UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

EXAMEN DE ÁLGEBRA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
Convocatoria de SEPTIEMBRE de 2011

Apellidos, Nombre:______________________________________DNI:___________

CONVALIDADOS:
POLINOMIOS___________GRUPOS__________GRAFOS_________PRÁCTICAS___________

1. (10 puntos). Dados los polinomios:

$$p(x) = 5 - 25x - 5x^3 + 25x^4 \quad \text{y} \quad q(x) = -25 + 125x - 25x^2 + 125x^3$$

Factorizarlos y calcular sus raíces, máximo común divisor y mínimo común múltiplo en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

2. (10 puntos) Consideremos G, el grupo $M_2(\mathbb{R})$, y $A \in M_2(\mathbb{R})$, fija. Sea

$$H=\{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX=0\}$$

A) Demostrar que H es subgrupo de G ¿Es conmutativo?
B) Razonar para qué valores de A, H es el subgrupo impropio formado por el neutro.

3. (10 puntos)

A) Definir geodésica y distancia entre dos vértices. Enunciar el teorema del número de caminos y la consecuencia para el cálculo del número de geodésicas y distancia entre dos vértices.
B) Aplicar lo anterior a $K_{2,3}$ de la siguiente forma: fijar dos vértices cualesquiera no adyacentes y calcular el número de caminos de longitud dos, la distancia y el número de geodésicas entre ambos.
C) Razonar si $K_{2,3}$ es plano, árbol, completo, regular, dando las definiciones que aparecen.

4. (20 puntos) Sea $S = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,2,1)\} \subseteq (\mathbb{Z}_5)^3$, consideramos los subespacios vectoriales de $(\mathbb{Z}_5)^3$,
$U = L(S)$ y $W = L(\{(1,1,1)\})$.

A) Calcular dimensión y ecuaciones implícitas de $U \cap W$ y $U + W$
B) Calcular un subespacio suplementario de $U + W$.
C) Calcular, si es posible, un subespacio de $(\mathbb{Z}_5)^3$ tal que su suma con $U \cap W$ sea directa y distinta de $(\mathbb{Z}_5)^3$

5. (10 puntos) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, de dimensión 4. Calcular un endomorfismo f, en V, cuyo único valor propio sea el número complejo 1.

A) Calcular la matriz asociada a f respecto de una base de V.
B) Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen de f. ¿Es f un automorfismo?
C) Estudiar si f es diagonalizable por semejanza.

6. (10 puntos) Consideremos $V=\mathbb{R}^3$. Definir un producto escalar en V que verifique:

a) La base canónica no es ortonormal.
b) Sólo el primer vector de la base canónica es unitario.
c) Los dos primeros vectores de la base canónica no son ortogonales.
d) El primer y tercer vector de la base canónica forman un ángulo de 60º.

Calcular la expresión del producto escalar y calcular el producto escalar de los vectores (1,0,0) y (1,2,0)

Nota: Para aprobar el examen es preciso obtener un mínimo de 2 puntos en cada una de las preguntas