

# *Tema 10*

## *ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS*

A lo largo de los anteriores temas hemos ido viendo las diferentes leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo: la ley de Coulomb, leyes de Gauss para el campo eléctrico y para el campo magnético, ley de Biot y Savart, ley de Ampère y ley de Faraday. Como vimos también en el desarrollo de estos temas hay varias leyes equivalentes entre sí. Así, la ley de Coulomb es equivalente a la ley de Gauss para el campo eléctrico, es decir, se puede demostrar matemáticamente que si se cumple una de ellas automáticamente tiene que cumplirse la otra. También son equivalentes las leyes de Biot y Savart y la ley de Ampere

En definitiva de todas las leyes experimentales sólo cuatro son independientes: las leyes Gauss para el campo eléctrico y para el campo magnético, la ley de Ampere y la ley de Faraday.

Al final del siglo XIX se conocían estas cuatro leyes que concentraban todo el conocimiento sobre el electromagnetismo. Sin embargo, había un problema: en física se requiere que cualquier ley se cumpla de forma general en cualquier situación. Si bien las leyes de Gauss y de Faraday se cumplían de forma general en cualquier situación, la ley de Ampere sólo era válida para corrientes estacionarias continuas.

En 1865, el físico inglés James Clark Maxwell (1831-1879) completo la ley de Ampere introduciendo el concepto de la corriente de desplazamiento y encontró que todas las leyes experimentales de la electricidad y el magnetismo podían resumirse en un grupo de ecuaciones que se conocen con el nombre de ecuaciones de Maxwell. Desde entonces hasta nuestros días estas ecuaciones son las que dominan cualquier fenómeno del electromagnetismo.

Como vamos a ver a lo largo de este tema, las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas que son fundamentales hoy en día en el desarrollo de nuestra sociedad.

# *ESQUEMA DE DESARROLLO*

~~1.- Introducción.~~

2.- Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento.

3.- Ecuación de onda para las ondas electromagnéticas.

4.- Radiación electromagnética. El espectro electromagnético.

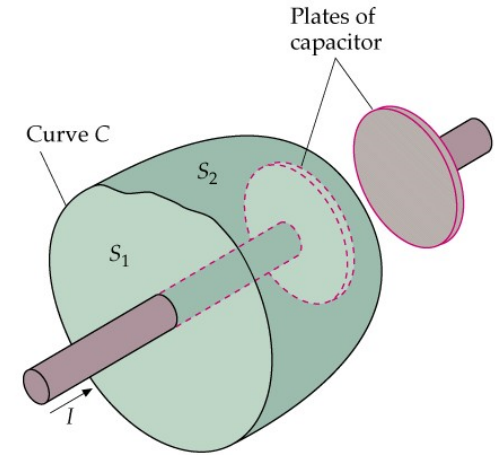
Hasta ahora hemos visto las siguientes leyes fundamentales del electromagnetismo:

|                                        | <u>Forma diferencial</u>                                                               | <u>Forma integral</u>                                             |
|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| • Ley de Gauss para el campo eléctrico | $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$                           | $\oint \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ |
| • Ley de Gauss para el campo magnético | $\nabla \cdot \vec{B} = 0$                                                             | $\oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = 0$                    |
| • Ley de Ampere                        | $\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t)$                        | $\oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$              |
| • Ley de Faraday                       | $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ | $\epsilon = -\frac{\partial \Phi_m(\vec{r}, t)}{\partial t}$      |

Maxwell se dio cuenta de un problema que aparecía en la ley de Ampere. Así, como vimos en temas anteriores, La ley de Ampère relaciona la integral lineal del campo magnético alrededor de una curva cerrada  $C$  con la corriente que atraviesa cualquier área limitada por dicha curva:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Así, si consideramos una situación como la mostrada en la figura la ley de Ampere no se cumple. Vamos a demostrar esta afirmación. La figura muestra dos superficies diferentes,  $S_1$  y  $S_2$ , limitadas por la misma curva  $C$ , la cual rodea a un alambre que transporta una corriente a una placa de un condensador. La corriente a través de la superficie  $S_1$  es  $I$ , pero no existe corriente a través de la superficie  $S_2$  porque la carga se detiene en la placa del condensador. Existe, por lo tanto, una ambigüedad en la frase “la corriente que atraviesa cualquier área limitada por dicha curva”. Este problema surge siempre que la corriente es discontinua.



Maxwell demostró que esta ley puede generalizarse incluyendo todas las situaciones si se sustituye la corriente  $I$  de la ecuación por la suma de la corriente  $I$  y otro término  $I_d$ , denominado corriente de desplazamiento de Maxwell, definido como

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Donde  $\Phi_E$  es el flujo del campo eléctrico a través de la misma superficie limitada por la curva  $C$ . Entonces, la forma generalizada de la ley de Ampère será

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right)$$

Podemos comprender esta generalización considerando de nuevo la figura. Denominemos corriente generalizada a la suma de la corriente de conducción más la corriente de desplazamiento,  $I+I_d$ . De acuerdo con el argumento que acabamos de dar, la misma corriente generalizada debe cruzar cualquier superficie limitada por la curva  $C$ . Las superficies  $S_1$  y  $S_2$  unidas forman una superficie cerrada y la suma de las corrientes generalizadas que atraviesan esta superficie cerrada es igual a la suma de las corrientes generalizadas que salen de ella. Si existe una corriente verdadera neta  $I$  que entre en el volumen, deberá existir una corriente de desplazamiento neta igual que salga del mismo volumen. En el volumen de la figura existe una corriente neta  $I$  que entra aumentando la carga en su interior:

$$I = \frac{dQ_{\text{interior}}}{dt}$$

El flujo del campo eléctrico que sale del volumen está relacionado con la carga mediante la ley de Gauss:

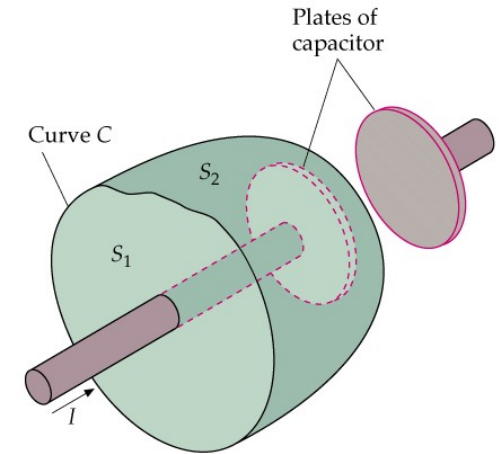
$$\Phi_E = \oint E_n dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ_{\text{interior}}}{dt} \Rightarrow I = I_d$$

Por lo tanto, la corriente de conducción neta que entra en el volumen es igual a la corriente de desplazamiento neta que sale del volumen. La corriente generalizada es siempre continua.

La ecuación de Ampere-Maxwell también puede escribirse en forma diferencial como:

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) \Rightarrow \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$$

Donde  $J$  es el flujo de corriente de conducción o farádica.



En definitiva las cuatro ecuaciones que dominan cualquier fenómeno en el electromagnetismo conocidas con el nombre de ecuaciones de Maxwell son:

### ECUACIONES DE MAXWELL

Ley de Gauss para el campo eléctrico  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Ley de Gauss para el campo magnético  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Ley de Ampere-Maxwell  $\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \left[ \vec{J}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right]$

Ley de Faraday  $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$

# *ESQUEMA DE DESARROLLO*

~~1.- Introducción.~~

~~2.- Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento.~~

3.- Ecuación de onda para las ondas electromagnéticas.

4.- Radiación electromagnética. El espectro electromagnético.



Las ecuaciones de Maxwell en una región del espacio libre de fuentes de campos eléctricos y magnéticos pueden escribirse como:

Ley de Gauss para el campo eléctrico  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$

Ley de Gauss para el campo magnético  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Ley de Ampere-Maxwell  $\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$

Ley de Faraday  $\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$

Vamos a demostrar que en estas condiciones las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas en regiones del espacio libres de fuentes de campo eléctrico y magnético.

Vamos a recordar brevemente el concepto de onda y que ecuación matemática satisface.

**¿Qué es una onda?** Una onda es cualquier perturbación de una condición de equilibrio que se mueve o se propaga en el tiempo de una región a otra del espacio.

**Clasificación de las ondas**

- a).-Ondas transversales cuando la perturbación se produce perpendicularmente a la dirección de propagación. Por ejemplo una cuerda que se coge en un extremo y se agita hacia arriba y hacia abajo.
- b).-Ondas longitudinales cuando la perturbación se produce en la misma dirección de la propagación (ondas sonoras).
- c).-Ondas torsionales.

Se puede demostrar que una perturbación se propaga como una onda si cumple la ecuación:

$$\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

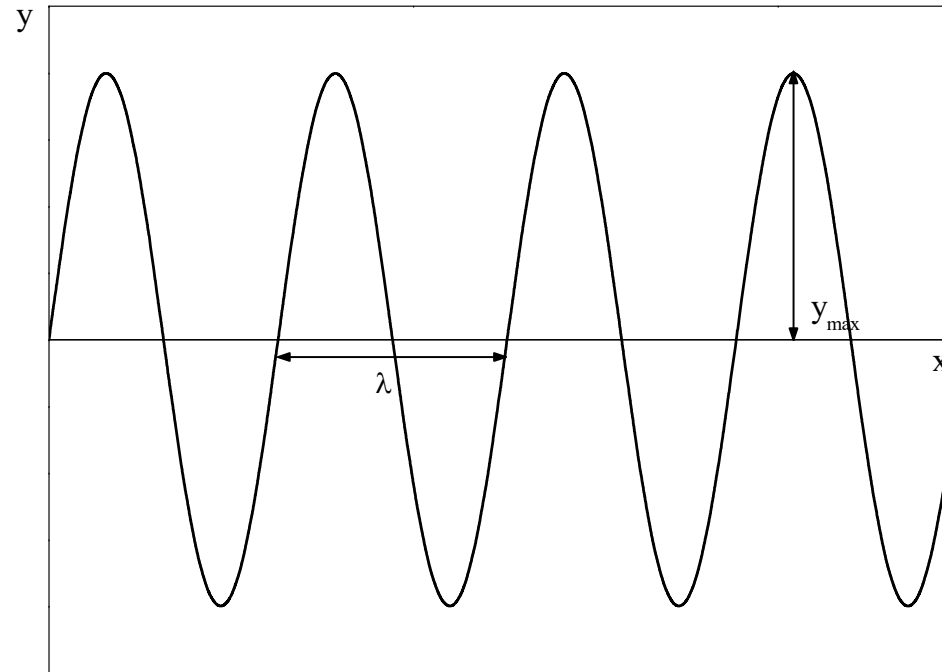
En el caso de que la onda se transmita en una sola dirección la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

La solución de esta ecuación es:  $y = y_{\max} \sin(kx - \omega t)$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda f = v$$



Vamos a ver que las ecuaciones de Maxwell llevan a una ecuación de onda para los campos eléctrico y magnético.

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

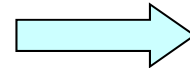
$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$



$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$



$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = \nabla \left( \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \right) - \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$$

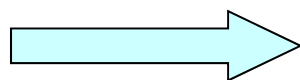
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$



$$\nabla \times \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas

$$\nabla^2 y = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}$$

### Propiedades de las ondas electromagnéticas

1.- En primer lugar de la ecuación de onda es claro que en el caso que nos ocupa:

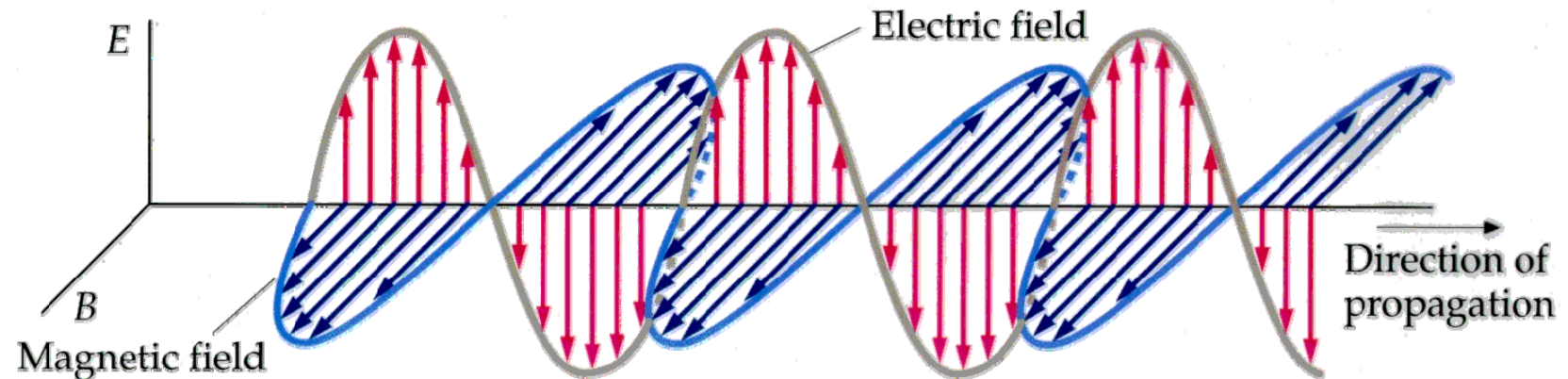
$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

2.- El campo eléctrico y magnético tienen que ser obligatoriamente perpendiculares.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

3.- Si consideramos una onda electromagnética plana propagándose en la dirección del eje x, las soluciones de las ecuaciones serán del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} E_y = E_0 \sin(-\omega t + kx) \hat{x} \\ B_z = B_0 \sin(-\omega t + kx + \varphi) \hat{x} \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi = 0 \\ E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 = v B_0 \end{array}$$



Aspecto de la propagación de una onda electromagnética plana propagándose.

Las ondas electromagnéticas transportan energía. Parte de esta energía es eléctrica otra parte es energía magnética.

La densidad de energía asociada al campo eléctrico (energía por unidad de volumen) es:

$$u_E(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(\vec{r}, t)}{2}$$

La densidad de energía asociada al campo magnético (energía por unidad de volumen) es:

$$u_B(\vec{r}, t) = \frac{B^2(\vec{r}, t)}{2\mu_0}$$

La relación existente entre ambas energías es:

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 v^2 B^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 v^2 B^2}{2\mu_0} = \frac{v^2 B^2}{2v^2 \mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} = u_B$$

La suma de  $u_E$  y  $u_B$  es la densidad de energía electromagnética total  $u$

$$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$



## *ESQUEMA DE DESARROLLO*

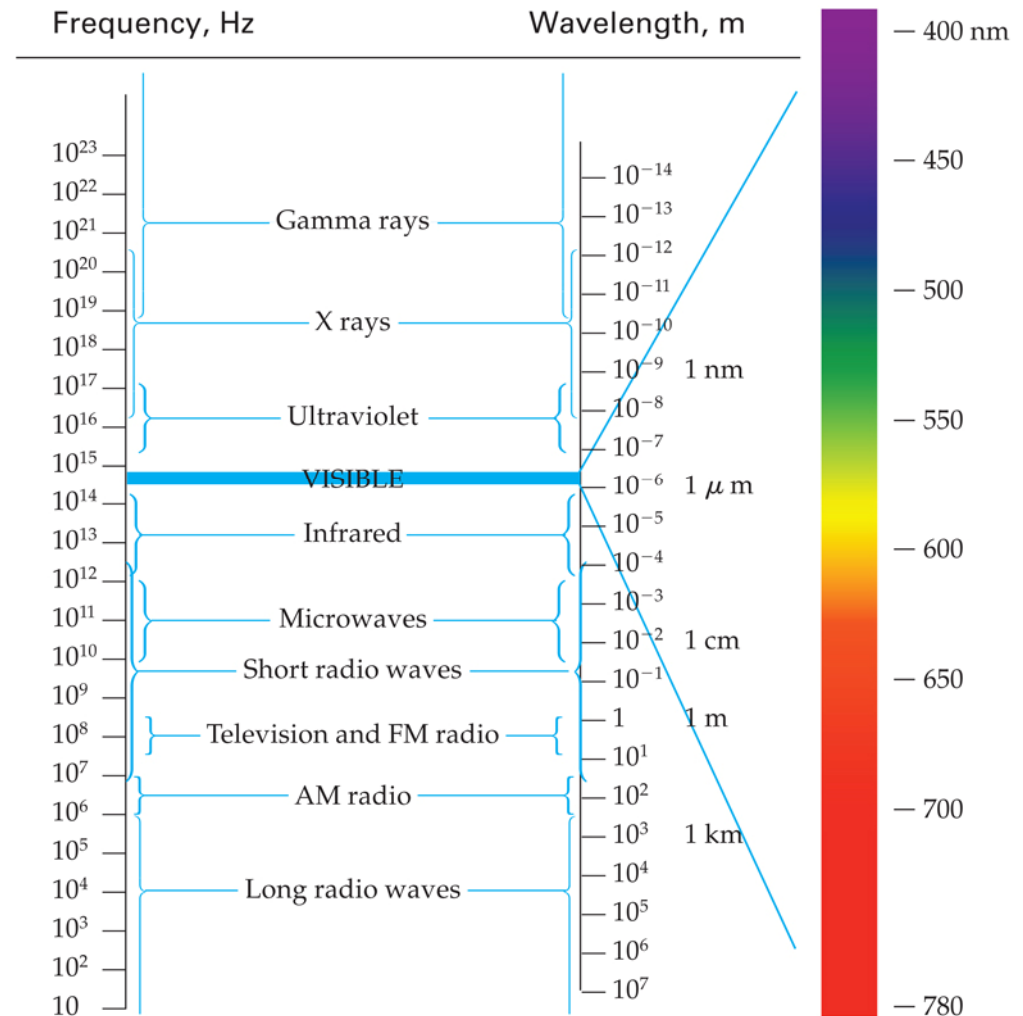
- ~~1. Introducción.~~
- ~~2. Ecuaciones de Maxwell. Corriente de desplazamiento.~~
- ~~3. Ecuación de onda para las ondas electromagnéticas.~~
- 4.- Radiación electromagnética. El espectro electromagnético.

Las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas con frecuencias entre cero e infinito.

$$\lambda f = c$$

Esto da lugar a lo que se conoce como el espectro electromagnético, en el cual las ondas se ordenan en función de sus frecuencias y de sus propiedades de interacción con la materia.

**Table 30-1** The Electromagnetic Spectrum



Interacción de ondas electromagnéticas con la materia.

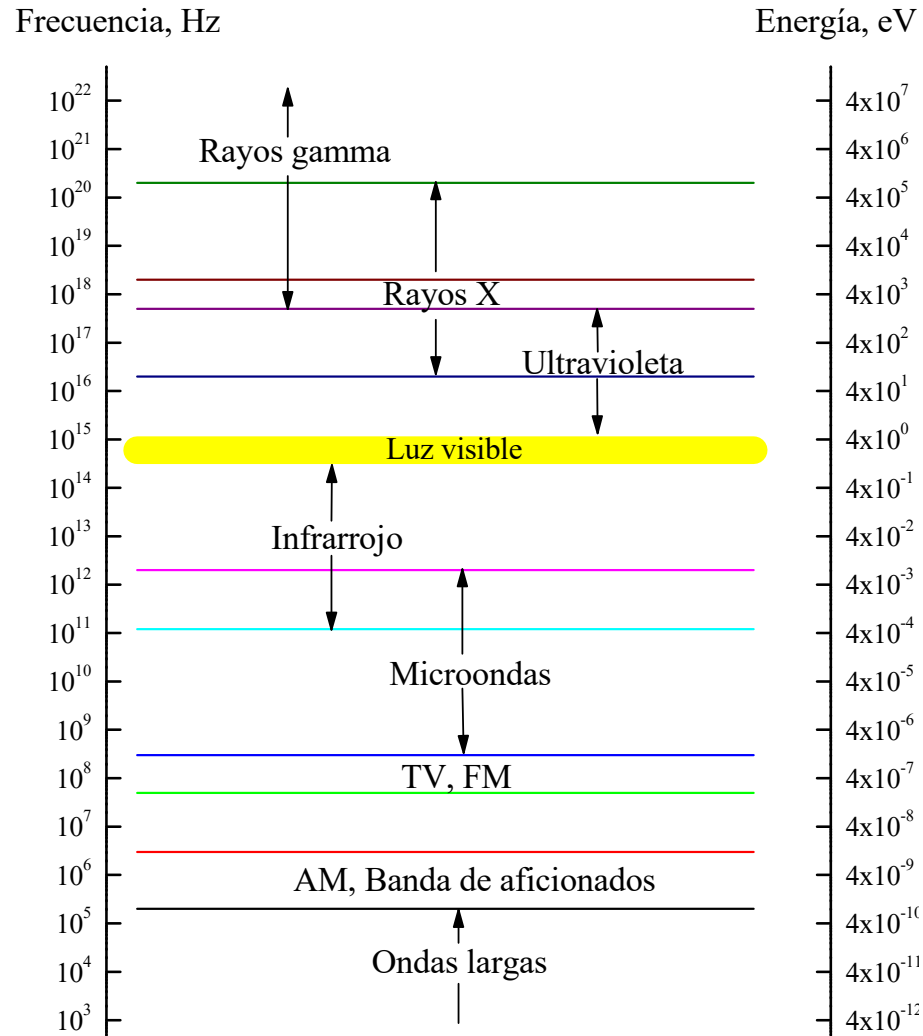
Hay que hacer uso de la mecánica cuántica. Una onda electromagnética se transporta como una onda pero interacciona con la materia como paquetes de energía (quantos de energía) de valor  $E=h\cdot f$  donde  $h$  es la constante de Planck. Si un cuanto electromagnético interacciona con la materia su energía es absorbida en su totalidad.

$$h=6.626\cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

La energía absorbida aumenta la energía de la partícula que la absorbe (protón, neutrón, electrón, etc).

- 1.- Si la energía no es suficiente para superar la energía de enlace de la partícula al átomo o molécula, la absorción del fotón se traduce, a nivel macroscópico, en un aumento de la temperatura.
- 2.- Si la energía absorbida es suficientemente grande la partícula es arrancada del átomo o molécula pudiendo producir su ionización o rotura.

Interacción de ondas electromagnéticas con la materia.



Algunas energías de ionización:

- Cs  $\Rightarrow$  3.9 eV
- C  $\Rightarrow$  11.3 eV
- H  $\Rightarrow$  13.6 eV
- He  $\Rightarrow$  22.4 eV