ÁLGEBRA (Grado en Ingeniería Informática)

CURSO 2015/16. Convocatoria Extraordinaria 2.

Nombre: ______________________________ DNI : __________ Gr. Teoría: ___ Gr. Práct.: ___

Evaluación continua	□ Sí □ No	□ Polinomios. Nota: ___ □ El Grupo Simétrico. Nota: ___ □ Teoría de Grafos. Nota: ___	**Prácticas**	□ Apto. Nota ___ □ No apto

1. (10 puntos) Dado el siguiente polinomio, $p(x) = 14\,x^2 - 47\,x^3 + 42\,x^4 - 42\,x^5 + 28\,x^6 + 5\,x^7$. Se pide:
   a) Factorizar y calcular sus raíces en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.
   b) Definir polinomio asociado a $p(x)$ y buscar un polinomio asociado a $p(x)$ en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

2. (10 puntos) Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, definimos la aplicación $\sigma\colon X \longrightarrow X$ dada por

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \{1, 2, 3, 10, 11, 12\} \\ x+1 & \text{si} \quad x \in \{4, 6\} \\ x-1 & \text{si} \quad x \in \{9, 7\} \\ 9 & \text{si} \quad x = 5 \\ 4 & \text{si} \quad x = 8 \end{cases}$$

   Definir permutación y comprobar si σ lo es. En caso afirmativo:
      a) Determinar si el número de inversiones de σ es par.
      b) Calcular $\tau = \sigma^{612}$ y τ^{-1}.

3. (10 puntos) Dada la matriz de incidencia $M = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$ de G_1 y de adyacencia $A = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&1 \\ 1&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ de G_2. Se pide:
   a) Representar gráficamente y dibujar una coloración óptima de ambos grafos.
   b) Definir grafo de Euler, de Hamilton y plano; y razonar si lo son o no G_1 y G_2.
   c) ¿G_1 y G_2 son isomorfos? Razona tu respuesta.

4. (15 puntos) Sean $V_1 = M_2(\mathbb{R})$ y $V_2 = P_2(\mathbb{R})$,

   a) Comprobar que $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1\\-1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0\\0&-1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V_1 y que $B_2 = \{x - x^2,\ 1 + x,\ -1\}$ es base de V_2.
   b) Sea $f\colon\ V_1 \longrightarrow V_2$ la aplicación dada por $f\left(\begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix}\right) = (a-b) + b\,x + (c-d)\,x^2$, comprobar que es lineal.
   c) Calcular la expresión matricial de f especto de las bases canónicas.
   d) Calcular, base, dimensión, ecuaciones implícitas y paramétricas del núcleo y la imagen de f.
      ¿Es inyectiva? ¿y sobreyectiva?
   e) Calcular la expresión matricial de f respecto de B_1 y B_2.
   f) ¿Qué relación existe entre las matrices anteriores?

5. (5 puntos) En el espacio vectorial U de las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ simétricas de traza cero consideramos el producto escalar $< A, C > = tr\left(AC^t\right)$, se pide
   a) Enunciar las propiedades de producto escalar y demostrar dos de ellas.
   b) Calcular una base B de U y calcular la matriz de Gram respecto de ella.
   c) ¿Es B ortogonal? Calcular una base ortonormal.

6. (10 puntos) Sea V un espacio vectorial con base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, y sea f un endomorfismo en V cuya expresión matricial respecto de B es $A = \begin{pmatrix} 2&0&0&\alpha \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ \alpha&0&0&2 \end{pmatrix}$.
   a) Determinar para qué valores de α la matriz A es diagonalizable por semejanza.
   b) Calcular, según α, las dimensiones de los subespacios vectoriales propios.