Aproximación de funciones derivables mediante polinomios: Fórmulas de Taylor y Mac-Laurin

1. Expresa el polinomio $P(x)=x^4-3x^2+5x-1$ en potencias de (x-1)

Hay que determinar los coeficientes a, b, c, d y e que cumplan:

$P(x)=x^4-3x^2+5x-1=a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$

Derivando 4 veces la igualdad anterior, tenemos:

$P'(x)=4x^3-6x+5=4a(x-1)^3+3b(x-1)^2+2c(x-1)+d$
$P''(x)=12x^2-6=12a(x-1)^2+6b(x-1)+2c$
$P'''(x)=24x=24a(x-1)+6b$
$P^{IV}(x)=24=24a$

De esta última se tiene:

$$a=\frac{24}{24}=1$$

Sustituyendo en la tercera:

$$24x=24x-24+6b\Rightarrow 6b-24=0\Rightarrow b=\frac{24}{6}=4$$

Y de la segunda:

$$12x^2-6=12(x-1)^2+24(x-1)+2c\Rightarrow 12x^2-6=12x^2-24x+12+24x-4+2c\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12x^2-6=12x^2-12+2c\Rightarrow 2c-12=-6\Rightarrow c=\frac{-6+12}{2}=3$$

Y en la primera:

$$4x^3-6x+5=4(x-1)^3+12(x-1)^2+6(x-1)+d=$$
$$=4x^3-12x^2+12x-4+12x^2-24x+12+6x-6+d\Rightarrow 4x^3-6x+5=4x^3-6x+2+d\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2+d=5\Rightarrow d=5-2=3$$

Finalmente, sustituyendo en el polinomio inicial:

$X^4-3x^2+5x-1=(x-1)^4+4(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+e=x^4-4x^3+6x^2-4x+1+4x^3-12x^2+12x-4+3x^2-$
$6x+3+3x-$
$3+e\Rightarrow x^4-3x^2+5x-1=x^4-3x^2+5x-3+e\Rightarrow -3+e=-1\Rightarrow e=-1+3=2$

Y, con todo ello, la expresión pedida es:

$P(x)=(x-1)^4+4(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+2$

2. Expresa el polinomio $Q(x) = x^5$ en potencias de (x + 1)

En lugar de proceder como en el ejercicio anterior, podemos recurrir al polinomio de Taylor (cosa que por otra parte también podíamos haber hecho allí). Derivando 5 veces, tenemos:

$$Q(x) = x^5 \Rightarrow Q(-1) = -1$$
$$Q'(x) = 5x^4 \Rightarrow Q'(-1) = 5$$
$$Q''(x) = 20x^3 \Rightarrow Q''(-1) = -20$$
$$Q'''(x) = 60x^2 \Rightarrow Q'''(-1) = 60$$
$$Q^{IV}(x) = 120x \Rightarrow Q^{IV}(-1) = -120$$
$$Q^{V}(x) = 120 \Rightarrow Q^{V}(-1) = 120$$

Recordando que el polinomio de Taylor, hasta el orden n, es:

$$Q(x) = Q(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{Q^{i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Para a=-1 y usando los resultados anteriores tenemos:

$$Q(x) = Q(-1) + \frac{Q'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{Q''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{Q'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{Q^{IV}(-1)}{4!}(x+1)^4 +$$
$$+ \frac{Q^{v}(-1)}{5!}(x+1)^5 = -1 + 5(x+1) - 10(x+1)^2 + 10(x+1)^3 - 5(x+1)^4 + (x+1)^5$$

3. **Expresa el polinomio R (x) = 2 (x + 1)^4- 3 (x + 1)^2 + 6 en potencias de (x – 1)**

Derivemos hasta el 6º orden:

$$R(x) = 2(x+1)^4 - 3(x+1)^6 + 6 \Rightarrow R(1) = 2^5 - 3 \cdot 2^6 + 6 = 32 - 192 + 6 = -154$$
$$R'(x) = 8(x+1)^3 - 18(x+1)^5 \Rightarrow R'(1) = 64 - 576 = -212$$
$$R''(x) = 24(x+1)^2 - 90(x+1)^4 \Rightarrow R''(1) = 96 - 1440 = -1344$$
$$R'''(x) = 48(x+1) - 360(x+1)^3 \Rightarrow R'''(1) = 96 - 2880 = -2784$$
$$R^{iv}(x) = 48 - 1080(x+1)^2 \Rightarrow R^{iv}(1) = 48 - 4320 = -4272$$
$$R^{v}(x) = -2160(x+1) \Rightarrow R^{v}(1) = -4320$$
$$R^{vi}(x) = -2160 \Rightarrow R^{vi}(1) = -2160$$

Y aplicando el polinomio de Taylor con a = 1 queda, después de simplificar:

$$R(x) = 154 - 212(x-1) - 672(x-1)^2 - 464(x-1)^3 - 178(x-1)^4 - 36(x-1)^5 - 3(x-1)^6$$

4. **Halla el error cometido en los ejercicios 1 y 2 si aproximamos los polinomios P y Q por uno de grado dos y calcula P(2) y Q(0)**

La aproximación de P y Q por un polinomio de grado 2 es:

P(x)=3 (x-1)^2+3(x-1)+2

Q(x)=-1+5 (x + 1)-10(x +1)^2

Tomaremos como error cometido el resto de Lagrange que se puede expresar como:

$$T_n(x) = \frac{f^{\,n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad a < x_0 < x$$

Para P(x) con n = 2, a =1 queda:

$$e_p(x) = \frac{P'''(x_0)}{3!}(x-1)^3 = \frac{24x_0}{6}(x-1)^3 = 4x_0(x-1)^3 \qquad con \qquad 1 < x_0 < x$$

Para Q(x) con n = 2, a = -1 queda:

$$e_q(x) = \frac{Q'''(x_0)}{3!}(x+1)^3 = \frac{60x_0^2}{6}(x+1)^3 = 10x_0^2(x+1)^3 \qquad con \qquad -1 < x_0 < x$$

Los valores de ambas aproximaciones para x = 2 y x = 0 respectivamente son:

$$P(2) = 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 2 = 8 \qquad y \qquad e_p(2) < 4(2-1)^3 = 4 \qquad si \qquad x_0 \to 1$$
$$Q(0) = -1 + 5(0+1) - 10(0+1)^2 = -6 \qquad y \qquad e_q < 10(0+1)^3 = 10 \qquad si \qquad x_0 \to -1$$

5. Desarrolla según Mac-Laurin las siguientes funciones:

$$a) \qquad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad b) \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

El desarrollo en serie de una función f(x), hasta el orden n, por la fórmula de Mac-Laurin es, en general:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{\,i)}(0)}{i!} x^i$$

a) a) Calculemos las derivadas sucesivas de f(x):

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\Rightarrow f''(0)=1$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\Rightarrow f'''(0)=0$$

$y \quad en \quad general:$

$$f^{n)}(x)=\begin{cases} f(x) & si \quad n \quad es \quad par \\ f'(x) & si \quad n \quad es \quad impar \end{cases}$$

Sólo existirán, pues, en el desarrollo los término de exponente par y tendremos, hasta el 4 orden:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(x)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+\frac{f^{iv}(0)}{4!}x^{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$$

$$1+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{4}}{24}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b) b) Para la función g(x) tenemos, derivando sucesivamente que:

$$g^{n)}(x)=\begin{cases} g(x) & si \quad n \quad es \quad par \\ g'(x) & n \quad impar \end{cases}$$

y como:

g(0)=0 g'(0)=1

El desarrollo sólo tendrá términos de orden impar y será:

$$g(x)=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\frac{g''(0)}{2!}x^{2}+\frac{g'''(0)}{3!}x^{3}+\frac{g^{iv}(0)}{4!}x^{4}+\frac{g^{v}(0)}{5!}x^{5}+\ldots\ldots\ldots\ldots=$$

$$x+\frac{x^{3}}{6}+\frac{x^{5}}{120}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. Desarrolla por Mac-Laurin

$$f(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$$

Derivemos sucesivamente:

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^{2})^{2}}\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(x)=\frac{-2(1+x^{2})^{2}+2x\cdot 2(1+x^{2})\cdot 2x}{(1+x^{2})^{4}}=\frac{6x^{2}-2}{(1+x^{2})^{3}}\Rightarrow f''(0)=\frac{-2}{1}=-2$$

$$f'''(x)=\frac{12x(1+x^2)^3-(6x^2-2)\cdot 3(1+x^2)^2\cdot 2x}{(1+x^2)^6}=\frac{12x+12x^2-36x^3+12x}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{24x+12x^2-36x^3}{(1+x^2)^4}\Rightarrow f'''(0)=0$$

$$f^{iv}(x)=\frac{(24+24x-108x^2)(1+x^2)^4-(24x+12x^2-36x^3)\cdot 4(1+x^2)^3\cdot 2x}{(1+x^2)^8}=$$

$$=\frac{(24+24x-108x^2)(1+x^2)-8x(24x+12x^2-36x^3)}{(1+x^2)^5}\rightarrow f^{iv}(0)=\frac{24}{1}=24$$

Y el desarrollo es:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4+..................=$$

$$=1-x^2+x^4+..................$$

7. Halla la derivada n-ésima de la función y = (2 + x) e^{x+1}. Indica si es posible desallorrarla por la fórmula de Taylor en x = -1 y, si es así, da la fórmula del término complementario según Lagrange

Se tiene:

$$y'=e^{x+1}+(2+x)e^{x+1}=e^{x+1}(3+x)\Rightarrow y'(-1)=2$$

$$y''=e^{x+1}(3+x)+e^{x+1}=e^{x+1}(4+x)\Rightarrow y''(-1)=3$$

....

$$y^{n)}=e^{x+1}(n+2+x)\Rightarrow y^{n)}(-1)=n+1$$

Y el desarrollo de Taylor en x = -1 sería:

$$f(x)=1+\frac{y'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{y''(-1)}{2!}(x+1)^2+......+\frac{y^{n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+T_n(x)=$$

$$=1+2(x+1)+\frac{3}{2}(x+1)^2+......+\frac{n+1}{n!}(x+1)^n+T_n(x)$$

Siendo el término complementario de Lagrange:

$$T_n(x)=\frac{f^{n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}=\frac{e^{x+1}(n+3+x_0)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$ con $-1<x_0<x$

8. Calcula el valor de $\sqrt{10}$ con error menor que una centésima

Sea la función $f(x)=\sqrt{x}$ que vamos a desarrollar en serie de Taylor en las proximidades del punto 9 (valor entero más próximo por defecto al 10 cuya raíz nos han pedido, que tiene raíz exacta).

Derivando sucesivamente hasta el segundo orden:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{6}$$

$$f''(x) = \frac{-2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \Rightarrow f''(9) = -\frac{1}{108}$$

Y el desarrollo de Taylor es:

$$f(x) = f(9) + \frac{f'(9)}{1!}(x-9) + \frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2 + T_2(x) = 3 + \frac{x-9}{6} - \frac{(x-9)^2}{216} + T_2(x)$$

Tomando sólo aproximación lineal (los dos primeros sumandos) queda:

$$f(x) = \sqrt{x} = 3 + \frac{x-9}{6} + T_1(x) \Rightarrow f(10) = \sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8x_0\sqrt{x_0}}(x-9)^2$$

Donde hemos tomado como error el término complementario de Lagrange de orden 1 con $9<x_0<x$.

Podemos tomar como valor aproximado de raíz de 10 los dos primeros sumandos del desarrollo anterior, esto es:

$$\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} \approx 3{,}1\widehat{6}$$

Y la cota de error será:

$$T_1(10) = \left| -\frac{1}{8x_0\sqrt{x_0}}(10-9)^2 \right| < \frac{1}{8 \cdot 9\sqrt{9}} = \frac{1}{216} = 0{,}004 < 0{,}01$$

9. Halla el valor de $\sqrt[3]{7}$ dando una cota del error cometido

Desarrollemos en serie de Taylor la función $f(x) = \sqrt[3]{7}$ en las proximidades del punto x = 8 (valor más próximo a 7 con raíz cúbica exacta). Se tiene:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(8) = 2$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f'(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{12}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f''(8)=-\frac{2}{9\cdot 8\sqrt[3]{64}}=-\frac{1}{144}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{11}{3}}=\frac{10}{27\sqrt[3]{x^{11}}}=\frac{10}{27x^3\sqrt[3]{x^2}}$$

Con lo que el desarrollo de Taylor hasta el término cuadrático en x=8 sería:

$$f(x)=2+\frac{x-8}{12}-\frac{(x-8)^2}{288}$$

Que para x = 7 es:

$$f(7)=\sqrt[3]{7}=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}=\frac{576-24-1}{288}=\frac{551}{288}\approx 1{,}913$$

Siendo la cota de error (en valor absoluto): la determinada por el término complementario de Lagrange de orden 2 con x = 8, es decir:

$$T_2(x)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-8)^3=\left|\frac{10}{162x_0^3\sqrt[3]{x_0^2}}(-1)^3\right|<\frac{10}{162\cdot 8^3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{10}{162\cdot 512\cdot 4}=\frac{10}{331776}=$$
$$=0{,}00003<0{,}0001$$

10. Halla el valor de $\sqrt[3]{7}$ dando una cota del error cometido.

Desarrollemos en serie de Taylor la función $f(x)=\sqrt[3]{7}$ en las proximidades del punto x = 8 (valor más próximo a 7 con raíz cúbica exacta). Se tiene:

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\Rightarrow f(8)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f'(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{12}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow f''(8)=-\frac{2}{9\cdot 8\sqrt[3]{64}}=-\frac{1}{144}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{11}{3}}=\frac{10}{27\sqrt[3]{x^{11}}}=\frac{10}{27x^3\sqrt[3]{x^2}}$$

Con lo que el desarrollo de Taylor hasta el término cuadrático en x=8 sería:

$$f(x)=2+\frac{x-8}{12}-\frac{(x-8)^2}{288}$$

Que para x = 7 es:

$$f(7)=\sqrt[3]{7}=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}=\frac{576-24-1}{288}=\frac{551}{288}\approx 1{,}913$$

Siendo la cota de error (en valor absoluto): la determinada por el término complementario de Lagrange de orden 2 con x=8, es decir:

$$T_2(x)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-8)^3=\left|\frac{10}{162x_0^3\sqrt[3]{x_0^2}}(-1)^3\right|<\frac{10}{162\cdot 8^3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{10}{162\cdot 512\cdot 4}=\frac{10}{331776}=$$
$$=0{,}00003<0{,}0001$$

11. Demuestra que se puede sustituir x por sen x para x < 0,31 rad., con un error menor de 5 milésimas.

Efectuemos el desarrollo en serie de Mac-Laurin hasta el orden 2 y calculemos la cota del error cometido por el término complementario de Lagrange:

$$f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x$$

Entonces:

$$f(x)=x+T_2(x)$$

Donde se ve que para valores pequeños de x (en las proximidades de cero), se puede sustituir x por sen x. La cota del error cometido para x < 0,31 radianes. Es:

$$T_2(x)=\frac{f'''(0)}{3!}x^3=\left|\frac{-\cos x}{6}x^3\right|<\frac{x^3}{6}\Rightarrow para \qquad x<0{,}31\Rightarrow T_2(x)<\frac{0{,}31^3}{6}=0{,}0049<0{,}005$$

12. ¿Para qué valor de k la expresión $x^{-1}(e^{kx}-e^{x}-x)$ tiende a un límite finito cuando x tiende a cero? ¿Cuál es el valor de ese límite?

Desarrollemos en serie de Mac-Laurin las funciones e^{kx} y e^{x}:

$$f(x)=e^{kx} \Rightarrow f(0)=1$$
$$f'(x)=ke^{kx} \Rightarrow f'(0)=k$$
$$f''(x)=k^2e^{kx} \Rightarrow f''(0)=k^2$$
$$-----------------$$
$$f^{n)}(x)=k^ne^{kx} \Rightarrow f^{n)}(0)=k^n$$

$$g(x)=e^x \Rightarrow g(0)=1$$
$$g'(x)=e^x \Rightarrow g'(0)=1$$
$$------------------$$
$$g^{n)}(x)=e^x \Rightarrow g^{n)}(0)=1$$

Y el límite pedido es, cambiando esas dos funciones por sus desarrollos en serie:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(e^{kx}-e^x-x\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(1+kx+\frac{k^2}{2}x^2+...+\frac{k^n}{n!}x^n-1-x-\frac{1}{2}x^2-...-\frac{1}{n!}x^n-x\right)\right]=$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+k+\frac{k^2x}{2}+...+\frac{k^nx^{n-1}}{n!}-\frac{1}{x}-1-\frac{x}{2}-...-\frac{x^{n-1}}{n!}-1\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[k-2+\left(k^2-1\right)\frac{x}{2}+....+\left(k^n-1\right)\frac{x^{n-1}}{n!}\right]=k-2$$

que es finito si k es finito.

13. Calcular el sen 0,2 con cuatro decimales. (El ángulo está dado en radianes)

Desarrollaremos en serie de Mac-Laurin la función sen x buscando que el término complementario sea menor que una diezmilésima (para que tenga 4 decimales exactos).

$$f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(x)=-\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f'''(0)=-1$$
$$f^{iv}(x)=\operatorname{sen} x$$

Con lo que el desarrollo será, hasta el término cúbico:

$$\operatorname{sen} x = x-\frac{x^3}{6}+T_3(x)$$

Y para x = 0,2 radianes:

$$\operatorname{sen} 0{,}2 = 0{,}2-\frac{0{,}2^3}{6}=0{,}1987$$

Con una cota de error de:

$$T_3(x) = \frac{x^4}{24} < \frac{0{,}2^4}{24} = 0{,}000001$$

14. Calcular $e^{0,2}$ con error menor que 10^{-4}

El desarrollo en serie de Mac-Laurin de $f(x)=e^x$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \Rightarrow e^{0,2} = 1 + 0{,}2 + \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{6} = 1{,}2 + 0{,}02 + 0{,}0013 = 1{,}2213$$

Y la cota de error es:

$$T_3(x) = \frac{e^{x_0}}{24} x^4 < \frac{e^{0,2}}{24} \cdot x^4 < \frac{0{,}2^4}{24} = 0{,}000067 < 10^{-4}$$

Problemas Propuestos

Problema 1 Calcular el coeficiente de x^n en el desarrollo de Taylor de la función definida por : f(x) = log (cosx) en un entorno de a = 0.

Problema 2 Escribe la fórmula de Taylor de orden 5 alrededor del origen de la función f(x) = tg x. Encuentre una expresión para el error cometido al aproximar la función mediante el polinomio anterior.

Problema 3 Escribe la fórmula de Taylor de orden n alrededor del punto que se indica, de las siguientes funciones:

1. f(x) = 1/x en a = -1,
2. f(x) = x e^x en a = 0,
3. f(x) = $(1 + e^x)^2$ en a = 0.

Problema 4 Aproximar la función f(x) = lg (1+cos x*)* alrededor del origen mediante un polinomio de grado dos. Encontrar también una expresión para el término de error (Resto de Taylor).

Problema 5 ¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de Mac-Laurin de la función f(x) = e^x para obtener un polinomio que la aproxime en [-1,1] con tres cifras decimales exactas?

Problema 6 ¿Cuántos términos hay que tomar en la fórmula de Mac-Laurin de la función f(x) = sen x para obtener un polinomio que la aproxime en [--1 , 1] con cuatro cifras decimales exactas?

Problema 7 Calcular aproximadamente el valor de $(1.1)^{1/3}$ mediante el polinomio de Taylor de grado 3 de alguna función. Estimar el error cometido.

Problema 8

1. Calcula aproximadamente el valor de sen 0.25 utilizando un polinomio de Mac-Laurin de grado 3. ¿Cuál es el error cometido?
2. Aproxima $(28)^{1/3}$ a través de la serie de Taylor en potencias de (x - 27) hasta el segundo grado. Evalúa el error cometido.

Problema 9

1. Aproxima la función $f(x) = \cos x + e^{x}$ mediante un polinomio de tercer grado alrededor del origen.
2. Da una cota del error cometido cuando se utiliza la aplicación anterior para x en el intervalo [-1/4 , 1/4].

Problema 10 Sea $f(x) = 1 + x^3 \operatorname{sen} x$:

1. Hallar su polinomio de Taylor de orden 4 en el punto 0.
2. Decidir si f tiene en 0 un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión.