UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

EXAMEN DE ÁLGEBRA

INGENIERÍA TÉCNICA INFORMÁTICA DE GESTIÓN.

Convocatoria de SEPTIEMBRE de 2012

Nombre:____DNI:______________

CONVALIDADOS:

GRUPOS Y POLINOMIOS	☐ SÍ. Nota____ ☐ NO	GRAFOS	☐ SÍ. Nota____ ☐ NO	PRÁCTICAS	☐ Apto ☐ No apto

1. (10 puntos). Factorizar, calcular las raíces y sus multiplicidades de $p(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 1$ en $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

2. (10 puntos). Consideramos las permutaciones de S_6: $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $\beta = (2 \quad 3 \quad 1)$.

a) Calcular: $\sigma = \alpha \circ \beta$.
b) Determinar el número de inversiones, la paridad y la signatura de σ.
c) Descomponer σ en producto de ciclos disjuntos y σ en producto trasposiciones.
d) Calcular σ^{600}.

3. (10 puntos) Sea G el grafo cuya matriz de incidencia es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiar si G es completo, plano, de Euler, de Hamilton, conexo, 5-coloreable. Enunciar el teorema del número de caminos y las consecuencias necesarias. Utilizarlo para determinar el número de caminos de longitud 2 entre el primer y el último vértice.

4. (15 puntos) Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial euclídeo de dimensión 4 con producto escalar es:

$$\langle A, D\rangle = \mathrm{tr}(AD^t)$$

a) Calcular la matriz de Gram respecto de la base $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.
b) ¿Son $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ortogonales?
c) Expresar en función del coseno, el ángulo que forman $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
d) ¿Es B unitaria? En caso negativo, transformarla en una base unitaria.

5. (15 puntos). Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ y sea U el subconjunto de V de todas las matrices triangulares superiores de traza cero.

a) ¿Es U un subespacio vectorial? En caso afirmativo, calcular una base, sus ecuaciones paramétricas e implícitas. Calcular un suplementario.
b) Sea f: $U \longrightarrow U$ el endomorfismo definido por: $f(\mathrm{C}) = 2\mathrm{C}$ para toda matriz C de U.
   i. Calcular la expresión matricial de f respecto de la base de U calculada en el apartado a).
   ii. Calcular $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   iii. Clasificar f.
   iv. Estudiar si f es diagonalizable por semejanza.

Nota: Enunciar e incluir en cada pregunta la teoría que usemos. Para aprobar el examen es preciso obtener un mínimo de 2 puntos en las preguntas 1, 2 y 3, y de 3 puntos en la 4 y 5.