Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Area de Álgebra)
Curso 2014/15

PRÁCTICA Nº 11

ESPACIOS VECTORIALES EUCLÍDEOS:

Proceso de ortonormalización (Gram-Schmidt)

En esta práctica vamos a ver como podemos calcular una base ortonormal de un espacio vectorial V a partir de una base cualquiera, para ello aplicaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. En primer lugar lo aplicaremos a un ejemplo en el que el producto escalar es el usual y posteriormente lo haremos para un producto escalar arbitrario.

1. MÉTODO DE GRAM-SCHMIDT.

Consideremos (V, <>) un espacio vectorial euclídeo y dada $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ una base de V, tratamos de construir una base ortogonal que representaremos por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, para ello se calcula:

$$
\begin{aligned}
& e_1 = u_1, \\
& e_2 = u_2 - \frac{< u_2, e_1 >}{\|e_1\|^2}.e_1 \\
& .... \\
& e_n = u_n - \frac{< u_n, e_1 >}{\|e_1\|^2}.e_1 - ... - \frac{< u_n, e_{n-1} >}{\|e_{n-1}\|^2}.e_{n-1}
\end{aligned}
$$

Si lo que queremos es una base ortonormal bastará con dividir cada vector por su norma.

2. EJEMPLO CON PRODUCTO ESCALAR USUAL. CASO PARTICULAR.

Consideremos R^3 con el producto escalar usual que como sabemos en Mathematica se denota por el punto entre dos vectores:

In[1]:= **a={-1,2,3};**
b={2,-1,2};
a.b

Out[1]= 2

Dada la base B = {(1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1)} vamos a calcular la base ortogonal asociada, para ello introducimos B en Mathematica y inicializamos Bo la base ortogonal como una lista de ceros:

In[2]:= **B={{1,1,1},{1,-1,0},{1,0,-1}};**
Bo=Table[0,{i,1,3}];

Teniendo en cuenta el método de Gram-Schmidt se tiene:

In[3]:= **Bo[[1]] = B[[1]];**
Bo[[2]] = B[[2]] – ((B[[2]].Bo[[1]])/(Bo[[1]].Bo[[1]]))*Bo[[1]];
Bo[[3]] = B[[3]] – ((B[[3]].Bo[[1]])/(Bo[[1]].Bo[[1]]))*Bo[[1]] – ((B[[3]].Bo[[2]])/(Bo[[2]].Bo[[2]]))*Bo[[2]];
Print[Bo]

Out[3]= {{1, 1, 1}, {1, -1, 0}, {1/2, 1/2, -1}}

Todo esto lo podemos reunir para definir un nuevo comando que nos calcule la base ortogonal asociada a una base cualquiera mediante la orden Module:

In[4]:= **Bortog[B_]:= Module[{n, e},**
n=Length[B];
e=Table[0,{i,1,n}];
For[i=1, i<=n, i = i+1, If[i<=1, e[[i]] = B[[i]], e[[i]] = B[[i]]-
Sum[((B[[i]].e[[j]])/(e[[j]].e[[j]]))*e[[j]],{j,1,i-1}]]];
Print[“La base ortogonal es ”, e]]

In[5]:= **Bortog[B]**

Out[5]= La base ortogonal es `{{1, 1, 1}, {1, -1, 0}, {1/2, 1/2, -1}}`

3. EJEMPLO CON PRODUCTO ESCALAR NO USUAL. CASO GENERAL.

Consideremos en R^4 el producto escalar cuya expresión respecto de la base canónica viene dada por:

$<(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)> = 2 x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 4 x_3 y_3 + 2 x_4 y_4 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_4 + x_4 y_3$

En primer lugar vamos a calcular la matriz asociada a dicho producto escalar (matriz de Gram) respecto de la base canónica B={ e_1, e_2, e_3, e_4}, para ello tenemos que calcular cada uno de los coeficientes $a_{ij} = <e_i, e_j>$. Para ello primero introducimos la expresión del producto escalar y la base canónica:

In[6]:= **p[{x1_,x2_,x3_,x4_},{y1_,y2_,y3_,y4_}]:=2 x1 y1 + 2 x2 y2 + 4 x3 y3 + 2 x4 y4 + x1 y3 + x3 y1 + x2 y3 + x3 y2 + x3 y4 + x4 y3;**
Bc=IdentityMatrix[4];

Observar que al definir el producto escalar p, cada uno de sus dos argumentos son vectores de 4 coordenadas y cada una de estas coordenadas son variables. Teniendo en cuenta lo anterior vamos a calcular la matriz de Gram:

In[7]:= **A=Table[p[Bc[[i]], Bc[[j]]], {i,1,4,1},{j,1,4,1}];**
MatrixForm[A]

Out[7]=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Utilizando dicha matriz sabemos que el producto escalar de x por y es

$$<x, y> = x^t A y,$$

y la norma de un vector x es

$$\|x\| = \sqrt{x^t A x}$$

Dada la base canónica Bc y teniendo en cuenta el método de Gram-Schmidt vamos a calcular la base ortogonal asociada a Bc con este producto escalar:

In[8]:= **Bo = Table[0,{i,1,4}];**

Bo[[1]] = Bc[[1]];
Bo[[2]] = Bc[[2]] – (Bc[[2]].A.Bo[[1]])/(Bo[[1]].A.Bo[[1]])*Bo[[1]];
Bo[[3]] = Bc[[3]] – ((Bc[[3]].A.Bo[[1]])/(Bo[[1]].A.Bo[[1]]))*Bo[[1]] – ((Bc[[3]].A.Bo[[2]])/(Bo[[2]].A.Bo[[2]]))*Bo[[2]];

Bo[[4]] = Bc[[4]] – ((Bc[[4]].A.Bo[[1]])/(Bo[[1]].A.Bo[[1]]))*Bo[[1]] – ((Bc[[4]].A.Bo[[2]])/(Bo[[2]].A.Bo[[2]]))*Bo[[2]] – ((Bc[[4]].A.Bo[[3]])/(Bo[[3]].A.Bo[[3]]))*Bo[[3]];
Print[Bo]

Out[8] = {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-1/2, -1/2, 1, 0}, {1/6, 1/6,-1/3, 1}}

Para comprobarlo solo necesitamos calcular la matriz de Gram para la base anterior, si dicha matriz es diagonal, entonces Bo será una base ortogonal y si la matriz de Gram que se obtiene es la identidad, entonces Bo es una base ortonormal.

*In[9]:=***Table[Bo[[i]].A.Bo[[j]],{i,1,4,1},{j,1,4,1}]//MatrixForm**

Out[9]:=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Todo esto lo podemos reunir para definir un nuevo comando que nos calcule la base ortogonal asociada a una base cualquiera mediante la orden Module:

In[10]:= **Bortog2[B_]:= Module[{n, e},**
n=Length[B];
e=Table[0,{i,1,n}];
For[i=1, i<=n, i = i+1, If[i<=1, e[[i]] = B[[i]], e[[i]] = B[[i]]-
Sum[((B[[i]].A.e[[j]])/(e[[j]].A.e[[j]]))*e[[j]],{j,1,i-1}]]];
Print["La base ortogonal es ", e];
Print["La base ortonormal es",
Table[e[[i]]/Sqrt[e[[i]].A.e[[i]]],{i,1,n}]]]

In[11]:= **Bortog2[Bc]**

Out[11] = La base ortogonal es
{{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-1, -1, 1, 0}, {1/4, 1/4,-1/4, 1}}

La base ortonormal es

$$\{\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\}, \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\}, \{\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\}, \{\frac{1}{2\sqrt{15}}, \frac{1}{2\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\}\}$$

Por último comentar que Mathematica tiene un paquete en el cual podemos obtener directamente la base ortonormal, a dicho paquete podemos acceder mediante la orden:

In[12]:= **<<LinearAlgebra`Orthogonalization`**

Llamando pe(x, y) al producto escalar de dos vectores x e y, y usando la orden GramSchmidt[Base,InnerProduct->pe] obtendremos la base ortonormal buscada. Si el producto escalar es el usual solo tendríamos que poner un argumento que sería la base:

In[13]:= **pe[x_,y_]:= x.A,y;**

In[14]:= **GramSchmidt[Bc,InnerProduct->pe]**

Out[14]=

$$\{\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\}, \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\}, \{\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\}, \{\frac{1}{2\sqrt{15}}, \frac{1}{2\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\}\}$$