ÁLGEBRA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

CURSO 2014/15. Convocatoria Extraordinaria 2.

Apellidos y Nombre :____________________________________DNI :_________

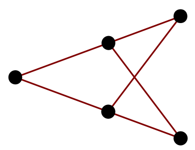
Grupo de teoría : ____ **Grupo de prácticas:** ________

1. (10 puntos) Calcular, usando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor en $\mathbb{Z}_5[x]$ de :

$$p(x) = -2\,x - x^2 + 6\,x^3 + 3\,x^4 \quad \text{y} \quad p(x) = -2\,-3\,x + 6\,x^2 + 9\,x^3$$

Definir polinomio irreducible y decir si el máximo comun divisor es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Z}_5[x]$.

2. (10 puntos) Consideramos el producto cartesiano $G = S_4 \times A_3 \times M_2(\mathbb{R})$, se pide:
   a) Definir una operación que dote a G de estructura de grupo.
   b) Calcular el elemento neutro y el simétrico de $a = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
   b) Calcular, si existen, subgrupos de 3 y 24 elementos de G.

3. (10 puntos) Dado el siguiente grafo:  Se pide:
   a) Matrices de adyacencia e incidencia.
   b) ¿Es 3-coloreable? ¿Y 3-cromático? Calcular una coloración óptima.
   c) Comprobar si es bipartito, bipartito completo, regular, plano y completo.

4. (15 puntos) Para $V = M_{3\times1}(\mathbb{R})$ y $V' = P_3(\mathbb{R})$ definimos $f : V \longrightarrow V'$, $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a-b) + (b-c)\,x + (c-a)\,x^2$.

   Se pide:
   a) Demostrar que f es lineal.
   b) Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases canónicas.
   c) Demostrar que $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ es base de V y que $B' = \left\{x^3, x-1, x, x-x^2\right\}$ es base de V'.
   d) Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases B y B'
   e) ¿Qué relación hay entre las matrices calculadas en los apartados b) y d)?
   f) Clasificar f.

5. (5 puntos) Estudiar si la matriz siguiente es diagonalizable por semejanza para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 37 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. (10 puntos) Sea V un espacio vectorial euclideo con base $B = \{v_1, v_2\}$, y sea $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ su matriz de Gram respecto de la base B.
   a) Calcular la expresión general de su producto escalar.
   b) ¿Es B una base ortogonal? ¿y unitaria?. Calcular una base ortonormal de V.
   c) Sea U un subespacio vectorial de V con sistema de generadores $S = \{(2, -1), (-1/2, 1/4)\}$.
      i. Calcular dimensión, base y ecuaciones paramétricas e implícitas de U.
      ii. Ampliar la base de U hasta una de V.