ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática)

CURSO 2016/17. Convocatoria Ordinaria 2.

Nombre: ______________________________ DNI : _________ Gr. Teoría: ___ Gr. Práct.: ___

Evaluación continua	◻ Sí ◻ No	◻ Polinomios. Nota: ___ ◻ El Grupo Simétrico. Nota: ___ ◻ Teoría de Grafos. Nota: ___	**Prácticas**	◻ Ev. continua. Nota ___ ◻ Ordinaria 2

1. (10 puntos) Dado el siguiente polinomio, $p(x) = -12 + 72x - 102x^2 - 36x^3 + 54x^4$. Se pide:

 a) (7 puntos) Sabiendo que $p(x)$ no tiene raíces enteras, factorizar y calcular sus raíces en $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

 b) (3 puntos) Definir irreducible en el anillo de polinomios y determinar los elementos irreducibles que aparecen en la factorización de p(x) en $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$.

2. (10 puntos) Consideremos el grupo $\mathbb{C}^3$ y el subconjunto H={ (x,y,z) : x + i z = 0 }.

 a) (5 puntos) Razonar si H es subgrupo de $\mathbb{C}^3$.

 b) (5 puntos) Calcular un subgrupo propio de H.

3. (10 puntos) Consideremos G el grafo formado por el segundo grafo de Kuratowski y un punto aislado. Se pide:

 a) (3 puntos) Calcular la matriz de adyacencia del mismo, A, y A^2

 b) (1 punto) Definir y calcular su número cromático.

 c) (1 punto) Enunciar el teorema del número de caminos.

 d) (1 punto) Definir geodésica y distancia entre dos vértices.

 e) (4 puntos) Aplicar las consecuencias del teorema del número de caminos para calcular la distancia y el número de geodésicas que hay entre el primer y segundo vértice y entre el primer y último vértice de G.

4. (14 puntos) En el espacio vectorial de las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ consideramos el producto escalar $< A, C > = tr(AC^t)$, se pide

 a) (4 puntos) Enunciar las propiedades del producto escalar y demostrar dos de ellas

 b) Sea W el subespacio generado por S={ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ }.

  b.1. (3 puntos) Calcular su dimensión, una base, B_W, ecuaciones paramétricas e implícitas de W.

  b.2. (2 puntos) Calcular la matriz de Gram respecto de la base B_W obtenida en el apartado anterior.

  b.3. (5 puntos)¿Es B_W ortogonal? Utilizar Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal a partir de B_W.

5. (10 puntos) Sea f: $P_3(\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2^3$ la aplicación dada por

$$f(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3) = (0, b+c, 0)$$

a) (2 puntos) Demostrar que f es lineal.

b) (1 punto) Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

c) (0.75 puntos) Clasificar f

d) (3 puntos) Calcular dimensión, base, ecuaciones paramétricas e implícitas de Ker(f) e Im(f).

e) (1 punto) ¿Son isomorfos $P_3(\mathbb{Z}_2)$ y $\mathbb{Z}_2^3$? Razonar la respuesta

f) (1.5 puntos) Calcular la matriz asociada a f respecto de las bases B={x, x^2, 1, x^3 } y B´={(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)}

g) (0.75 puntos)¿Que relación existe entre las matrices de los apartados b) y f)?

6. (6 puntos) Estudiar, según los valores de $a \in \mathbb{R}$, si la matriz A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable por semejanza.