**Universidad de Jaén**
Departamento de Matemáticas
(Area de Álgebra)
Curso 2014/15

# PRÁCTICA Nº 10

## ESPACIOS VECTORIALES:

## Bases y coordenadas. Cambio de base.

En esta práctica vamos a mostrar la utilidad de las herramientas de manipulación de vectores y matrices en algunos aspectos de los espacios vectoriales.

### 1. BASES Y COORDENADAS.

Sabemos que una base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independiente y que además es un sistema de generadores de dicho espacio. Durante esta práctica tomaremos como V el espacio vectorial real tridimensional, es decir, $R^3$ cuyos elementos son ternas (x, y, z) con cada una de sus componentes en R. Como ejemplo consideremos la siguiente base de $R^3$:

$$B_1 = \{(1,0,1),(-1,1,0),(0,1,-1)\}$$

Las bases las introducimos en Mathematica como matrices, es decir, como lista de listas siendo cada una de sus componentes uno de los vectores de la base:

*In[1]:=* **B1={{1,0,0},{-1,1,0},{0,1,-1}};**

Para probar si dichos vectores forman base de $R^3$ y como conocemos la dimensión del espacio que es 3, nos bastará con ver que son linealmente independientes, pues como sabemos tres vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión 3 forman base. Para ver que son linealmente independientes basta con calcular su determinante, si es distinto de cero forman base y si es cero son linealmente dependientes y no forman base.

*In[2]:=* **Det[B1]**

*Out[2]* = -1

Por tanto, $B_1$ es base de $R^3$.

Las coordenadas de un vector respecto de una base se pueden calcular mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. Consideremos el vector v de $R^3$ con coordenadas (4, 1, -2) respecto de la base canónica, veamos cuales son sus coordenadas respecto de la base $B_1$. Las coordenadas buscadas serán los números (x, y, z) tales que:

$$(4, 1, -2) = x\,(1, 0, 0) + y\,(-1, 1, 0) + z\,(0, 1, -1)$$

es decir, la solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes aquella cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base y cuyo vector de términos independientes es el vector v. En Mathematica:

*In[3]:=* **v = {4, 1, -2};**
**v1 = LinearSolve[Transpose[B1], v]**

*Out[3]* = {3,-1,2}

## 2. CAMBIO DE BASE.

Supongamos ahora que tenemos dos bases $B_1$ y $B_2$ de un espacio vectorial, nos proponemos encontrar la matriz del cambio de base $B_1$ a $B_2$, que nos permite calcular las coordenadas de cualquier vector respecto de $B_2$, conocidas las coordenadas de dicho vector respecto de $B_1$. Como sabemos la matriz del cambio de base es la matriz regular que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la primera base, $B_1$ respecto a la segunda base, $B_2$.

Como ejemplo consideremos la base $B_1$ del apartado anterior y una nueva base

$$B_2 = \{(1,0,-1),(2,1,0),(-1,1,1)\}$$

ambas base de $R^3$. Nos proponemos calcular las coordenadas del vector v del apartado anterior respecto de la nueva base y para ello usaremos el cambio de base. En primer lugar introducimos la nueva base en el Mathematica y comprobamos que realmente es base:

*In[4]:=* **B2={{1,0,-1},{2,1,0},{-1,1,1}};**
**Det[B2]**

*Out[4]* = -2

Teniendo en cuenta anterior la matriz del cambio de base de $B_1$ a $B_2$ se puede construir como sigue:

*In[5]:=* **P = Transpose[Table[LinearSolve[Transpose[B2],B1[[i]]],{i,1,3,1}]];**
**MatrixForm[P]**

*Out[5]=*

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Una vez construida la matriz del cambio de base es inmediato obtener las coordenadas del vector dado, basta con multiplicar dicha matriz por el vector:

*In[6]:=* **v2= P.v1**

*Out[6]=* {2,1,0}

Podemos comprobar que el cambio de base se ha realizado satisfactoriamente transformando ambos vectores a sus coordenadas respecto de la base canónica de $R^3$ para lo cual solo hay que sumar los productos de cada una de las componentes del vector v1 por el respectivo elemento de la base:

*In[7]:=* **Sum[v1[[i]]*B1[[i]],{i,1,3}] == Sum[v2[[i]]*B2[[i]],{i,1,3}]**

*Out[7]:=* True