Departamento de Física
Universidad de Jaén

Corriente Alterna

- **Circuitos de c.a.**

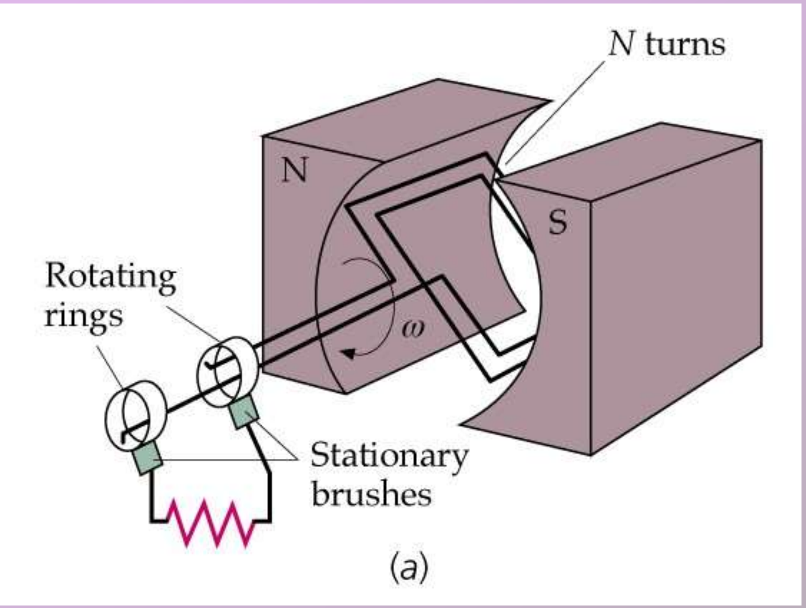
1- Introducción

- Partimos del generador simple de c.a.:

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{S})$$

$$\varepsilon = B\,S\,w\ \mathrm{Sen}\,wt$$

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_{max}\ \mathrm{Sen}\,wt}$$



- Por la ley de Ohm: $\varepsilon = I\,R$

$$\boxed{I = I_{max}\ \mathrm{Sen}\,wt}$$

- Funciones armónicas de periodo: $T = 2\pi/w$

1- Introducción

- La Potencia consumida en R en el circuito de la figura anterior será:

$$P = I^2 R = I^2_{max} \, R \, Cos^2 \, w \, t$$

- En un cierto tiempo (Δt) la energía consumida: $Q = \int P \, dt$

$$Q = \int_0^T I^2_{max} \, R \, Cos^2 \, w \, t \, dt = I^2_{max} \, R \int_0^T Cos^2 \, w \, t \, dt \Rightarrow$$

$$Q = I^2_{max} \, R \, \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \, R \, T \, I^2_{max}$$

- En un periodo (T = 2π/w): $P = \frac{Q}{T} = \frac{1}{2} R \, I^2_{max}$

- Como estos valores dependen del tiempo buscamos un valor medio (la media cuadrática) llamado valor eficaz.

1- Introducción

- La Intensidad eficaz de una c.a. equivale a la intensidad de una c.c. que produjera los mismos efectos térmicos que la c.a.
- Una c.c. produce $Q = R\, I^2\, t$
- En un periodo la c.a. $Q = R\, I^2_{max}\, (T/2)$

$$I^2_{ef} = \frac{I^2_{max}}{2} \Rightarrow \boxed{I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

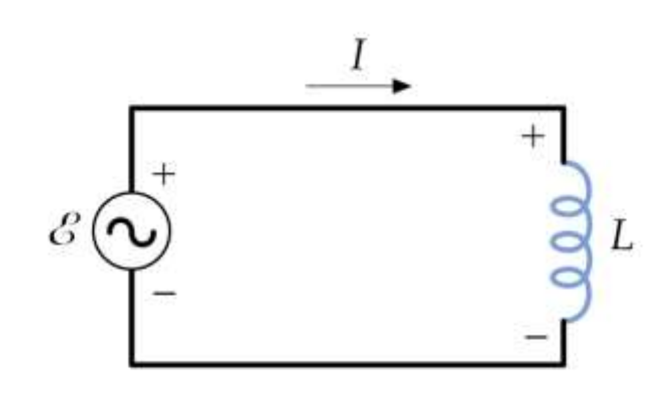
- De igual forma para la f.e.m.: $\boxed{I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$

$$\boxed{\varepsilon_{ef} = R\, I_{ef}}$$

2 – Circuito de c.a. con L

- Como este tipo de corriente es variable, se produce f.e.m. inducida:

$$\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt} \qquad \varepsilon + \varepsilon_i = -R\,I = 0$$



$$\varepsilon_{max}\ \mathrm{Cos}\,w\,t - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\int dI = \int \frac{\varepsilon_{max}}{L}\,\mathrm{Cos}\,w\,t\,dt$$

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon_{max}}{L\,w}\,\mathrm{Sen}\,w\,t} \Rightarrow I = I_{max}\ \mathrm{Sen}\,w\,t = I_{max}\ \mathrm{Cos}\left(w\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- La autoinducción retrasa la intensidad en $\pi/2$ rad respecto a la tensión.

$$I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{L\,w} \Rightarrow \boxed{X_L = L\,w}$$

Reactancia inductiva o Inductancia (en Ohmios)

$$\boxed{\varepsilon_{ef} = X_L\,I_{ef}}$$

Simulación

3 – Circuito de c.a. con C

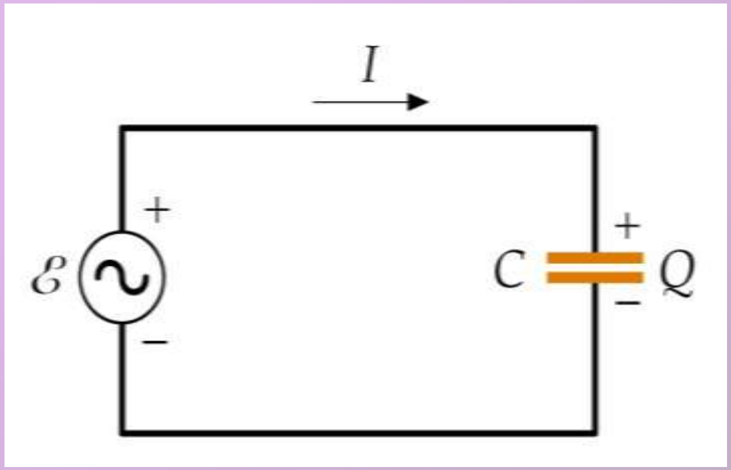
- En el condensador tendremos:

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{max} \ \mathrm{Cos}\, wt = \frac{Q}{C}$$

$$Q = C\ \varepsilon_{max}\ \mathrm{Cos}\, wt$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -C\,w\ \varepsilon_{max}\ \mathrm{Sen}\, wt$$

$$\boxed{I = C\,w\ \varepsilon_{max}\ \mathrm{Cos}\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)}$$



- El Condensador adelanta la intensidad en $\pi/2$ rad respecto a la tensión.

$$I_{max} = C\,w\ \varepsilon_{max} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_C = \frac{1}{C\,w}}$$

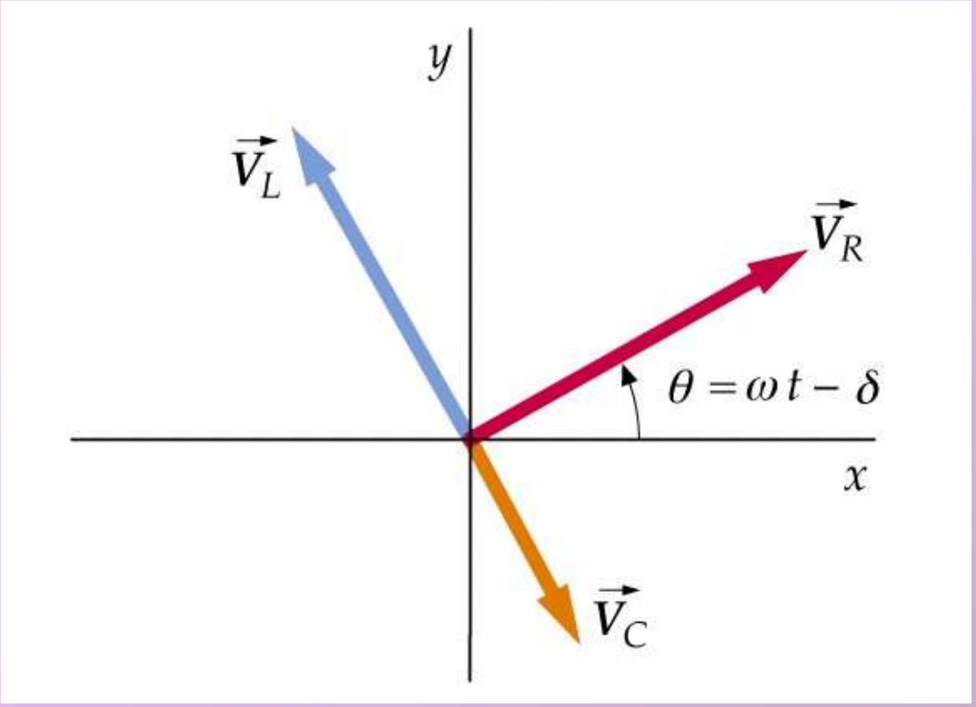
Reactancia capacitiva o Capacitancia (en Ohmios)

$$\boxed{\varepsilon_{ef} = X_C\, I_{ef}}$$

Simulación

4 – Fasores

- Estos atrasos y adelantos se pueden representar por vectores de dos dimensiones llamados Fasores:



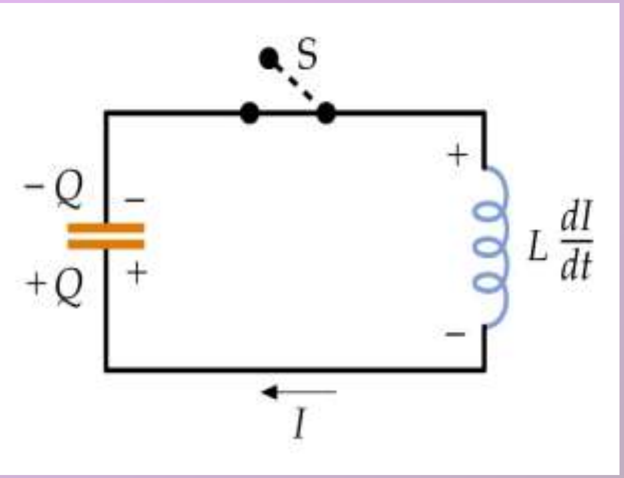
- Para determinar V total en un circuito debemos sumar las componentes x de cada Fasor.

5 – Circuito L C sin generador

- En este circuito, con carga inicial q_0, las caídas de tensión en cada elemento son iguales.

$$-L\frac{dI}{dt}=\frac{q}{C} \qquad I=\frac{dQ}{dt}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0 \Longrightarrow \frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{1}{LC}q$$



- Esta ec. diferencial es similar a la de un muelle, y por tanto su solución es la misma:

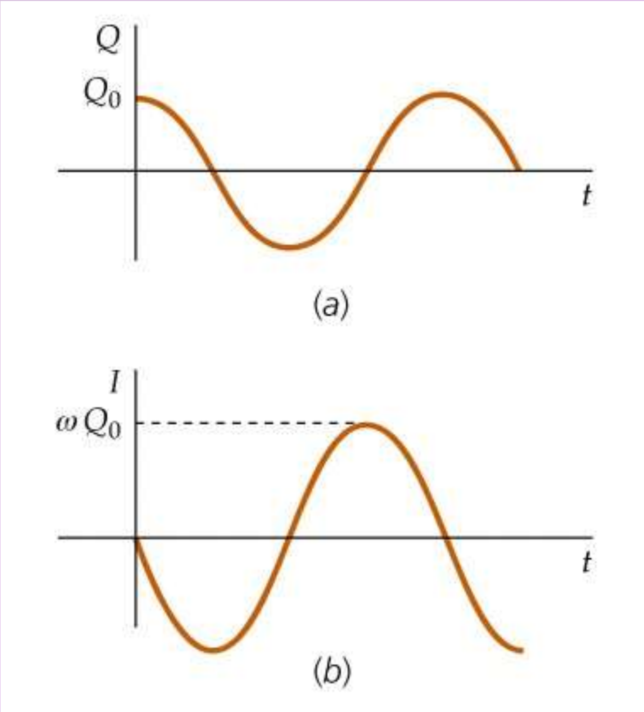
$$\boxed{q=q_0 \operatorname{Cos} wt}$$

Donde la pulsación es: $\boxed{w=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

$$I=\frac{dq}{dt}=w\,q_0 \operatorname{Sen} wt$$

Vemos que *I* va desfasada en $\pi/2$ rad respecto a *q*. (siguiente gráfica)

5 – Circuito L C sin generador



- Podemos calcular la energía total, que será eléctrica y magnética:

$$U_{el} = \frac{1}{2} q V_C = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} \mathrm{Cos}^2\, wt$$

$$U_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L w^2 q_0^2\, \mathrm{Sen}^2\, w t$$

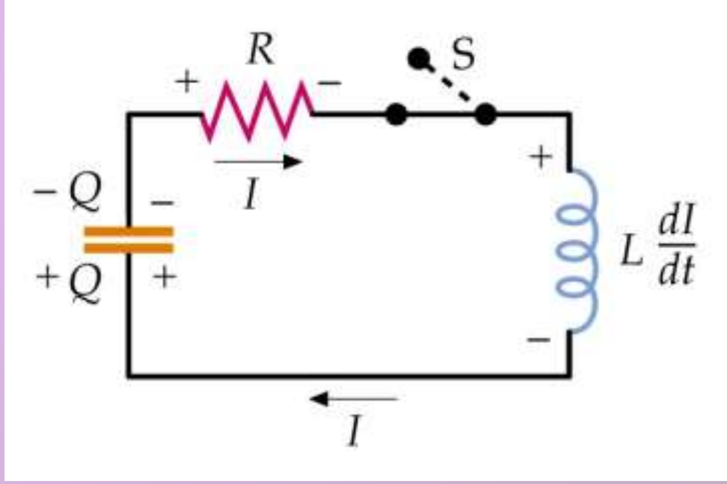
$$U_T = \frac{q_0^2}{2C} \mathrm{Cos}^2\, wt + \frac{q_0^2}{2} L \frac{1}{LC} \mathrm{Sen}^2\, wt \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_T = \frac{q_0^2}{2C}}$$

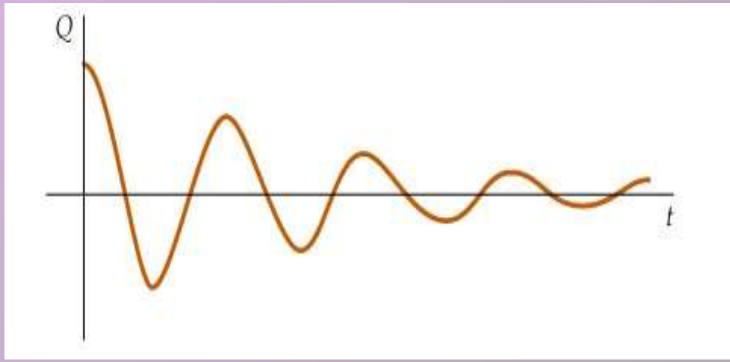
6 – Circuito R L C sin generador

- Con carga inicial en C tenemos:

$$-L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}$$

$$-L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$





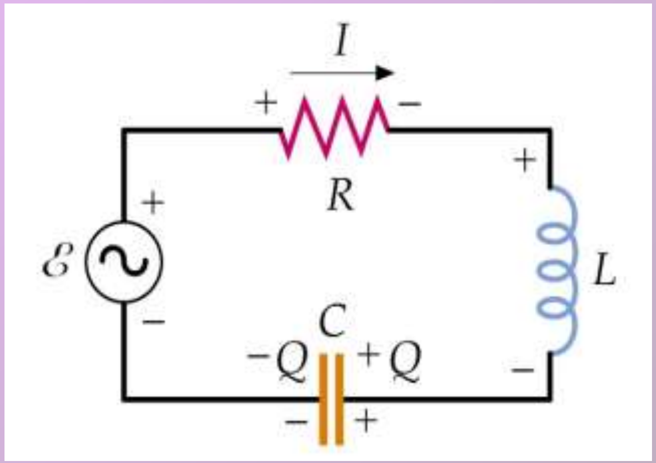
- Esta ec. es similar a la de un oscilador armónico amortiguado. La R es el elemento que disipa la energía inicial del condensador.

7 – Circuito R L C serie

- Circuito de c.a. con los tres elementos y fuente de tensión en serie:

$$\varepsilon_{max}\,\mathrm{Cos}\,wt - L\frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon_{max}\,\mathrm{Cos}\,wt$$



- Esta ec. es similar a la de un oscilador armónico forzado con amortigua-miento. La solución completa tiene parte transitoria y parte estacionaria. Esta última tiene la forma:

$$\boxed{I = I_{max}\,\mathrm{Cos}(wt - \delta)}$$

$$\mathrm{tag}\,\delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Simulación

7 – Circuito R L C serie

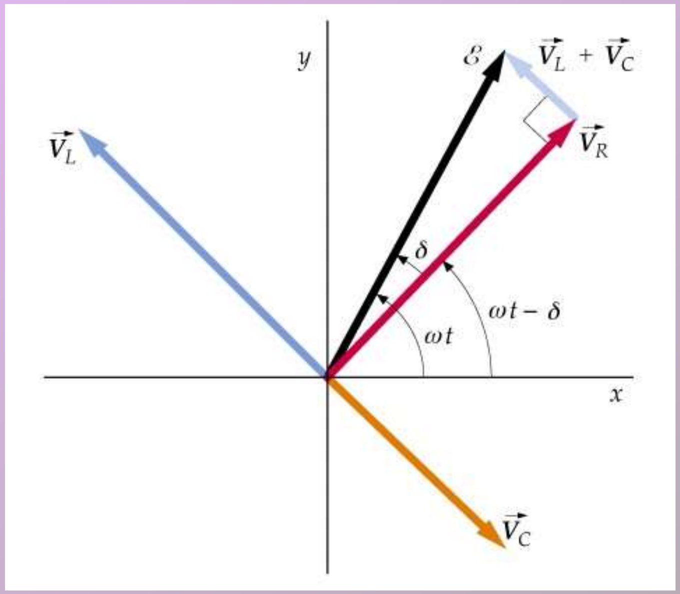
- Se define la Impedancia del circuito: $\boxed{Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}$

- Las caídas de tensión en cada elemento del circuito en un instante dado serán:

$$V_R = I\,R = I_{max}\,R\,Cos(wt-\delta)$$

$$V_L = I\,X_L = I_{max}\,Lw\,Cos(wt-\delta+\frac{\pi}{2})$$

$$V_C = I\,X_C = I_{max}\,\frac{1}{Cw}\,Cos(wt-\delta-\frac{\pi}{2})$$



- La caída de tensión total, ε, será la suma vectorial de los vectores anteriores, representados en el diagrama de fasores.

$$tag\,\delta = \frac{|V_L - V_C|}{|V_R|}$$

7 – Circuito R L C serie

- Podemos obtener el valor máximo de esa tensión ε:

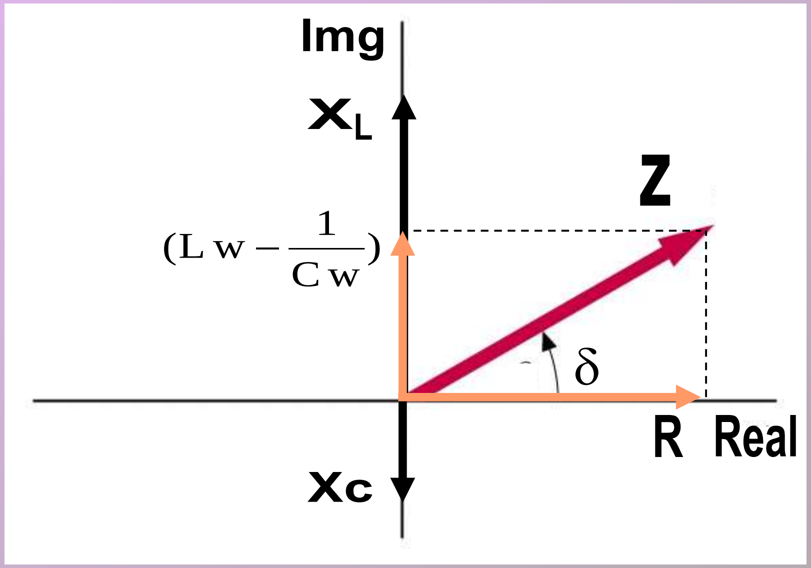
$$\varepsilon_{max} = \sqrt{V_{R\,max}^2 + (V_{L\,max} - V_{C\,max})^2} = I_{max}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{max}\,Z$$

- También para valores eficaces: $\boxed{\varepsilon_{ef} = I_{ef}\,Z}$

- La impedancia se puede representar en un diagrama de números complejos:

$$Z = R + (X_L - X_C)\,i$$

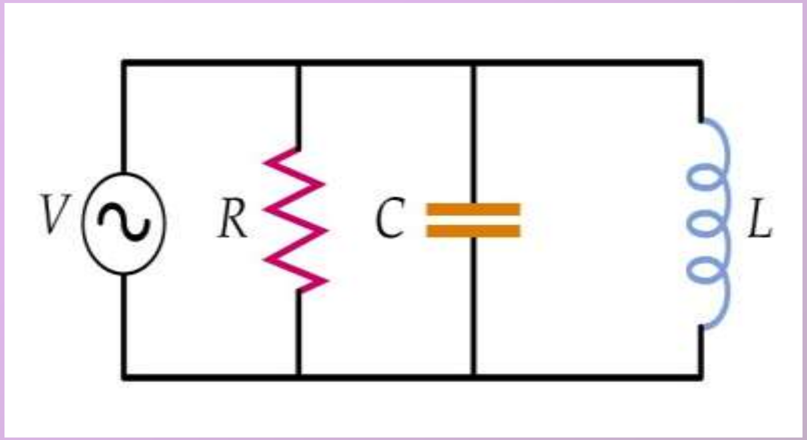
$$\mathrm{Cos}\,\delta = \frac{R}{Z} \qquad \mathrm{Sen}\,\delta = \frac{X_L - X_C}{Z}$$

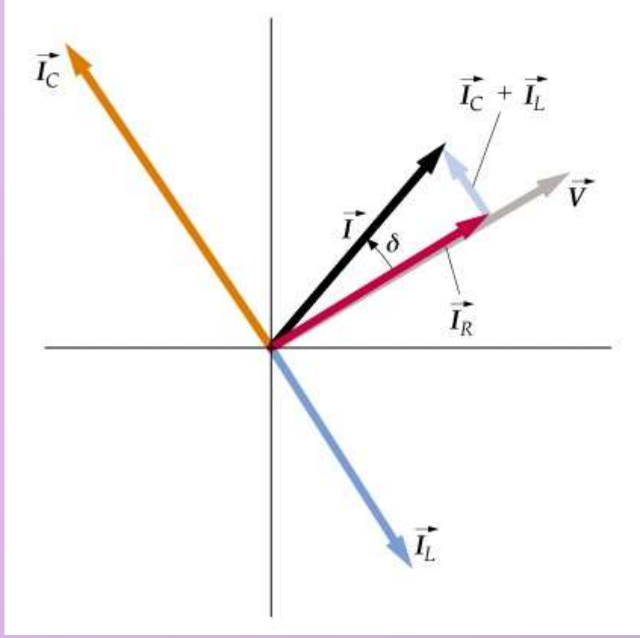


8 – Circuito R L C paralelo

- En este circuito la intensidad generada en la fuente se reparte en los tres elementos:

$$I_T = I_R + I_C + I_L$$





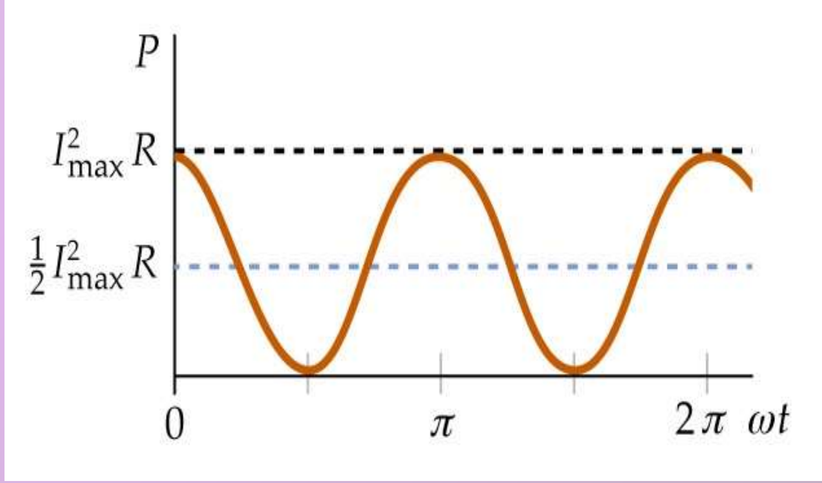
$$I_R = \frac{\varepsilon}{R} \qquad I_C = \frac{\varepsilon}{X_C} \qquad I_L = \frac{\varepsilon}{X_L}$$

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$$

Simulación

9- Potencia en circuitos de c.a.



- La Potencia consumida en una R:

$$P = I^2 R = I^2_{max} R \,Cos^2 (w\,t - \delta)$$

- Integrando se obtenía:

$$P_{media} = \frac{1}{2} I^2_{max} R$$

$$V_R = I_{max} R = I_{max} Z \frac{R}{Z} = \varepsilon_{max} \,Cos\,\delta$$

$$P_{media} = \frac{1}{2} I_{max} \varepsilon_{max} \,Cos\,\delta = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_{max}}{\sqrt{2}} Cos\,\delta \Rightarrow \boxed{P_{media} = I_{ef}\, \varepsilon_{ef} \,Cos\,\delta}$$

- El Coseno del desfase se denomina factor de potencia.

9- Potencia en circuitos de c.a.

- La Potencia será máxima cuando cos δ sea 1, por tanto δ = 0.

$\Rightarrow$ $X_L - X_C = 0$ $\Rightarrow$ $Z = R$ — Impedancia mínima.

- En esta situación se produce el fenómeno de Resonancia.

$$X_L = X_C \Rightarrow L\,w = \frac{1}{C\,w} \Rightarrow \boxed{w_R = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}}$$

Frecuencia de resonancia.

- Si R = 0, cos δ = 0, potencia nula.