obtenidas para el potencial y la corriente y la definición de potencial media.

$$\left.\begin{aligned} V_L &= V_{L\max}\cos(\omega t) \\ I &= I_{\max}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_{\max}\sin(\omega t) \\ P_m &= \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \end{aligned}\right| \Rightarrow P_m = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_{\max}\sin(\omega t)V_{L\max}\cos(\omega t)dt = \frac{\omega I_{\max}V_{L\max}}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t)V_{L\max}\cos(\omega t)dt$$

Circuitos de corriente alterna

Inductores en circuitos de corriente alterna

Finalmente, podemos calcular la potencia media consumida en la inductancia para ello utilizamos las expresiones obtenidas para el potencial y la corriente y la definición de potencial media.

$$\left.\begin{array}{l} V_L = V_{L\max}\cos(\omega t) \\ I = I_{\max}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right) = I_{\max}\sin(\omega t) \\ P_m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T P(t)dt \end{array}\right| \Rightarrow P_m = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_{\max}\sin(\omega t)V_{L\max}\cos(\omega t)dt = \frac{\omega I_{\max}V_{L\max}}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t)V_{L\max}\cos(\omega t)dt$$

Por lo tanto, finalmente obtenemos:

$$P_m = \frac{\omega I_{\max}V_{L\max}}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = \frac{\omega I_{\max}V_{L\max}}{4\pi}\left[\sin^2(\omega t)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 0$$

Es decir, las autoinducciones no consumen energía sólo almacenan durante cierta parte del ciclo energía y después la devuelven al circuito.

ESQUEMA DE DESARROLLO

~~1.- Introducción.~~

~~2.- Corriente alterna en una resistencia.~~

~~3.- Circuitos de corriente alterna.~~

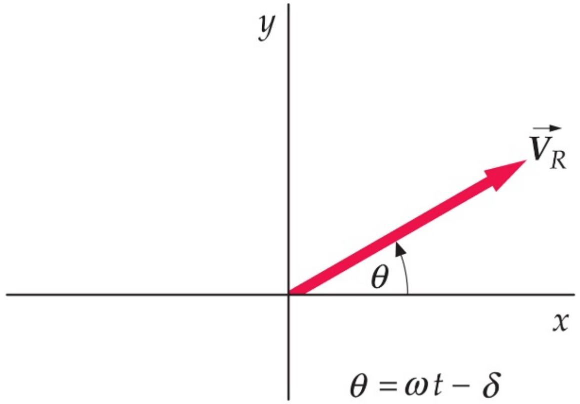
4.- Circuitos LCR en corriente alterna.

Circuitos LCR en corriente alterna

Diagramas de fasores.

Hasta ahora, los circuitos que hemos estudiado contenían un generador ac ideal y únicamente un elemento pasivo (es decir, resistencia, inducción o condensador). En estos circuitos, la diferencia de voltaje (o caída de tensión) entre los extremos de dichos elementos pasivos era igual a la fem del generador. En circuitos que contienen un generador ideal ac y dos o mas elementos adicionales conectados en serie, la suma de las diferencias de potencial entre todos los elementos (entre el primer extremo del primer elemento y el segundo extremo del ultimo) es igual a la fem del generador; en esto coinciden con los circuitos de corriente continua. Sin embargo, en un circuito ac, las caídas de tensión entre los extremos de cada elemento no tienen por que estar en fase, con lo que la suma de los valores eficaces no tiene por que coincidir con el valor eficaz del generador.

Con vectores de dos dimensiones, denominados fasores, se pueden representar las relaciones de fase entre la corriente y la diferencia de potencial a través de resistencias, inductores o condensadores. En la figura, el voltaje a través de una resistencia se ha representado por un vector $\vec{V}_R$ cuyo valor o modulo es $I_{max} \cdot R$ y que forma un ángulo θ con el eje *x*. Esta tensión esta en fase con la corriente. En general, una corriente estacionaria en un circuito de ac varia con el tiempo como



$$I = I_{max} \cos(\theta) = I_{max} \cos(\omega t + \delta)$$

siendo ω la frecuencia angular y δ cierta constante de fase. La caída de tensión en una resistencia viene dada entonces por

$$V_R = I \cdot R = I_{max} \cdot R \cos(\omega t + \delta)$$

El valor instantáneo de la caída de tensión en una resistencia es así igual a la componente *x* del vector fasor que gira en sentido antihorario con una frecuencia angular ω. La corriente *I* puede expresarse como la componente *x* de un fasor que tenga la misma orientación que $\vec{V}_R$.

Circuitos LCR en corriente alterna

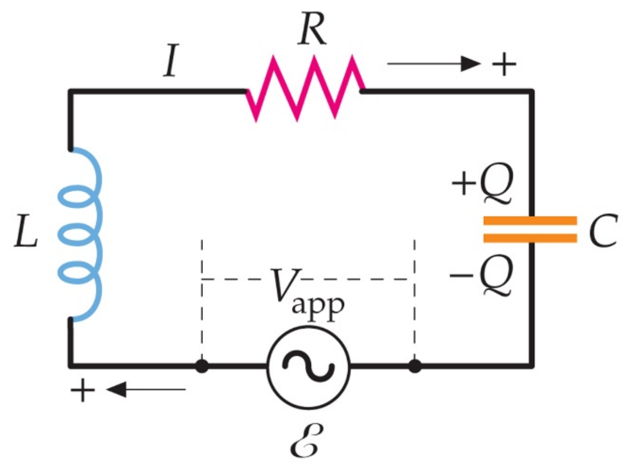
Diagramas de fasores.

Cuando se conectan juntos varios componentes en un circuito en serie, sus tensiones se suman. Cuando se conectan en paralelo, sus corrientes se suman. Pero la suma algebraica de senos y cosenos de diferentes amplitudes y fases resulta complicado e incomodo. Es mucho mas fácil efectuar la suma de vectores (y todavía más fácil utilizar números complejos).

Los fasores se emplean de la forma siguiente. Se expresa cualquier tensión o corriente como $A\cos(\omega t-\delta)$, que a su vez se considera como A_x, la componente x de un fasor A que forma un ángulo $(\omega t-\delta)$ con el eje x. En lugar de sumar dos tensiones o corrientes algebraicamente, como $A\cdot\cos(\omega t-\delta_1)+B\cdot\cos(\omega t-\delta_2)$, se representan estas magnitudes como fasores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y se halla la suma vectorial de los fasores $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$, geométricamente. La tensión o corriente resultante es entonces la componente x del fasor resultante, $C_x=A_x+B_x$. La representación geométrica muestra de forma clara las amplitudes y fases relativas de los fasores.

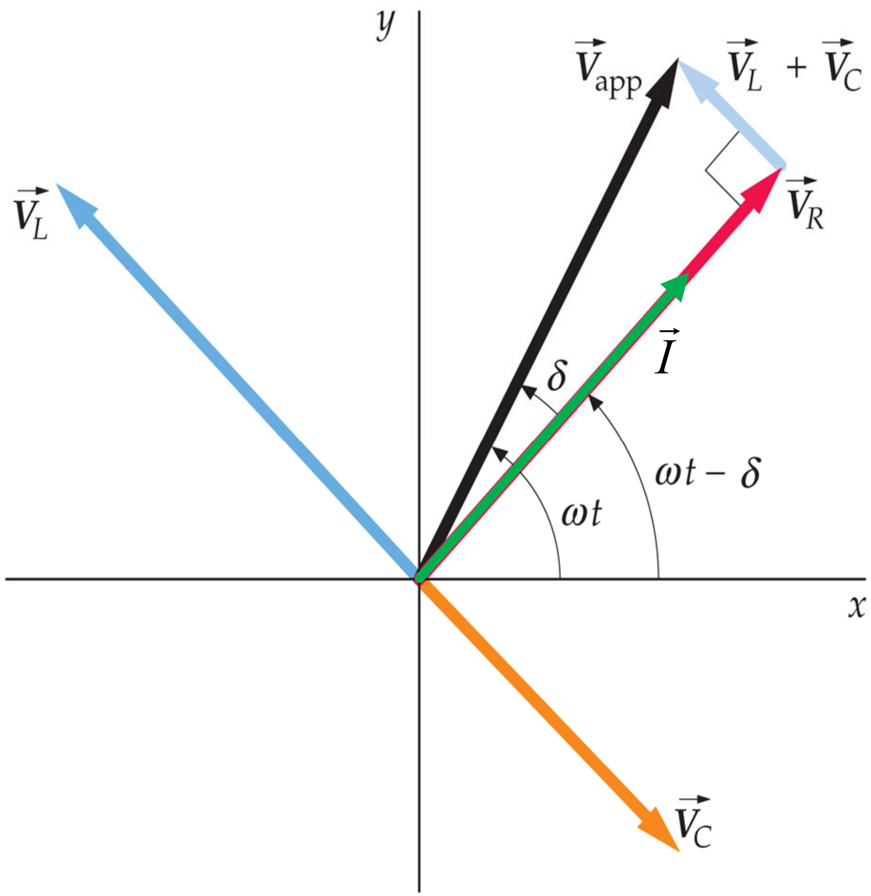
Circuitos LCR en corriente alterna

Diagramas de fasores.



Consideremos un circuito que contiene una bobina L, un condensador C y una resistencia R, conectados en serie todos ellos. Por todos pasara la misma corriente, que se representa como la componente x del fasor de corriente $\vec{I}$. La caída de potencial a través de la resistencia se representa por el fasor $\vec{V}_R$ siendo su modulo $I_{max}{\cdot}R$ y su fase la del fasor de la intensidad $\vec{I}$.

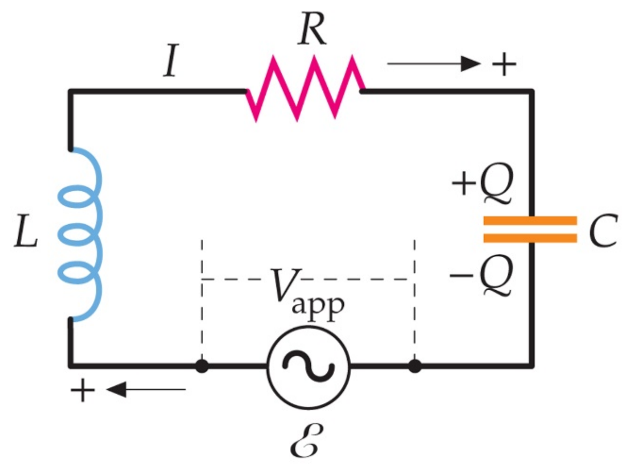
La caída de potencial en la bobina V_L se representa con el fasor $\vec{V}_L$ que tiene modulo $I_{max}{\cdot}X_L$ y que se adelanta respecto a la corriente en 90°. Analogamente, la caída de potencial en el condensador V_C se representa mediante un fasor $\vec{V}_C$ que tiene modulo $I_{max}{\cdot}X_C$ y que se retrasa respecto a la corriente en 90°.



En la figura pueden verse todos estos fasores. Segun transcurre el tiempo, los fasores giran en sentido antihorario con una frecuencia angular ω, de modo que no varían las posiciones relativas de los vectores. En un instante cualquiera, el valor instantáneo de la caída de tensión en cualquiera de estos elementos es igual a la componente x del fasor correspondiente.

Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR serie.



Aplicando la ley de Kirchhoff de las mallas se tiene que cumplir:

$$\vec{V}_{app} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C \Rightarrow \left|\vec{V}_{app}\right| = \left|\vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C\right|$$

La suma de $\vec{V}_L + \vec{V}_C$ da como resultado un fasor que va en la dirección que se indica en la figura y cuyo módulo será la diferencia entre los módulos de $\vec{V}_L$ y $\vec{V}_C$. Teniendo en cuenta que habíamos obtenido que los módulos de estos fasores se relacionaban con la corriente mediante:

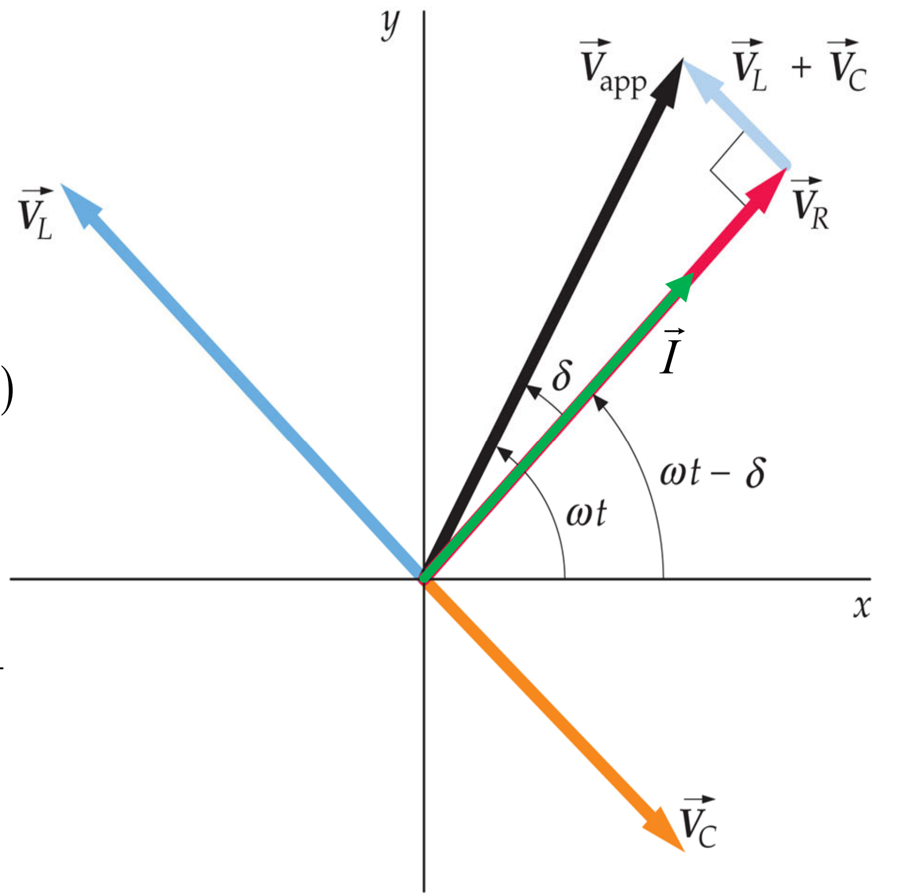
$$V_{C\,max} = X_C I_{max}$$
$$V_{L\,max} = X_L I_{max}$$

El valor del fasor suma será igual a:

$$\left|\vec{V}_L + \vec{V}_C\right| = V_{L\,max} - V_{C\,max} = X_L I_{max} - X_C I_{max} = I_{max}\left(X_L - X_C\right)$$

Por otro lado, la suma de $\vec{V}_L$ y $\vec{V}_C$ es perpendicular al fasor que representa la diferencia de potencial que cae en la resistencia por lo que el módulo de la fuerza electromotriz dada por la fuente de potencial tiene que ser igual a:

$$V_{app} = \left|\vec{V}_R\right| + \left|\vec{V}_L + \vec{V}_C\right| = \sqrt{\left(I_{max}R\right)^2 + \left[I_{max}\left(X_L - X_C\right)\right]^2}$$



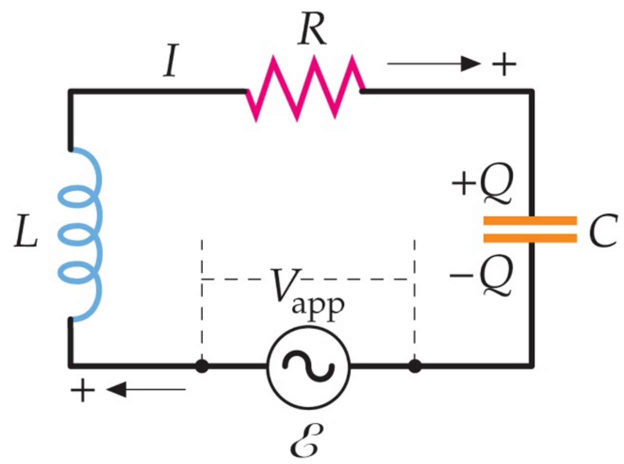
de donde

$$V_{app} = I_{max}\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = I_{max} Z$$

donde a Z se le conoce con el nombre de impedancia total del circuito.

Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR serie.



Puesto que la reactancia capacitiva e inductiva son funciones de la frecuencia angular de la señal alterna, la impedancia del circuito también dependerá de la frecuencia angular.

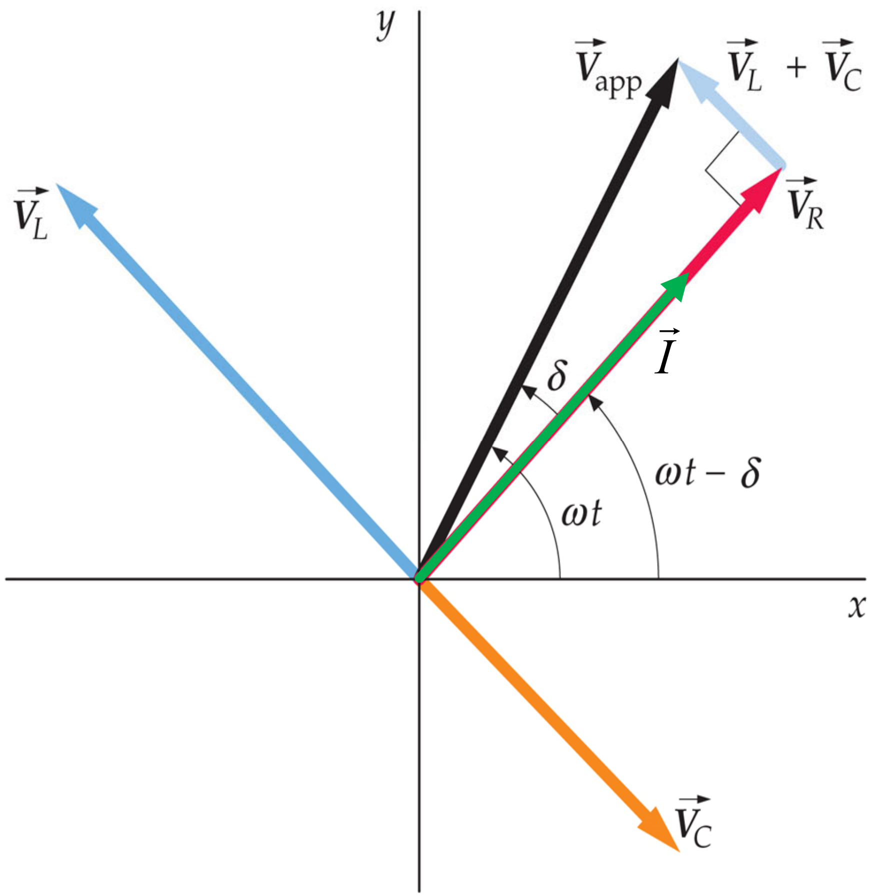
El ángulo de fase, diferencia angular entre el fasor que representa la señal de la fuente de fem y el fasor representativo de la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia puede calcularse mediante la expresión.

$$\delta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

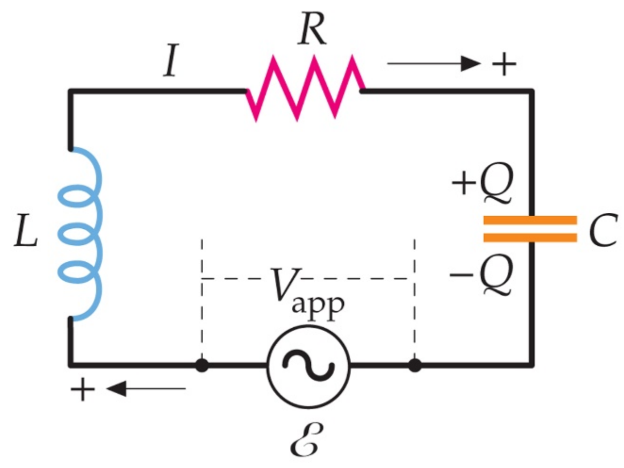
El ángulo de fase está directamente con la potencia media disipada por el circuito. Así, la potencia media consumida en este caso viene dada por:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{I_{max}^2 R}{2} = \frac{V_{appmax} I_{max}\cos(\delta)}{2}$$

Cuanto más se aproxime el ángulo de fase a cero mayor será la potencia consumida por el circuito mientras más próximo a $\pi/2$ sea el ángulo de fase menor será la potencia disipada en el circuito. Es por ello que al cos(δ) se le denomina factor de potencia.



Circuitos LCR en corriente alterna



Circuito LCR serie.

El ángulo para el cual el circuito consume la mayor cantidad de potencia recibe el nombre de frecuencia de resonancia. Es fácil deducir que esto ocurre para:

$$\delta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow L\omega_{res} = \frac{1}{C\omega_{res}} \Rightarrow \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Un circuito serie *LCR* con *L*=2 H, *C*=2 μF, y *R*=20 Ω está conectado a un generador de frecuencia variable con un fem máxima de 100 V. Hallar la frecuencia de resonancia y la corriente máxima en resonancia.

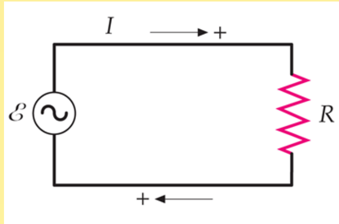
Examen para evaluar la asistencia y participación

Miércoles 17 de mayo de 12:30-13:00

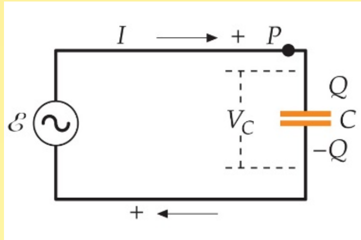
Aula 14 del edificio A4

CIRCUITOS EN CORRIENTE ALTERNA

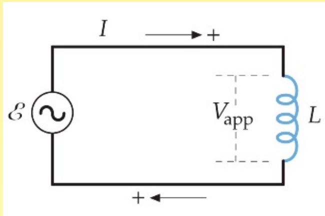
$$\left.\begin{array}{l} V_R = IR \\ V_R = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t) \end{array}\right| \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_{\max}}{R}\cos(\omega t) = I_{\max}\cos(\omega t)$$

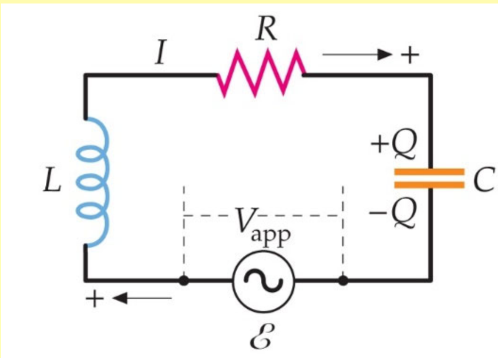


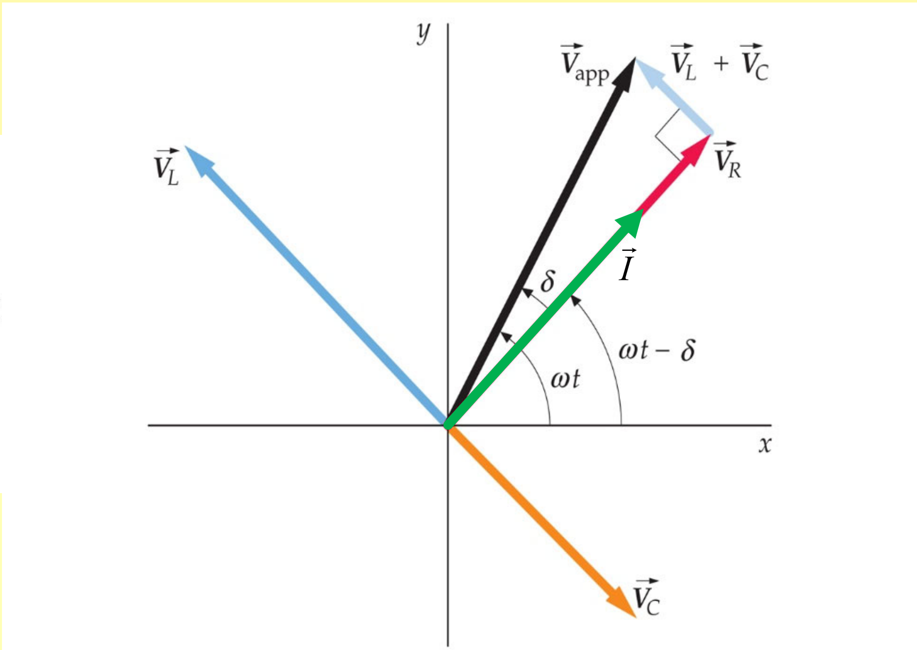
$$I = C\omega V_{C\max}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_{C\max}}{\frac{1}{C\omega}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_{C\max}}{X_C}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$I = \frac{V_{L\max}}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_{L\max}}{X_L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$







$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow V_{app} = ZI_{\max} = \mathrm{Re}(Z^*)I_{\max}$$

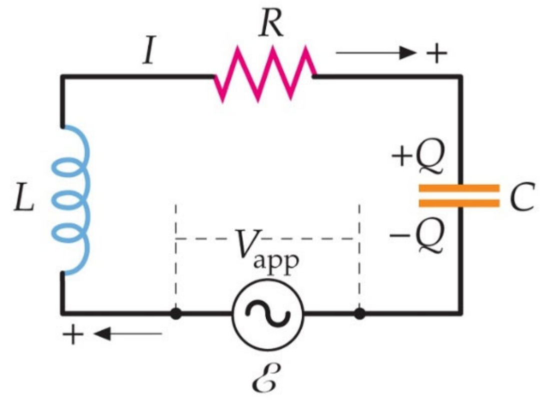
$$\delta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$$

$$P_m = \frac{V_{app\max} I_{\max}\cos(\delta)}{2}$$

$$\omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Circuitos LCR en corriente alterna

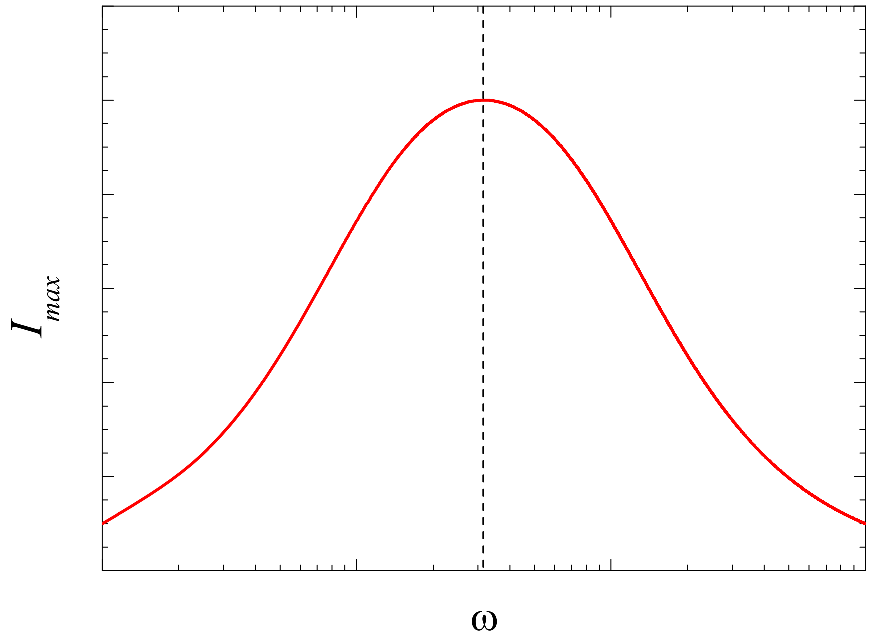
Circuito LCR serie.

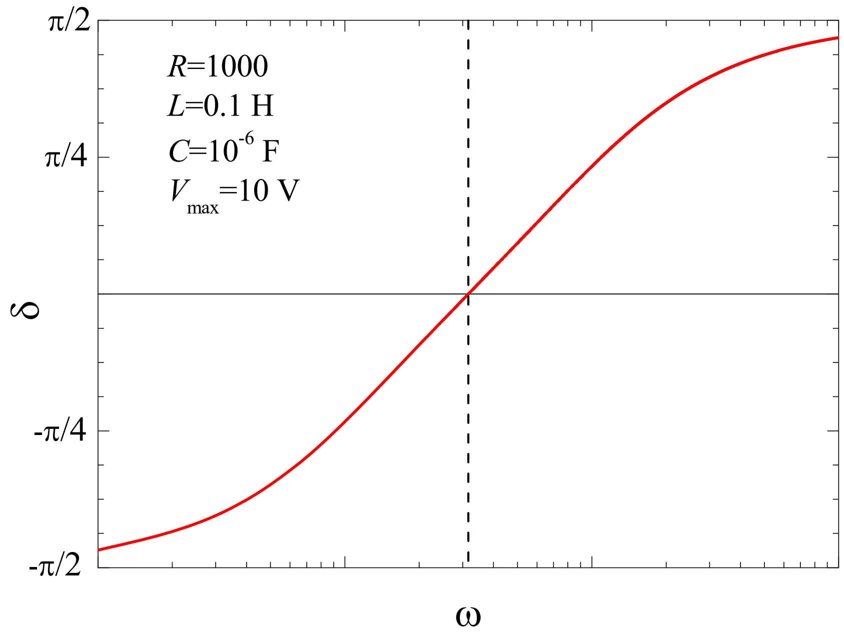


La dependencia de la intensidad máxima de corriente y del ángulo de fase se muestra en la figura de más abajo.

$$I_{max} = \frac{V_{app}}{Z} = \frac{V_{app}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) = \arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right)$$

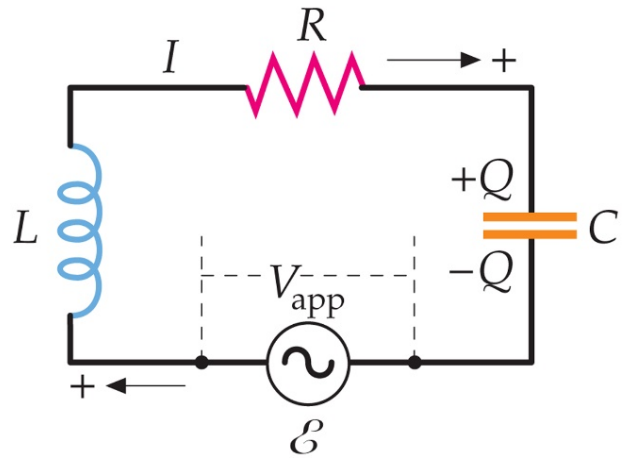




$$I_{max} = \frac{V_{app}}{R} \qquad \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \delta = 0$$

Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR serie.



Vamos ahora a analizar la dependencia de la diferencia de potencial que se establece entre cada uno de los elementos pasivos del circuito con la frecuencia de la fuente de fem. Habíamos obtenido:

$$I_{max} = \frac{V_{app}}{Z} = \frac{V_{app}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

De donde la diferencia de potencial entre cada uno de los elementos pasivos será:

$$V_{R\,max} = RI_{max} = \frac{RV_{app}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$$

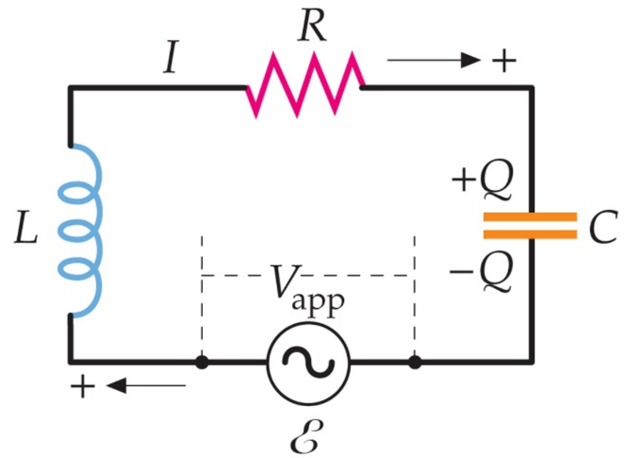
$$V_{C\,max} = X_C I_{max} = \frac{I_{max}}{C\omega} = \frac{V_{app}}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (CL\omega^2 - 1)^2}}$$

$$V_{L\,max} = X_L I_{max} = L\omega I_{max} = \frac{L\omega V_{app}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2}}$$

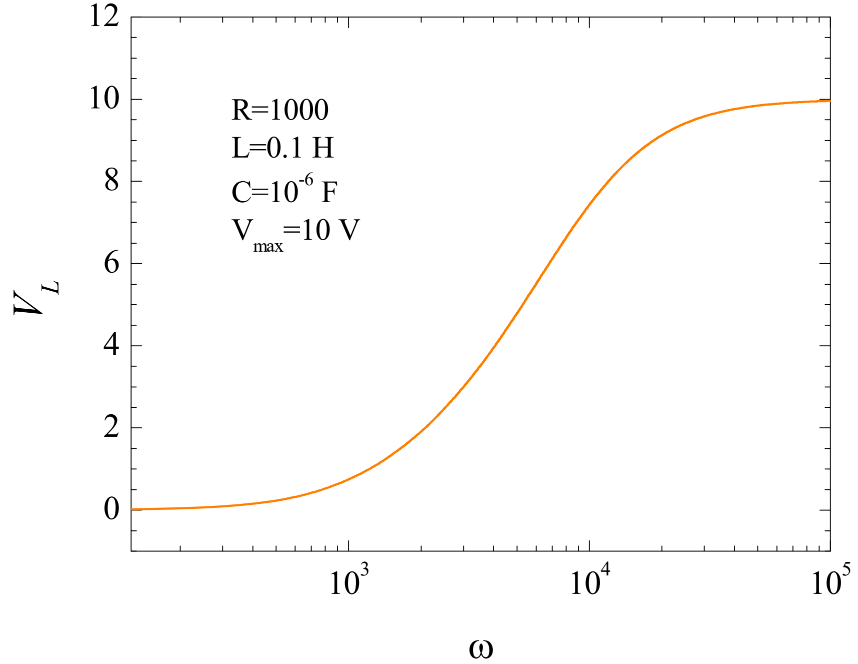
Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR serie.

La diferencia de potencial entre los extremos de la bobina depende de la frecuencia como:



$$V_{L\,max} = X_L I_{max} = L\omega I_{max} = \frac{L\omega V_{app}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2}}$$

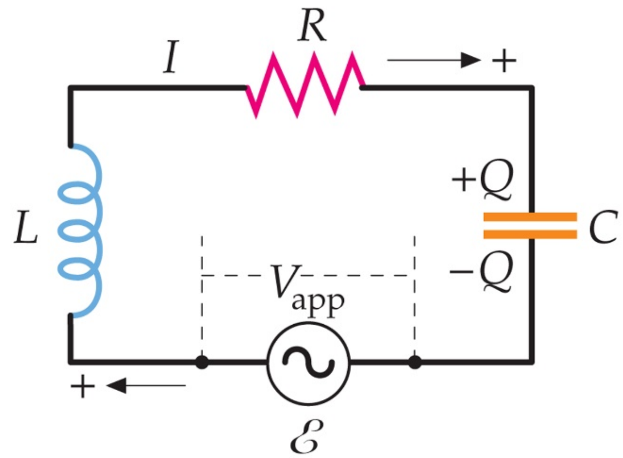


Filtro paso-alta

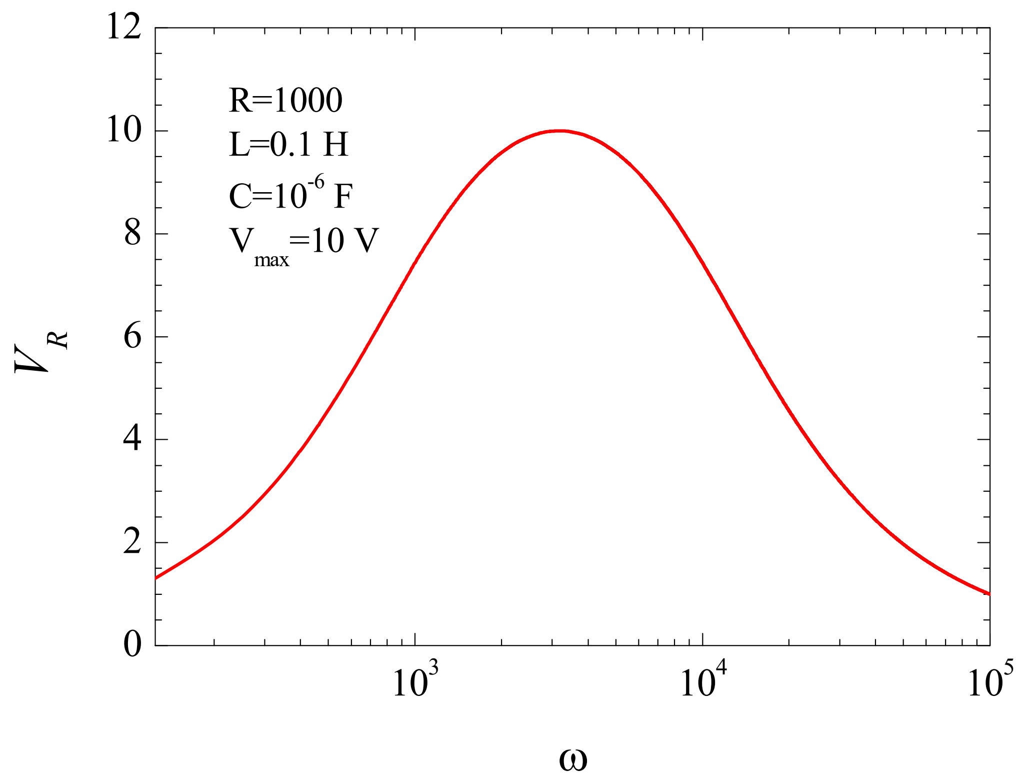
Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR serie.

La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia depende de la frecuencia como:



$$V_{R\max} = RI_{\max} = \frac{RV_{\text{app}}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_{\text{app}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$$

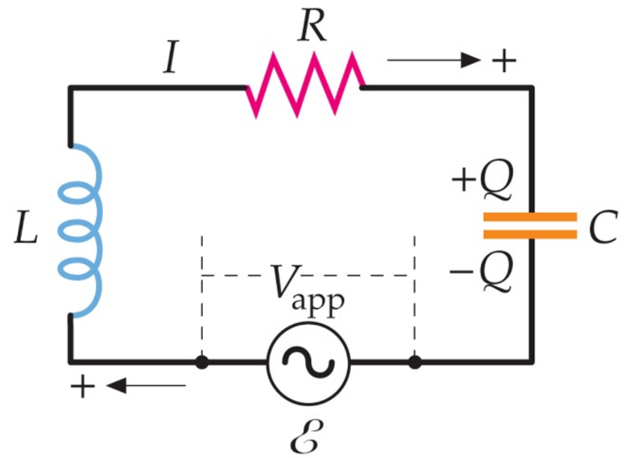


Filtro paso-banda

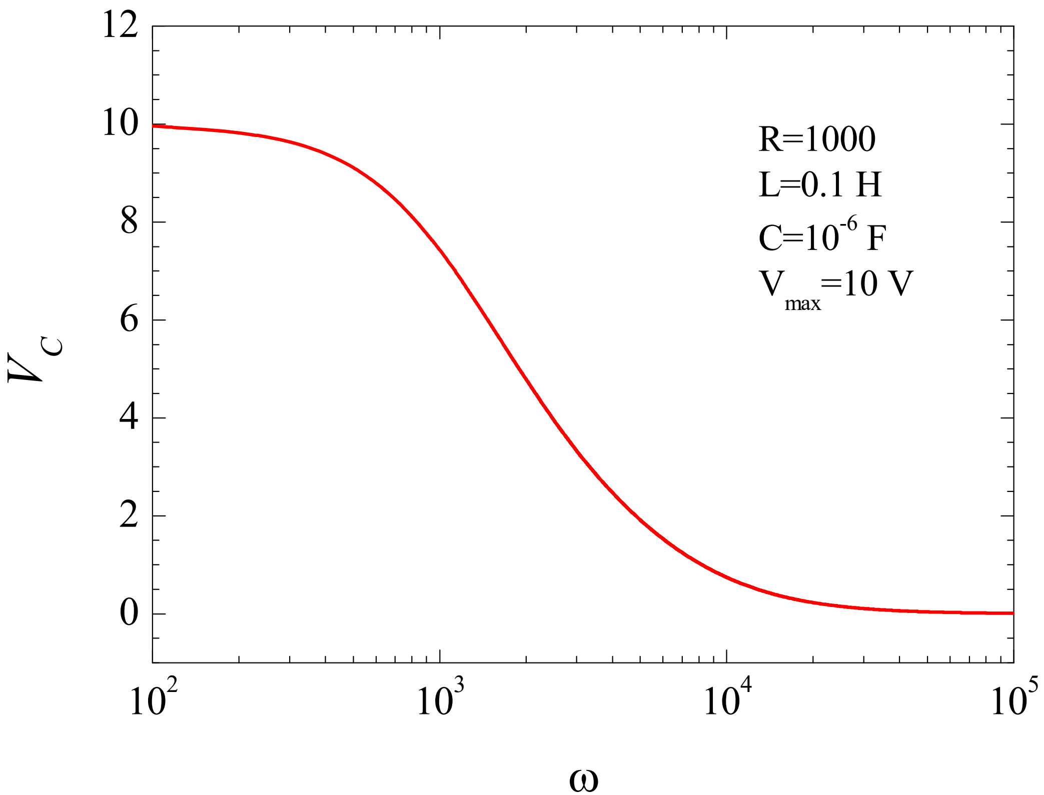
Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR serie.

La diferencia de potencial entre los extremos del condensador depende de la frecuencia como:



$$V_{C\,max} = X_C I_{max} = \frac{I_{max}}{C\omega} = \frac{V_{app}}{C\omega\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{V_{app}}{\sqrt{(RC\omega)^2 + \left(CL\omega^2 - 1\right)^2}}$$

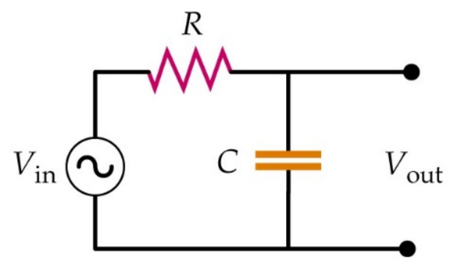


Filtro paso-baja

Si el generador del anterior ejemplo tiene una frecuencia de 60 Hz, determinar (a) la potencia máxima, (b) el ángulo de fase.

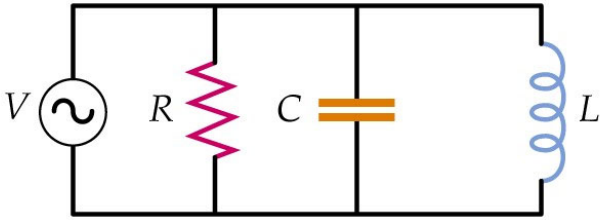
Un circuito serie *LCR* con *L*=2 H, *C*=2 μF, y *R*=20 Ω está conectado a un generador de frecuencia variable con un fem máxima de 100 V. Hallar la frecuencia de resonancia y la corriente máxima en resonancia.

Una resistencia *R* y un condensador *C* se encuentran en serie con un generador que tiene una tensión dada por $V_{in}=V_0\cos(\omega t)$, como se ve en la figura. Hallar la tensión de salida en el condensador en función de la frecuencia.

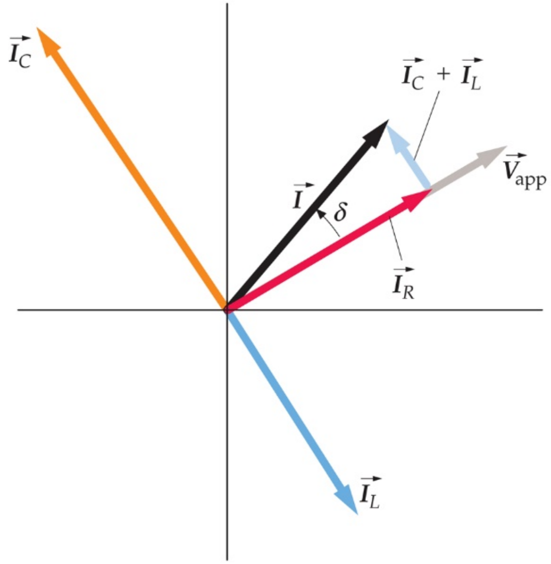


Circuitos LCR en corriente alterna

Circuito LCR paralelo.



Ahora nos planteamos que ocurre con un circuito RCL paralelo como el que se muestra en la figura.



Representamos ahora los fasores que representan las intensidades que recorren cada una de las ramas del circuito y, por tanto, de los elementos pasivos que lo forman.

Por estar en paralelo, la diferencia de potencial es la misma entre los bornes de todos los elementos y además es igual a la diferencia de potencial proporcionada por la fuente de fuerza electromotriz por lo que está en fase con esta.

Por otro lado, el fasor corriente de la resistencia va en la misma dirección y sentido que el fasor asociado a la fem de la fuente, el fasor corriente en el condensador debe de estar adelantado 90º y el fasor corriente en la autoinducción debe de estar desfasado en 90º tal y como se muestra en la figura.

Los fasores correspondientes a las intensidades de corriente que atraviesan el condensador y la bobina, $\vec{I}_C + \vec{I}_L$, pueden sumarse fácilmente.

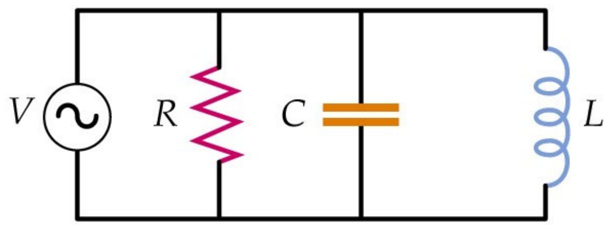
$$\left|\vec{I}_C + \vec{I}_L\right| = I_C - I_L = \frac{V_{app}}{X_C} - \frac{V_{app}}{X_L} = V_{app}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

Por otro lado, el módulo de la corriente total que recorre el circuito viene dada por:

$$\left|\vec{I}\right| = \sqrt{\left|\vec{I}_R\right|^2 + \left|\vec{I}_C + \vec{I}_L\right|^2} = \sqrt{\left(\frac{V_{app}}{R}\right)^2 + \left[V_{app}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right]^2} = V_{app}\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

Circuitos LCR en corriente alterna

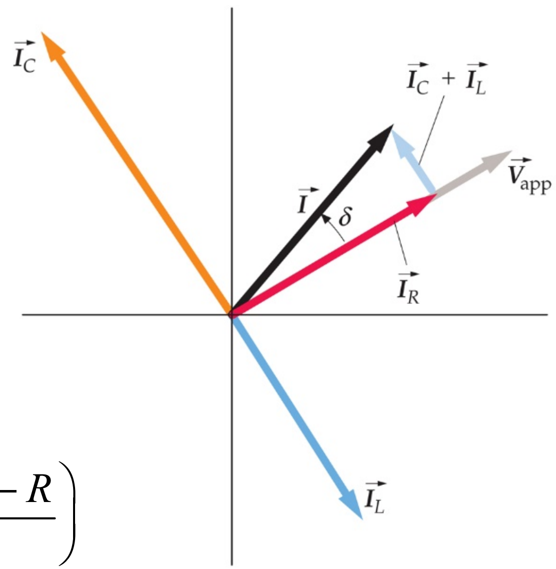
Circuito LCR paralelo.



Por lo tanto, la impedancia del circuito será en este caso:

$$Z=\frac{V_{\text{app}}}{I}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{(LC\omega^2-1)^2}{L^2\omega^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{L^2\omega^2+R^2(LC\omega^2-1)^2}{R^2L^2\omega^2}}}$$

$$Z=\frac{RL\omega}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2(LC\omega^2-1)^2}}$$



Por otro lado, el ángulo de fase en este caso será igual a:

$$\delta=\arctan\left(\frac{I_C-I_L}{I_R}\right)=\arctan\left(\frac{V_{\text{app}}\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)}{\frac{V_{\text{app}}}{R}}\right)=\arctan\left(\frac{LRC\omega^2-R}{L\omega}\right)$$

Por lo tanto la frecuencia de resonancia en este caso será:

$$\arctan\left(\frac{LRC\omega_{\text{res}}^2-R}{L\omega_{\text{res}}}\right)=0\Rightarrow LRC\omega_{\text{res}}^2-R=0\Rightarrow\omega_{\text{res}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$