UNIVERSIDAD DE JAÉN
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

EXAMEN DE ÁLGEBRA

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
CONVOCATORIA DE MAYO DE 2014

Nombre:____DNI:______________ GRUPO:___ G. DE PRÁCTICAS:______

EVALUACIÓN CONTINUA	☐ SÍ. ☐ NO	☐ Polinomios. Nota:_____ ☐ El grupo simétrico. Nota:_____ ☐ Teoría de grafos. Nota:_____	PRÁCTICAS	☐ Apto. Nota:___ ☐ No apto

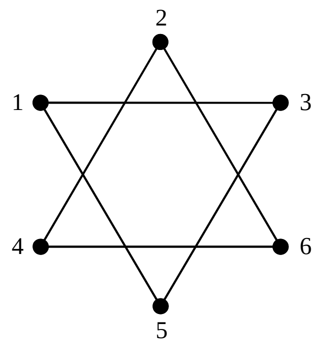
1. (10 puntos) Dados los polinomios:

$$p(x) = 4 - 6x + 5x^2 + 3x^3 - 9x^4 + 3x^5 \quad \text{y} \quad q(x) = -5 - 4x + 6x^2 + 2x^3 + 6x^4 - 5x^5$$

Calcular, utilizando el algoritmo de Euclides, el máximo común divisor de ambos en $\mathbb{Z}_7[x]$. ¿Es $1 + 5x$ un m.c.d. de $p(x)$ y $q(x)$?

2. (10 puntos) Sea el producto cartesiano $A_3 \times \mathbb{Z}_3^*$. Sabiendo que $A_3 = \{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Se pide:
   a. Definir una operación que lo dote de estructura de grupo.
   b. Calcular su tabla de operaciones. Calcular el elemento neutro y los inversos de todos los elementos.
   c. ¿Es un grupo conmutativo? Razonar la respuesta.
   d. Calcular un subgrupo de 3 elementos y otro de 2.

3. (10 puntos) Consideramos el grafo G cuya representación gráfica es:



Se pide:
   a. ¿Es plano? ¿Es de Euler? ¿Es conexo? ¿Es regular?
   b. Calcular el número cromático y una coloración óptima.

4. (15 puntos). Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial euclideo cuyo producto escalar es:

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$$

y U el subespacio vectorial generado por los siguientes vectores: $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}\right\}$.
   a. Calcular dimensión, una base, B, de U, sus ecuaciones paramétricas e implícitas.
   b. ¿Es B base ortogonal? ¿Es B unitaria? Calcular una base de U ortonormal a partir de B.
   c. Definimos

$$U^{\perp} = \{A \in V \mid \langle A, X\rangle = 0, \forall\, X \in B\}$$

      i. Demostrar que $U^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.
      ii. A partir de la definición de $U^{\perp}$ calcular sus ecuaciones implícitas.
      iii. Calcular dimensión, una base de $U^{\perp}$ y sus ecuaciones paramétricas.

5. (5 puntos) Sea f un endomorfismo en el espacio vectorial $V = M_2(\mathbb{R})$ dado por:

$$f(A) = A^t$$

   a) Calcular la expresión matricial de f respecto de la base canónica.
   b) Calcular Ker(f) e Im(f). Clasificar f.

6. (10 puntos) Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Estudiar si es diagonalizable según los parámetros α y β.
b) Para $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, calcular la matriz P regular tal que $P^{-1}AP = D$, con D una matriz diagonal.

Nota: Incluir toda la teoría que se use.
En caso de evaluación continua, es necesario obtener 10 de los 30 puntos de las preguntas 4, 5 y 6.