ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática)

CURSO 2018/19. Convocatoria Extraordinaria 2.

Apellidos y Nombre:_____________________________ DNI:_________ Teoría:__ Gr. Práct.:__

Evaluación Continua **Prácticas de ordenador**	☐ Sí, Apto. (__) ☐ Actividad ☐ Extraordinaria	Evaluación Continua **Polinomios**	☐ Sí, Apto. (__) ☐ Extraordinaria	Evaluación Continua **Grafos**	☐ Sí, Apto. (__) ☐ Extraordinaria

1. [*10 puntos*] Dado el polinomio

$$p(x) = 36 - 360x + 468x^2 + 2160x^3 + 1296x^4$$

a) Factorizar y calcular sus raíces y multiplicidades algebraicas, en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

b) ¿Cuántos polinomios están asociados a p(x) en $\mathbb{Z}_5[x]$? Razonar la respuesta.

2. [10 *puntos*] Consideramos el conjunto G={P $\in M_2(\mathbb{R})$: $P^t \cdot P = I$ } siendo I la matriz identidad. Se pide:

a) Demostrar que G es un grupo multiplicativo.
b) Calcular el determinante de P, para toda matriz P $\in$ G.
c) Demostrar que toda matriz P $\in$ G es regular, y calcular su inversa.

3. [*10 puntos*] Sea G = (W, F) el grafo con matriz de incidencia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular su matriz de adyacencia y representarlo gráficamente.
b) Definir distancia y geodésica entre dos vértices. Enunciar la consecuencia del teorema del número de caminos relativa a la distancia y el número de geodésicas entre dos vértices. Utilizarlo para calcular la distancia y el número de geodésicas que hay entre los dos últimos vértices.
c) Definir grafo plano y razonar si G lo es.

4. [*15 puntos*] Sea V el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 1. Definimos:

$$<p(x), q(x)> = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

1. Enunciar las propiedades del producto escalar y demostrar dos de ellas.
2. Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica.
3. Calcular la matriz de Gram respecto de la base {3x, 1}.
4. Estudiar, explícitamente, la relación entre ambas matrices de Gram.

5. [15 *puntos*] Sea f el endomorfismo en V cuya matriz asociada respecto de una base B={v_1, v_2, v_3} es

$$A = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular la imagen de los vectores $w_1 = 2v_1 + v_3$ y $w_2 = -v_1 + v_2$.
b) Calcular la dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio W generado por las imágenes de los vectores $w_1 = 2v_1 + v_3$ y $w_2 = -v_1 + v_2$ (obtenidas en el apartado a).
c) Estudiar si A es diagonalizable por semejanza y, en caso afirmativo, calcular una matriz diagonal semejante a ella y la base de vectores respecto de la cual la matriz asociada al endomorfismo es la diagonal.